Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 18

Dario Trevisan

25/11/2024

Section 1

Stima dei parametri di una catena di Markov dalle osservazioni

Stima dei parametri

Consideriamo il problema di stimare i *parametri* di un processo di Markov omogeneo, sulla base di osservazioni di una traiettoria, ossia la matrice

- delle probabilità di transizione Q per una catena di Markov $(X_n)_n$

Stima dei parametri

Consideriamo il problema di stimare i *parametri* di un processo di Markov omogeneo, sulla base di osservazioni di una traiettoria, ossia la matrice

- delle probabilità di transizione Q per una catena di Markov $(X_n)_n$
- o delle intensità di salto L per un processo di Markov a salti $(X_t)_t$,

Due approcci

n stati $\Rightarrow \simeq n^2$ parametri

Si osserva che la catena X segue un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$, ossia $X_0 = x_0$, $X_1 = x_1$, ..., $X_n = x_n$ (scriviamo $X = \gamma$). Consideriamo i due approcci:

- Massima verosimiglianza: massimizzare

$$Q \mapsto L(\mathcal{Q} = Q; X = \gamma) = P(X = \gamma | \mathcal{Q} = Q) = \overbrace{P(X_0 = x_0)}^{\text{dipende da } Q?} Q_\gamma$$

$$Q_\gamma = \prod_{k=0}^{n-1} Q_{x_k x_{k+1}}$$

Due approcci

Si osserva che la catena X segue un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$, ossia $X_0 = x_0$, $X_1 = x_1$, $\ldots$, $X_n = x_n$ (scriviamo $X = \gamma$). Consideriamo i due approcci:

- Massima verosimiglianza: massimizzare

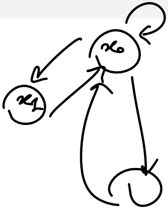
$$Q \mapsto L(\mathcal{Q} = Q; X = \gamma) = P(X = \gamma | \mathcal{Q} = Q) = P(X_0 = x_0) Q_\gamma$$

- Bayesiano: si introduce una densità a priori per $\mathcal{Q}$ (vista come variabile aleatoria) e si stima tramite Bayes la densità a posteriori, noto $X = \gamma$,

$$p(\underbrace{\mathcal{Q} = Q | X = \gamma}_{\text{posteriori}}) \propto p(\underbrace{\mathcal{Q} = Q}_{\text{priori}}) L(\underbrace{\mathcal{Q} = Q; X = \gamma}_{\text{verosimiglianza}}),$$

Stima di massima verosimiglianza

Supponiamo per semplificare che sia $P(X_0 = x_0) = 1$, così



$$L(Q; X = \gamma) = Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n-1} Q_{\underbrace{x_{k-1}}_{i} \to \underbrace{x_k}_{j}}.$$

- Raccogliendo i fattori ripetuti,

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n} Q_{x_{k-1} \to x_k} = \prod_{i,j \in E} Q_{i \to j}^{\gamma_{i \to j}},$$

$Q_{i \to j}$ sono da stimare

dove $\gamma_{i \to j}$ è il numero di transizioni dallo stato $i \in E$ a $j \in E$ che avvengono in γ.

$\gamma = ON \to ON \to ON \to OFF \to OFF$

$\gamma_{ON \to ON} = 2$

$\gamma_{ON \to OFF} = 1$

$\gamma_{OFF \to OFF} = 1$

Stima di massima verosimiglianza

Supponiamo per semplificare che sia $P(X_0 = x_0) = 1$, così

$$L(Q; X = \gamma) = Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n-1} Q_{x_{k-1} \to x_k}.$$

- Raccogliendo i fattori ripetuti,

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n} Q_{x_{k-1} \to x_k} = \prod_{i,j \in E} Q_{i \to j}^{\gamma_{i \to j}},$$

  dove $\gamma_{i \to j}$ è il numero di transizioni dallo stato $i \in E$ a $j \in E$ che avvengono in γ.

- In particolare,

$$n = \sum_{i,j \in E} \gamma_{i \to j}.$$

Un massimo vincolato (Max Likelihood)

Per calcolare il punto di massimo, di

$$Q \mapsto \prod_{i,j \in E} Q_{i \to j}^{\gamma_{i \to j}}$$

dobbiamo tenere conto del vincolo che la somma delle righe della matrice $\mathcal{Q}$ sia 1.

