Equazioni Differenziali stocastiche e applicazioni

Lezione 5

Equazione

$$dX_t = f(t, X_t)\,dt + g(t, X_t)\,dB_t \qquad (**)$$

$$X_0 = x_0$$

indicato e (f, g).

Definizione di soluzione (X, B)

* esiste $[\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}, P]$ dove

- B_t è un $\mathcal{F}_t$ - moto Browniano (processo di Wiener)
- X_t è $\mathcal{F}_t$ - adattato con traiettorie continue e verifica $(**)$

Definizione di unicità:

- unicità per traiettorie: date due soluzioni (X, B) e $(\tilde{X}, B)$ (adattate allo stesso M.B.) i due processi $(X_t)_{0 \le t \le T}$ e $(\tilde{X}_t)_{0 \le t \le T}$ sono indistinguibili

– <u>unicità in legge</u>

date due soluzioni (X, B) e $(\hat{X}, \hat{B})$, i due processi X e $\hat{X}$ hanno la stessa legge di probabilità

(cioè $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ e $(\hat{X}_{t_1}, \dots, \hat{X}_{t_n})$ sono equidistribuite, per ogni scelta di $t_1, \dots, t_n$)

Esistenza debole e forte

$\boxed{\text{intuitivamente}}$ <u>soluzione forte</u> se assegnato $[\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P]$ e B_t posso costruire una soluzione X_t adattata a quella base stocastica

<u>soluzione debole</u> se devo costruire $[\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P]$ e poi (B_t) . . . .

<u>Definizione corretta</u>:

Una soluzione è detta <u>forte</u> se $(X_t)_{0\le t\le T}$ è adattata alla filtrazione $(\mathcal{F}^B_t)_{0\le t\le T}$;

una soluzione generale è detta <u>debole</u> ed è <u>strettamente debole</u> se non è forte.

Un risultato che verrà visto più avanti

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{esistenza debole + unicità per traiettorie} \Longrightarrow \\ \Rightarrow \text{esistenza forte + unicità in legge}\end{array}}$$

Primo teorema "classico"

Siano $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\quad g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times n}$

boreliane tali che

$$\| f(t,x) \| + \| g(t,x) \| \leq C \left(1 + \|x\| \right)$$

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| + \| g(t,x) - g(t,y) \| \leq C \, \|x - y\|$$

allora l'equazione

$$dX_t = f(t, X_t)\,dt + g(t, X_t)\,dB_t$$
$$X_0 = x$$

ha una soluzione forte unica (per traiettorie)

---

si può procedere in due modi

- metodo iterativo di Picard + lemma Gronwall
- teorema delle contrazioni in un opportuno spazio di funzioni

Cenno sul primo metodo

- si considera $Z \to K(Z)$ dove

$$K(Z)_t = x + \int_0^t f(s, Z_s)\, ds + \int_0^t g(s, Z_s)\, dB_s$$

e si pone $X^0 = x$ e $X^{n+1} = K(X^n)$

- si prova la disuguaglianza

$$E\left[\sup_{s \le t} (X_s^{n+1} - X_s^n)^2\right] \le K \frac{c^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}$$

e questo prova l'esistenza

- si prova l'unicità col lemma di Gronwall

Si può generalizzare: f e g dipendono da "tutto il passato"

ad esempio $f(t, X_\cdot) = \dfrac{1}{1 + \sup_{0 \le s \le t} |X_s|}$

La condizione per esistenza e unicità diventa

$$\| f(t,w) - f(t,w') \| + \| g(t,w) - g(t,w') \| \leq$$

$$\leq K \cdot \sup_{s \leq t} \| w(s) - w'(s) \|$$

Un esempio (un pò sofisticato) di unicità in legge ma non di unicità per traiettorie, e di conseguenza una soluzione strettamente debole

Osservazione preliminare se $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ è un M.B. e $|H(t,\omega)| \equiv 1$, allora $Z_t = \int_0^t H_s \, dB_s$ è ancora un M.B. (infatti $[Z]_t = t$)

Poniamo $\sigma(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ $\left(\sigma(x) = \mathrm{sgn}(x) \right)$

e consideriamo l'equazione $e(0, \sigma)$ cioè $dX_t = \sigma(X_t)\, dB_t$: notiamo che ogni soluzione (se esiste) è un M.B. standard, si ha quindi unicità in legge

Partiamo da un moto Browniano standard β_t

e so $B_t = \int_0^t \sigma(\beta_s)\, d\beta_s$, quindi

B è un M.B.

