Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni. Lezione 6

Torniamo all'equazione di Tanaka

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t \qquad \sigma(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x \le 0 \end{cases}$$
$$X_0 = 0$$

- ogni soluzione è un Moto Browniano (unicità in legge)
- se (X, B) è soluzione, anche $(-X, B)$ è soluzione (non unicità per traiettorie)

Costruzione di una soluzione esplicita:

partiamo da β_s M.B., $B_t = \int_0^t \sigma(\beta_s)\, d\beta_s$

$$dB_t = \sigma(\beta_t)\, d\beta_t \iff d\beta_t = \sigma(\beta_t)\, dB_t$$

Perché la soluzione è strettamente debole?

$\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_t^{|\beta|}$ ← questo risultato è forse intuitivo, ma è avanzato.

Un risultato generale: se B è un M.B.

posto $X_t = \int_0^t \sigma(B_s)\, dB_s$, X è ancora un

M.B. che ha rappresentazione

$$X_t = |B_t| - L_t$$ dove L_t è il "tempo locale in 0"

$$L_t = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{\{-\varepsilon \le B_s \le \varepsilon\}}\, ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I_{\{|B_s| \le \varepsilon\}}\, ds$$

e di conseguenza $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t^{|B|}$

Nell'esempio precedente $\sigma(x)$ era boreliana, limitata, non continua.

Vediamo un altro esempio "patologico", un'equazione che ha soluzione forte ma non unicità.

Equazione $dX_t = b(X_t)\,dB_t \quad , X_0 = 0$

dove $b(x) = I_{\{x \neq 0\}} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$

Ci sono due soluzioni $(0, B)$ e (B, B)

$$E\left[\int_0^T I^2_{\{B_s = 0\}}\,ds\right] = \int_0^T P\{B_s = 0\} = 0$$

quindi

$$B_t = \int_0^t I_{\{B_s \neq 0\}}\,dB_s + \cancel{\int_0^t I_{\{B_s = 0\}}\,dB_s} \atop = 0$$

Cenno ad alcuni risultati avanzati

<u>Argomento di Zvonkyn</u>

L'equazione $dX_t = b(X_t)\,dt + dB_t$ ha sempre soluzione forte

<u>Controesempio di Tsirelson</u>

Una equazione della forma

$dX_t = f(t, X_\cdot)\,dt + dB_t$ che ha soluzione <u>strettamente debole</u>

Coefficienti localmente uniformemente Lipschitziani: un argomento di localizzazione

$$dX_t = f(t, X_t)\,dt + g(t, X_t)\,dB_t$$

se $|x|, |y| \leq n$ $\quad \Big| f(t,x) - f(t,y) \Big| + \Big| g(t,x) - g(t,y) \Big| \leq K_n \cdot |x-y|$

consideriamo $\quad f_n(t,x) = \begin{cases} f(t,x) & |x| \leq n \\ \text{unif. lipschitz.} & \end{cases}$

stesso cosa per $g_n(t,x)$

Sia X^n l'unica soluzione di

$$dX^n_t = f_n(t, X^n_t)\,dt + g_n(t, X^n_t)\,dB_t$$

sia poi τ_n il tempo d'arresto

$$\tau_n(\omega) = \inf\{ s \geq 0, \ |X^n(s,\omega)| \geq n \}$$

Argomento fondamentale: se $n < m$

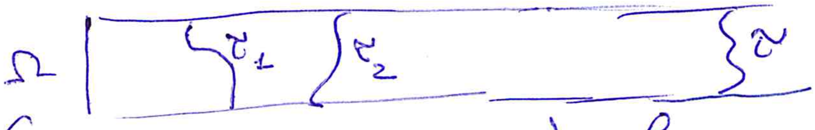
$$X^n(t,\omega) = X^m(t,\omega) \qquad \text{per } t \leq \tau_n(\omega)$$

(infatti risolvono le stesse equazione sull'intervallo stocastico $[0, \tau_n] = \{(s,\omega) : 0 \leq s \leq \tau_n(\omega)\}$)

Naturalmente $\tau_n \le \tau_{n+1} \dots$ e se $\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_n$

questo permette di definire senza ambiguità

la soluzione su $[0, \tau[$ (τ "tempo di esplosione").



Se $\tau(\omega) \equiv T$ (oppure $\tau(\omega) \equiv +\infty$) la soluzione è globale, altrimenti si è esplosione.