- Per determinare massimi o minimi di funzioni vincolate in generale si usano i moltiplicatori di Lagrange: nei punti critici il gradiente della funzione sia ortogonale al vincolo.

Una sostituzione

Nel nostro caso evitiamo i moltiplicatori esprimendo la diagonale di $\mathcal{Q}$ in termini delle altre entrate sulla riga:

$$Q_{i\to i} = 1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j} \quad \text{per ogni } i \in E.$$

$n^2 - n$ variabili

- Riscriviamo la verosimiglianza

$$L(\mathcal{Q} = Q; X = \gamma) = \prod_{\substack{i\in E \\ \text{riga}}} \overbrace{(1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j})}^{Q_{i\to i}^{\gamma_{i\to i}}}{}^{\gamma_{i\to i}} \overbrace{\prod_{j\neq i} Q_{i\to j}^{\gamma_{i\to j}}}.$$

Una sostituzione

Nel nostro caso evitiamo i moltiplicatori esprimendo la diagonale di $\mathcal{Q}$ in termini delle altre entrate sulla riga:

$$Q_{i\to i} = 1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j} \quad \text{per ogni } i \in E.$$

- Riscriviamo la verosimiglianza

$$L(\mathcal{Q} = Q; X = \gamma) = \prod_{i\in E} \overbrace{(1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j})^{\gamma_{i\to i}} \prod_{j\neq i} Q_{i\to j}^{\gamma_{i\to j}}}^{f_i((Q_{i\to j})_{j\neq i})}.$$

- Possiamo ragionare separatamente per ciascuna riga i, e massimizzare

$$(Q_{i\to j})_{j\neq i} \mapsto (1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j})^{\gamma_{i\to i}} \prod_{j\neq i} Q_{i\to j}^{\gamma_{i\to j}},$$

Fisso $\bar{i}, \bar{j}$ $\bar{i} \neq \bar{j}$ e derivo rispetto a $Q_{\bar{i} \to \bar{j}}$

$$\frac{\partial}{\partial Q_{\bar{i} \to \bar{j}}} \log L(Q) = \frac{\partial}{\partial Q_{\bar{i} \to \bar{j}}} \left(\sum_{i \in E} \log \left(1 - \sum_{j \neq i} Q_{i \to j}\right)^{\gamma_{i \to i}} + \sum_{j \neq i} \log Q_{i \to j}^{\gamma_{i \to j}} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial Q_{\bar{i} \to \bar{j}}} \log \left(1 - \sum_{j \neq \bar{i}} Q_{\bar{i} \to j}\right)^{\gamma_{\bar{i} \to \bar{i}}} + \sum_{j \neq \bar{i}} \frac{\partial}{\partial Q_{\bar{i} \to \bar{j}}} \log Q_{\bar{i} \to j}^{\gamma_{\bar{i} \to j}} \right)$$

$$= \gamma_{\bar{i} \to \bar{i}} \frac{\partial}{\partial Q_{\bar{i} \to \bar{j}}} \log\left(1 - \sum_{j \neq \bar{i}} Q_{\bar{i} \to j}\right) + \frac{\partial}{\partial Q_{\bar{i} \to \bar{j}}} \log\left(Q_{\bar{i} \to \bar{j}}^{\gamma_{\bar{i} \to \bar{j}}} \right)$$

$$= \gamma_{\bar{i} \to \bar{i}} \frac{-1}{1 - \sum_{j \neq \bar{i}} Q_{\bar{i} \to j}} + \gamma_{\bar{i} \to \bar{j}} \frac{1}{Q_{\bar{i} \to \bar{j}}} = 0$$