Però $\quad dB_t = \sigma(\beta_t)d\beta_t \iff d\beta_t = \sigma(\beta_t)\, dB_t$

quindi (β, B) è una soluzione, ma anche

$(-\beta, B)$ è una soluzione (non c'è unicità

per traiettorie)

È facile vedere che $\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_t^{|\beta|}$ quindi

la soluzione è strettamente debole.

Alcuni esempi

Moto Browniano geometrico

Consideriamo l'equazione

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

$$S_0 = s_0 > 0$$

Poniamo $Z_t = \log(S_t)$ (supponendo che sia positivo)

Formula di Itô

$$dZ_t = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} d[S]_t =$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma \, dB_t$$

quindi $\quad Z_t = \log(s_0) + \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t \right)$

quindi

$$S_t = s_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t \right)$$

Perchè Moto Browniano geometrico?

fa pensare a una progressione geometrica

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t \qquad (t_i - t_{i-1}) = d$

$$B_t = \sum_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$$

indipendenti $N(0, d)$

$$S_t = s_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}$$

$$\log\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$$

$N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) d, \, \sigma^2 d \right)$

Più generalmente

$$dX_t = X_t \left(H_t\, dt + K_t\, dB_t \right)$$

$H_s \in \Lambda^1$ cioè $\int_0^T |H(s,\omega)|\, ds < +\infty$ p.c.

$K_s \in \Lambda^2$ cioè $\int_0^T K^2(s,\omega)\, ds < +\infty$ p.c.

ha come unica soluzione

$$X_t = x_0 \exp\left(\int_0^t \left(H_s - \frac{K_s^2}{2}\right) ds + \int_0^t K_s\, dB_s \right)$$

<u>Attenzione</u> ogni processo di Itô strettamente positivo verifica una equazione di quel tipo

<u>processo di Itô:</u> $dX_t = H_t\, dt + K_t\, dB_t$

<u>strettamente positivo</u> per (quasi) ogni ω

$$\inf_{0 \le s \le T} X(s,\omega) > 0$$

$$dX_t = X_t \left(\frac{H_t}{X_t}\, dt + \frac{K_t}{X_t}\, dB_t \right)$$

Processo di Ornstein - Uhlenbeck

(ORNSTEIN - UHLENBECK)

generale: soluzione di

$$dX_t = a X_t \, dt + b \, dB_t$$

$$X_0 = c$$

Partiamo dall'equazione ordinaria

$$f'(t) = a f(t) + g(t)$$

$$f(0) = c$$

questa ha soluzione

$$f(t) = c e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-as} g(s) \, ds$$

questo ci suggerisce la soluzione

$$X_t = c e^{at} + b e^{at} \int_0^t e^{-as} \, dB_s =$$

$$= c e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-s)} \, dB_s$$

Spesso però si chiama processo di O. U. la soluzione di

$$\begin{cases} dX_t = -X_t \, dt + \sqrt{2} \, dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Esercizio: il caso dei coefficienti affini, una estensione del metodo di variazione delle costanti arbitrarie

Consideriamo l'equazione

$$dX_t = \left(a(t) X_t + b(t) \right) dt + \left(c(t) X_t + f(t) \right) dB_t$$

$X_0 = x$

dove a, b, c, f sono boreliane limitate

Sia Y la soluzione di

$$dY_t = Y_t \left[a(t)\, dt + c(t)\, dB_t \right] \qquad Y_0 = 1$$

sia Z_t uguale a

$$Z_t = x + \int_0^t Y_s^{-1} \left[b(s) - c(s) f(s) \right] ds + \int_0^t Y_s^{-1} f(s)\, dB_s$$

allora $X_t = Y_t Z_t$ è la soluzione

Notiamo che

$$Y_t = \exp \left[\int_0^t \left(a(s) - \frac{c^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t c(s)\, dB_s \right]$$