Un altro argomento di localizzazione:

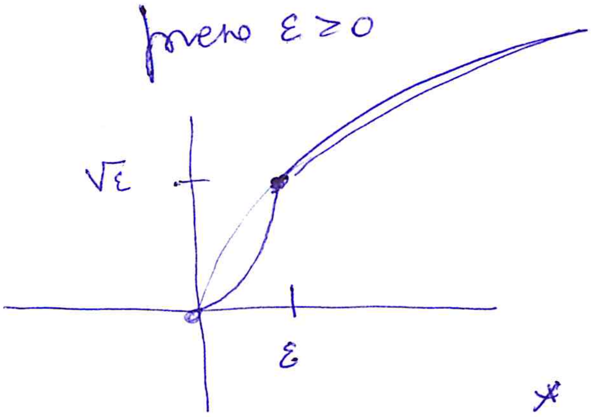
le diffusioni di Feller

$$dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dB_t \quad , X_t > 0$$

$$X_0 = x_0 > 0$$

$\mu(t,x)$ unif. lipschitziana crescita lineare

preso $\varepsilon > 0$



$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \ge \varepsilon \\ * & 0 \le x \le \varepsilon \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

* derivabile con derivata limitata

L'equazione

$$dX_t^\varepsilon = \mu(t, X_t^\varepsilon)\,dt + \sigma g_\varepsilon(X_t)\,dB_t$$

$$X_0 = x_0 > \varepsilon$$

ha una e una sola soluzione

$x_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \dots$ $\quad \varepsilon_n \downarrow 0 \quad g_n = g_{\varepsilon_n}$

$X_t^n = X_t^{\varepsilon_n}$ $\quad$ di nuovo $\tau_n = \inf\{s : X_s^n \le \varepsilon_n\}$

$\tau_n < \tau_{n+1} \dots \quad \tau_n \uparrow \tau \quad 0 < \tau(\omega) \le +\infty$

È definita senza ambiguità la soluzione sull'intervallo stocastico $[0, \tau[$

Feller ha considerato vari esempi con $\mu(t,x)$ lineare affine e ha indagato nella non-esplosione (cioè $\tau(\omega) = +\infty$ q.c.)

Un esempio: il cosiddetto modello C.I.R.

C.I.R. "Cox-Ingersoll-Ross" (modello per tassi d'interesse)

$$dX_t = a(b - X_t)\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dB_t$$

$$X_0 = x_0 > 0 \qquad X(t,\omega) > 0 \quad \forall(\omega,t)$$

Risultato:

$ab \geq \frac{\sigma^2}{2} \Rightarrow \tau(\omega) = +\infty$ p.c.
soluzione globale

$ab < \frac{\sigma^2}{2} \Rightarrow \tau(\omega) < +\infty$ p.c., cioè c'è
esplosione

Il caso dei coefficienti Holderiani:
un risultato di Yamada-Watanabe

Consideriamo una funzione continua crescente
$\rho : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ con $\rho(0) = 0$ e
tale che $\boxed{\int_0^\varepsilon \rho^{-2}(u)\,du = +\infty}$

(ad esempio $\rho(u) = u^\alpha$, con $\alpha \geq \frac{1}{2}$)

Teorema (**): Consideriamo l'equazione

$$dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dB_t \qquad X_0 = x_0$$

con b unif. lipschitziana crescita lineare

e $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq \rho(|x-y|)$

(e σ limitata, per semplicità)

Allora l'equazione ha unicità per traiettorie.

(Enunciato più in risultato generale di esistenza)

L'equazione ordinaria $y' = \sqrt{|y|}$
$y(0) = 0$

ha infinite soluzioni

L'equazione

$$dX_t = f(t, X_t)\,dt + \sqrt{|X_t|}\,dB_t$$
$$X_0 = 0$$

ha una sola soluzione

Il caso delle diffusioni di Feller non è compreso poiché si richiedeva $X_t > 0$.

Cominciamo con un

Teorema di confronto Nelle stesse ipotesi

se Y che risolve

$$Y_t = y_0 + \int_0^t \sigma(s, Y_s)\,dB_s + \int_0^t B(s, Y_s)\,ds$$

con $B(t,y) \geq b(t,y)$ e $y_0 \geq x_0$

Allora $Y_\sigma \geq X_\sigma$ q.c. per ogni σ

(**) un risultato generale di esistenza per (**) che può presentare; la tesi di (**) segue facilmente dal Teorema di confronto.