Conclusione

per ogni $i \neq j$ abbiamo l'equazione

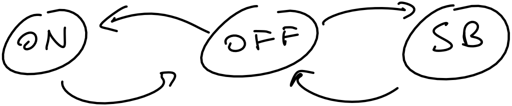
$$\gamma_{i\to i} \frac{1}{1 - \sum_{j \neq i} Q_{i\to j}} = \gamma_{i\to j} \frac{1}{Q_{i\to j}}$$

$$\boxed{\frac{Q_{i\to j}}{1 - \sum_{j\neq i} Q_{i\to j}} = \frac{\gamma_{i\to j}}{\gamma_{i\to i}}}$$

$$\boxed{Q_{i\to j} = c(i)\, \gamma_{i\to j}}$$

per ogni i, j, $i \neq j$

Conclusione / Esempio



$\gamma = ON \to ON \to OFF \to OFF \to OFF \to SB \to SB \to ON \to OFF$

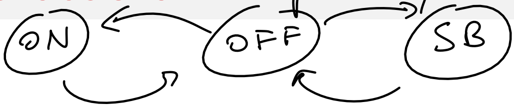
$\Rightarrow Q\,?$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l}]/3 \\ ]/3 \\ ]/2 \end{array}$$

$$\Rightarrow Q_{MLE} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Conclusione

Esempio Bayesiano



$$\gamma = ON \to ON \to OFF \to OFF \to OFF \to SB \to SB \to ON \to OFF$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{priori}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{osservate}$$

a posteriori $\alpha_{MAP} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} /7 \\ /4 \\ /5 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

Il metodo bayesiano (Densità coniugate)

Se la densità a priori per $\mathcal{Q}$ è della forma (di Dirichlet)

$$p(\mathcal{Q} = Q) \propto \prod_{i,j \in E} Q_{i \to j}^{\alpha_{ij}},$$

$$Q_{ON\to ON}^{\alpha_{ON\to ON}} \, Q_{ON\to OFF}^{\alpha_{ON\to OFF}} \cdot Q_{OFF\to ON}^{\alpha_{OFF\to ON}} \cdot Q_{\dots}$$

per opportuni parametri $\alpha_{ij} \geq 0$, la moda della densità sopra è data dalla matrice

$$Q_{i \to j} = \frac{\alpha_{ij}}{\sum_{k \in E} \alpha_{ik}} \propto \alpha_{ij}.$$

- La formula di Bayes darebbe quindi come densità a posteriori

$$p(\mathcal{Q} = Q | X = \gamma) \propto \prod_{i,j \in E} Q_{i \to j}^{\alpha_{ij} + \gamma_{i \to j}},$$

con stima di massima ~~verosimiglianza~~ a posteriori

$$Q_{i \to j} = \frac{\alpha_{ij} + \gamma_{i \to j}}{\sum_{k \in E} \alpha_{ik} + \gamma_{i \to k}} \propto \underline{\underline{\alpha_{ij} + \gamma_{ij}}}.$$

Processi di Markov a salti

Nel caso di processi di Markov a salti, l'argomento è analogo ma si basa sulla formula per la "densità" di probabilità di un cammino.

- Presentiamo solo la stima di massima verosimiglianza. Si consideri un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \ldots x_n)$ che rimane per un tempo t_1 nello stato x_0, t_2 nello stato x_1 ecc., e si supponga di osservare $X = \gamma$, ossia tutta la traiettoria da $X_0 = x_0$ fino a $X_{t_1+\ldots+t_n} = x_n$.

Processi di Markov a salti

Nel caso di processi di Markov a salti, l'argomento è analogo ma si basa sulla formula per la "densità" di probabilità di un cammino.

- Presentiamo solo la stima di massima verosimiglianza. Si consideri un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \dots x_n)$ che rimane per un tempo t_1 nello stato x_0, t_2 nello stato x_1 ecc., e si supponga di osservare $X = \gamma$, ossia tutta la traiettoria da $X_0 = x_0$ fino a $X_{t_1+\ldots+t_n} = x_n$.
- La verosimiglianza per L è (analoga alla $Q\gamma$)

$$\prod_{k=1}^{n} \exp\left(t_k \underbrace{L_{x_{k-1}\to x_{k-1}}}_{= i\in E}\right) L_{\underset{= i}{x_{k-1}}\to \underset{= j}{x_k}} = \prod_{i\in E} \exp\left(\gamma_{i\to i} L_{i\to i}\right) \prod_{i\neq j\in E} L_{i\to j}^{\gamma_{i\to j}}$$

dove $\gamma_{i\to j}$ per $i \neq j$ è come prima ma $\gamma_{i\to i}$ è il tempo totale trascorso dal cammino nello stato $i \in E$.

