Eq. differenziali Stocastiche e Applicazioni

(555AA) 42 ore Docenti D. Trevisan M. Pratelli

orario giovedì 9-11
venerdì 14-16

inizio 10 min dopo, 5 min pausa, fine 15 min prima

ricevimento: su appuntamento

materiale:
- note / video (anche caricati su GDrive)
- appunti Pratelli calcolo di Malliavin
- testi: Revuz-Yor, Stroock-Varadhan, Nualart
- Note Novaga-Pallara (funzioni BV)

esame: a seminario (circa un'ora) su argomento da concordare $\boxed{\text{+ domande}}$ (attinenti al seminario)

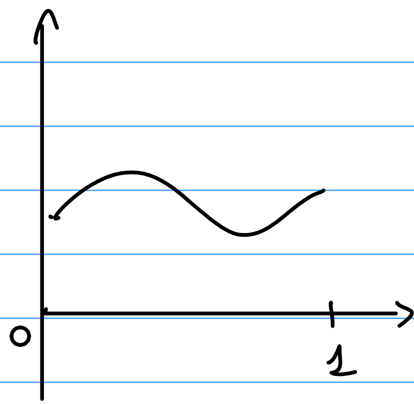
programma
1) Eq. diff. stocastiche (SDE o EDS)
2) Calcolo di Malliavin

applicazioni
- Alcuni esempi classici (finanza mat., fisica mat.)
- Disuguaglianze funzionali
- Legami tra PDE e SDE

"Tema" nascosto: concentrazione e diffusione

$X \approx \mathbb{E}[X]$ $\qquad$ P_X ha densità

Strumento: derivata "rispetto al parametro $\omega \in \Omega$"



$\Omega = [0,1]$

$$\frac{d}{d\omega} X(\omega) \approx 0 \implies X \approx \mathbb{E}[X]$$

concentrazione

ma se $\frac{d}{d\omega} X(\omega) \equiv 0$ $\qquad$ $P_X \not\ll Leb$

Capire lo stesso fenomeno in dimensione infinita _

Richiami dal corso di Istituzioni di Probabilità.

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\qquad T \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$
- $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ $\qquad$ ipotesi abituali
- $\tau : \Omega \to [0,T]$ $\qquad$ tempo d'arresto $\qquad \{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t$
- $(X_t)_{t\in[0,T]}$ $\qquad$ adattato, progressivamente misurabile continuo
- $(M_t)_{t\in[0,T]}$ $\qquad$ martingala: continua, quadr. integr., locale $\qquad$ Es (B_t)
- $[M]_t$ $\qquad$ variazione quadratica $\qquad$ Es $[B]_t = t$

$$[M]_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \left(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}\right)^2 \quad \text{in prob. lungo}$$

$$\pi^n = \{t_i^n\} : \sup_i |t_i^n - t_{i-1}^n| \to 0$$

$M_t^2 - [M]_t$ $\qquad$ martingala

- Integrale di Ito $\qquad \int_0^t H_s \, dM_s \qquad t \in [0,T]$

$(H_s)_{s\in[0,T]}$ progress. misurabile e

M^2 $\qquad \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \, d[M]_s\right] < \infty \implies \left(\int_0^t H_s \, dM_s\right)_t$ mart. quadr. integr.

Integrale di Stieltjes

Λ^2 $\qquad P\left(\int_0^T H_s^2 \, d[M]_s < \infty\right) = 1 \implies$ " $\qquad$ mart. locale

continue

- τ t.d.a. $(X^{|\tau})_t = X_{t\wedge\tau}$ $\qquad \int_0^t H_s dM_s = \int_0^T H_s dM_s^{|\tau}$

- Isometria di Itô

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dM_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 d[M]_s\right]$$

- Dis. massimale di Doob $\quad (X_t)_{t\in[0,T]}$ processo

$$X_t^* = \sup_{0\le s\le t} |X_s| \qquad t \mapsto X_t^* \text{ crescente}$$

(continuo se X continuo)

Teo (Doob) Se M è martingala $(T<\infty)$

$$P(M_T^* > \lambda) \le \frac{\mathbb{E}[|M_T|]}{\lambda}$$

$$\forall p>1 \quad \mathbb{E}[(M_T^*)^p] \lesssim_p \mathbb{E}[|M_T|^p] \lesssim_p \mathbb{E}[(M_T^*)^p]$$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Notazione:}}$ $\lesssim_p \; = \; \le C_p \cdot$ $\qquad \exists C = C(p) < \infty$ tale che $\le C$

$O_p(\ )$

- Semimartingale $\quad X_t = X_0 + \int_0^t b_s dA_s + \int_0^t H_s dM_s$

$\uparrow$ Stieltjes $\qquad \uparrow$ Itô

$$[X]_t = \int_0^t H_s^2 d[M]_s$$

$\boxed{\text{Notazione differenziale}}$ $\qquad dX_t = b_t dA_t + H_t dM_t$

- <u>Formula di Itô</u> $f \in \mathcal{C}^2$

$$df(X_t) = f'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\,d[X]_t$$

- <u>Estensioni vettoriali</u> $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$M : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ mart. continue

$[M] : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^{d \times d}$ simmetriche semi def. positive

$H : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^{k \times d}$, $\mathcal{M}^2 \circ \Lambda^2$

$$\Rightarrow \left(\int H\,dM\right)_i = \sum_{\ell=1}^{d} H_{i\ell}\,dM_\ell$$

<u>Isometria di Itô</u> $\mathbb{E}\left[\left|\int H\,dM\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int \sum_{i,\ell,\ell',j} H_{i\ell} H_{\ell' j}\,d[M]_{\ell\ell'}\right]$

<u>Formula di Itô</u> $dX_t = b_t\,dA_t + dM_t$

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$df(X_t) = \nabla f(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2} \nabla^2 f(X_t)\,d[M]_t$$

Hilbert Schmidt

$$\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(X_t)\,d[M]_t^{ij}$$