Siano infatti (X, B) e $(\hat{X}, B)$ due soluzioni

$\hat{X}_\tau \geq X_\sigma$ q.c. per ogni σ, ma anche

$X_\tau \geq \hat{X}_\sigma$ q.c. per ogni σ, quindi $X_\tau = \hat{X}_\sigma$ q.c.

Poiché le traiettorie sono continue, i due processi sono indistinguibili.

Vediamo i vari passi del

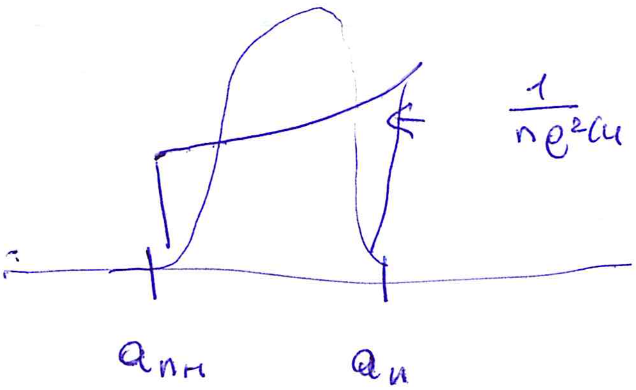
Teorema di confronto

Prendiamo $a_0 > 0$ arbitrario e costruiamo induttivamente $a_0 > a_1 > a_2 \ldots \quad a_n \downarrow 0$

e $$\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{du}{\rho^2(u)} = n$$

Sia poi h_n continua, con supporto su $]a_{n+1}, a_n[$, $0 \leq h_n(u) \leq \dfrac{2}{n\,\ell^2(u)}$

e $\displaystyle\int_{a_{n+1}}^{a_n} h_n(u)\,du = 1$



Sia poi f_n con $f_n(0) = f_n'(0) = 0$ e $f_n''(u) = h_n(u)$

notiamo che $f_n'(u) = \displaystyle\int_0^u h_n(s)\,ds$

ne segue

$$f_n'(u) = 0 \qquad u \leq a_{n+1}$$

$$0 \leq f_n'(u) \leq 1 \qquad a_{n+1} < u < a_n$$

$$f_n'(u) = 1 \qquad u \geq a_n$$

Quindi $f_n(u) \uparrow u$ (per $n \to \infty$)

per ogni $u \geq 0$ $\quad$ ($f_n(u) = 0$ per $u < 0$)

Poiché $y_0 \geq x_0$, $f_n(x_0 - y_0) = 0$

con la formula di Itô si ottiene

$$f_n(X_\tau - Y_\tau) = \text{"martingala"} +$$

$$+ \int_0^\tau f_n'(X_s - Y_s)\big(b(s, X_s) - B(s, Y_s)\big)\,ds \;+$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\tau f_n''(X_s - Y_s)\big(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\big)^2 ds$$

Prendendo le entrambe le parti le speranze, la martingala ha speranza 0 (abbiamo preso per semplicità $\sigma(t,x)$ limitata, si può generalizzare - - -)

La speranza dell'ultimo termine a destra si maggiora con

$$\frac{1}{2} E\left[\int_0^\tau \frac{2}{n \cdot \rho(|X_s - Y_s|)^2}\, \rho(|X_s - Y_s|)^2 ds\right] \leq \frac{\tau}{2n}$$

e quindi tende a 0 per $n \to \infty$.

Quanto alle operazioni del secondo termine a destra, è limitato da

$$E\left[\int_0^t \varphi_n'(X_s - Y_s)\left[b(s,X_s) - b(s,Y_s)\right] ds\right] +$$

$$+ E\left[\int_0^t \varphi_n'(X_s - Y_s)\left[b(s,Y_s) - B(s,Y_s)\right] ds\right] \leq$$

$$\leq k\, E\left[\int_0^t I_{[0,+\infty[}(X_s - Y_s) \cdot |X_s - Y_s|\, ds\right] =$$

$$= k\, E\left[\int_0^t (X_s - Y_s)^+ ds\right]$$

Facendo tendere $n \to \infty$ si ottiene

$$E\left[(X_t - Y_t)^+\right] \leq k \int_0^t E\left[(X_s - Y_s)^+\right] ds$$

Sia $g(t) = E\left[(X_t - Y_t)^+\right]$

$$g(t) \leq k \int_0^t g(s)\, ds \quad , \ g(0) = 0$$

il Lemma di Gronwall permette di concludere $g(t) = 0 \quad \forall t$.