Massimizzazione

$$L_{i\to i} = -\sum_{j\neq i} L_{i\to j} \quad \text{per ogni } i \in E$$

Eliminiamo il vincolo che la somma sulle righe di L è nulla:

$$\exp\left(\gamma_{i\to i}\overbrace{L_{i\to i}}\right) = \exp\left(-\gamma_{i\to i}\sum_{j\neq i} L_{i\to j}\right).$$

- Passando ai logaritmi e derivando si ottiene che $\mathcal{L}_{MLE}$ è data dall'espressione, per $i \neq j$,

numero di salti

$$\boxed{L_{i\to j} = \frac{\gamma_{i\to j}}{\gamma_{i\to i}}.}$$

tempo

$$L_{i\to i} = -\sum_{j\neq i} L_{i\to j} = -\frac{\#\text{visite in } i}{\text{tempo in } i}$$

Modelli nascosti

Abbiamo supposto di osservare completamente la catena X in un intervallo (discreto o continuo) di tempi.

- Cosa accade se mancano le osservazioni delle variabili X_k in alcuni tempi?

Modelli nascosti

Abbiamo supposto di osservare completamente la catena X in un intervallo (discreto o continuo) di tempi.

- Cosa accade se mancano le osservazioni delle variabili X_k in alcuni tempi?
- oppure se si osserva solamente una funzione $g(X_k)$ della catena invece, di X_k, o più in generale una funzione $g(X_k, Z_k)$ dove Z è un processo indipendente da X?

Modelli nascosti

Abbiamo supposto di osservare completamente la catena X in un intervallo (discreto o continuo) di tempi.

- Cosa accade se mancano le osservazioni delle variabili X_k in alcuni tempi?
- oppure se si osserva solamente una funzione $g(X_k)$ della catena invece, di X_k, o più in generale una funzione $g(X_k, Z_k)$ dove Z è un processo indipendente da X?
- In questa situazione si parla di modelli di Markov nascosti (in inglese *Hidden Markov Models*, HMM) e la ricostruzione di X_k è il problema del filtraggio.

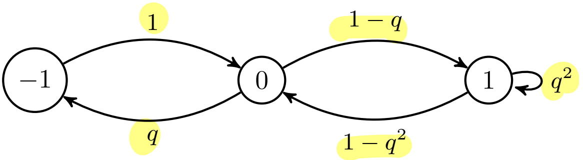
Modelli nascosti

Abbiamo supposto di osservare completamente la catena X in un intervallo (discreto o continuo) di tempi.

- Cosa accade se mancano le osservazioni delle variabili X_k in alcuni tempi?
- oppure se si osserva solamente una funzione $g(X_k)$ della catena invece, di X_k, o più in generale una funzione $g(X_k, Z_k)$ dove Z è un processo indipendente da X?
- In questa situazione si parla di modelli di Markov nascosti (in inglese *Hidden Markov Models*, HMM) e la ricostruzione di X_k è il problema del filtraggio.
- Opportuni algoritmi (EM) permettono di stimare i parametri di un HMM.

Un esempio/esercizio

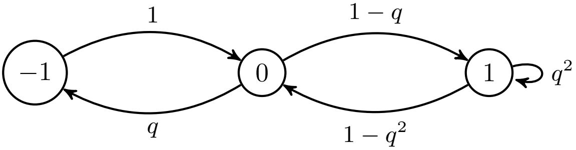
Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura, dove $q \in (0,1)$ è un parametro (non aleatorio).



1. Supponendo che X sia stazionaria, dire al variare di $q \in (0,1)$ se è più probabile che sia $X_0 = 0$ oppure $X_0 \neq 0$.

Un esempio/esercizio

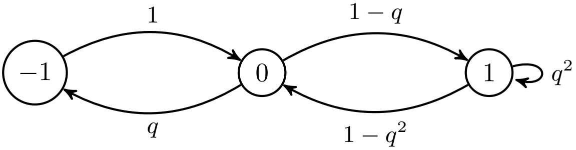
Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura, dove $q \in (0,1)$ è un parametro (non aleatorio).



1. Supponendo che X sia stazionaria, dire al variare di $q \in (0,1)$ se è più probabile che sia $X_0 = 0$ oppure $X_0 \neq 0$.
2. Si supponga noto a priori che $X_0 = 0$. Si osserva il cammino $0 \to -1 \to 0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 1$. Determinare la stima di massima verosimiglianza q_{MLE}.

Un esempio/esercizio

Si consideri una catena di Markov con probabilità di transizione rappresentate in figura, dove $q \in (0,1)$ è un parametro (non aleatorio).



$$Q_\gamma = q \cdot 1 \cdot q \cdot 1 \cdot (1-q)\, q^2$$
$$= q^4 (1-q)$$

1. Supponendo che X sia stazionaria, dire al variare di $q \in (0,1)$ se è più probabile che sia $X_0 = 0$ oppure $X_0 \neq 0$.
2. Si supponga noto a priori che $X_0 = 0$. Si osserva il cammino $0 \to -1 \to 0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 1$. Determinare la stima di massima verosimiglianza q_{MLE}.
3. Si supponga noto a priori che X sia stazionaria. Si osserva lo stesso cammino della domanda di prima. Determinare q_{MLE}.

$$\mu_{-1} = q\mu_0$$

$$\mu_1(1-q^2) = (1-q)\mu_0$$

$$\mu_0 = t$$

$$\left(tq,\ t,\ \frac{1-q}{1-q^2}t\right) = \mu$$

con $t\left(q+1+\frac{1-q}{1-q^2}\right) = 1$

$$t\left(1+q+\frac{\cancel{1-q}}{\cancel{(1-q)}(1+q)}\right) = 1$$

$$t\,\frac{(1+q)^2+1}{1+q} = 1$$

$$t = \frac{1+q}{(1+q)^2+1}$$

1. $P(X_0=0 \mid \text{staz.}) =$

$$= \frac{1+q}{1+(1+q)^2} > \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$2(1+q) > 1+(1+q)^2$$

Esempio di Stima MLE per processi a salti

ON   OFF   SB

$$x_0 = ON \xrightarrow{2} OFF \xrightarrow{1} SB \xrightarrow{3} ON \xrightarrow{2} OFF \xrightarrow{1} SB \xrightarrow{5} OFF$$

1. $$\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$L_{MLE} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/8 & 1/8 & -2/8 \end{pmatrix}$$

La verosimiglianza, noto $X_0 = 0$ è 2γ

ossia $L(q) = 2\gamma = q^4(1-q)$ $\quad q \in (0,1)$

2 $\frac{\partial}{\partial q} L(q) = 4q^3(1-q) - q^4 = 0$

$\Longrightarrow 4(1-q) = q$

$4 = 5q$ $\quad \boxed{q = \frac{4}{5}}$

3. Stavolta

$$L(q; X=\gamma) = P(X_0 = 0 | X \text{ stazionaria}, q) Q_\gamma = \underbrace{\frac{1+q}{2+2q \cancel{+} q^2}}_{``\mu_0''} \overbrace{q^2(1-q)q^2}^{L(q)}.$$

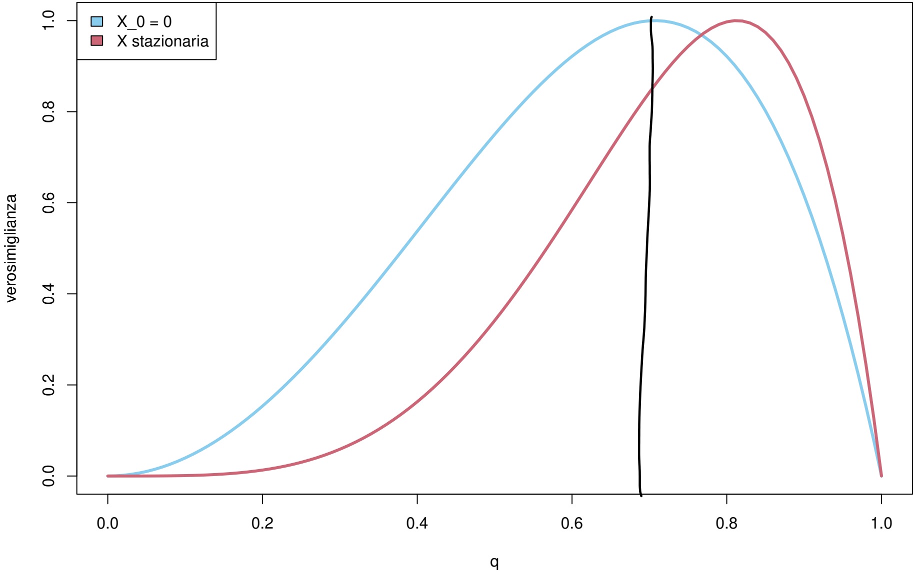
Stimiamo numericamente q_{MLE}.

```r
likelihood_stazionaria = function(q){
  -(1-q^2)*q^4/(2+2*q-q^2)
}

x_mle = nlm(likelihood_stazionaria, 1/2)

x_mle$estimate
```

```
## [1] 0.8129379
```


X_0 = 0
X stazionaria
verosimiglianza
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
q

Section 2

Cenni alla teoria delle code

Introduzione ai modelli di code

La *teoria delle code* studia le linee d'attesa che si possono formare in tante situazioni, ad esempio:

- persone che vogliono accedere ad un servizio (entrare in un negozio, o pagare alla cassa)

Introduzione ai modelli di code

La *teoria delle code* studia le linee d'attesa che si possono formare in tante situazioni, ad esempio:

- persone che vogliono accedere ad un servizio (entrare in un negozio, o pagare alla cassa)
- veicoli che si presentano ad un casello autostradale

Introduzione ai modelli di code

La *teoria delle code* studia le linee d'attesa che si possono formare in tante situazioni, ad esempio:

- persone che vogliono accedere ad un servizio (entrare in un negozio, o pagare alla cassa)
- veicoli che si presentano ad un casello autostradale
- istanze di calcolo che devono essere eseguite da una o più processori in un computer. . .

Introduzione ai modelli di code

La *teoria delle code* studia le linee d'attesa che si possono formare in tante situazioni, ad esempio:

- persone che vogliono accedere ad un servizio (entrare in un negozio, o pagare alla cassa)
- veicoli che si presentano ad un casello autostradale
- istanze di calcolo che devono essere eseguite da una o più processori in un computer...
- L'obiettivo è individuare strategie per migliorare l'esperienza di chi è in attesa (ridurre i tempi) rendendone più efficiente il servizio.

Introduzione ai modelli di code

La *teoria delle code* studia le linee d'attesa che si possono formare in tante situazioni, ad esempio:

- persone che vogliono accedere ad un servizio (entrare in un negozio, o pagare alla cassa)
- veicoli che si presentano ad un casello autostradale
- istanze di calcolo che devono essere eseguite da una o più processori in un computer...
- L'obiettivo è individuare strategie per migliorare l'esperienza di chi è in attesa (ridurre i tempi) rendendone più efficiente il servizio.
- La teoria delle code è un campo molto esteso, presentiamo i modelli più semplici come esempi di processi di Markov a salti.

Clienti e serventi

Per indicare le persone, le auto, le istanze ecc. da servire usiamo il termine **clienti** (in inglese si usa a volte *jobs*)

Usiamo il termine **serventi** (in inglese *servers*) per chi eroga il servizio richiesto dei clienti.

Aspetti da modellizzare:

- l'ingresso di uno o più clienti,

Clienti e serventi

Per indicare le persone, le auto, le istanze ecc. da servire usiamo il termine **clienti** (in inglese si usa a volte *jobs*)

Usiamo il termine **serventi** (in inglese *servers*) per chi eroga il servizio richiesto dei clienti.

Aspetti da modellizzare:

- l'ingresso di uno o più clienti,
- il tempo d'attesa che un servente prenda in carico il compito richiesto,

Clienti e serventi

Per indicare le persone, le auto, le istanze ecc. da servire usiamo il termine **clienti** (in inglese si usa a volte *jobs*)

Usiamo il termine **serventi** (in inglese *servers*) per chi eroga il servizio richiesto dei clienti.

Aspetti da modellizzare:

- l'ingresso di uno o più clienti,
- il tempo d'attesa che un servente prenda in carico il compito richiesto,
- e infine l'uscita dalla coda quando il compito è svolto

Clienti e serventi

Per indicare le persone, le auto, le istanze ecc. da servire usiamo il termine **clienti** (in inglese si usa a volte *jobs*)

Usiamo il termine **serventi** (in inglese *servers*) per chi eroga il servizio richiesto dei clienti.

Aspetti da modellizzare:

- l'ingresso di uno o più clienti,
- il tempo d'attesa che un servente prenda in carico il compito richiesto,
- e infine l'uscita dalla coda quando il compito è svolto
- Una volta introdotto un modello, è di interesse calcolare il tempo medio di attesa, il numero medio di clienti in coda e stimare i parametri di un modello sulla base di quantità osservate nella realtà.

Notazione di Kendall

Kendall propose una notazione abbreviata $A/S/c$:

- A indica un "processo" di arrivo dei clienti,

Notazione di Kendall

Kendall propone una notazione abbreviata $A/S/c$:

- A indica un "processo" di arrivo dei clienti,
- S la legge del tempo di servizio per ciascun cliente,

Notazione di Kendall

Kendall propone una notazione abbreviata $A/S/c$:

- A indica un "processo" di arrivo dei clienti,
- S la legge del tempo di servizio per ciascun cliente,
- c il numero dei serventi.

Notazione di Kendall

Kendall propose una notazione abbreviata $A/S/c$:

- A indica un "processo" di arrivo dei clienti,
- S la legge del tempo di servizio per ciascun cliente,
- c il numero dei serventi.
- Noi studiamo solo i modelli $M/M/c$: arrivi e tempi di servizio sono Markoviani (a tempi continui).

$c = 0$

$c = 1$

$c = \infty$

$\boxed{1 < c < +\infty}$

Notazione di Kendall

Kendall propose una notazione abbreviata $A/S/c$:

- A indica un "processo" di arrivo dei clienti,
- S la legge del tempo di servizio per ciascun cliente,
- c il numero dei serventi.
- Noi studiamo solo i modelli $M/M/c$: arrivi e tempi di servizio sono Markoviani (a tempi continui).
- Formalmente i modelli sono processi di Markov a salti negli stati $E = \mathbb{N}$.

lo stato n rappresenta n persone in coda o servite

Notazione di Kendall

Kendall propose una notazione abbreviata $A/S/c$:

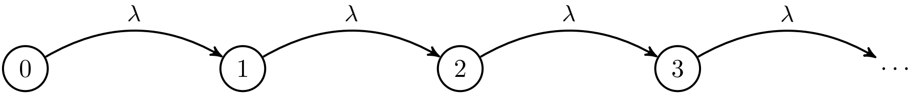
- A indica un "processo" di arrivo dei clienti,
- S la legge del tempo di servizio per ciascun cliente,
- c il numero dei serventi.
- Noi studiamo solo i modelli $M/M/c$: arrivi e tempi di servizio sono Markoviani (a tempi continui).
- Formalmente i modelli sono processi di Markov a salti negli stati $E = \mathbb{N}$.
- Lo stato n indica il numero di clienti in attesa o in corso di servizio.

Caso $M/M/0$: il processo di Poisson

Il modello più semplice è il caso in cui non vi siano serventi (oppure si è interessati solo al processo di arrivo dei clienti): il processo è detto *processo di Poisson* di intensità $\lambda > 0$.

Le intensità di salto sono

$$L_{n\to n+1} = \lambda, \quad L_{n\to n} = -\lambda \quad \text{e} \quad L_{n\to k} = 0 \quad k \neq n,\ k \neq n+1.$$



- Ogni stato è transitorio, non vi sono distribuzioni invarianti.

Legame con la densità Poisson

$P(X=k) = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$ $(\rho > 0)$

Se $X_0 = 0$, allora la densità marginale di X_t è Poisson di intensità λt, ossia

media

$$\boxed{\mu_n^t \propto \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \frac{(t\lambda)^n}{n!} \exp(-t\lambda).}$$

$\rho = \lambda t$

- Basta verificare che valga la *master equation*, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}\mu_n^t = (\mu^t L)_n = \begin{cases} -\lambda \mu_0^t & \text{se } n = 0, \\ \lambda(\mu_{n-1}^t - \mu_n^t) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mu_t = \mu_t L}$$

Legame con la densità Poisson

Se $X_0 = 0$, allora la densità marginale di X_t è Poisson di intensità λt, ossia

$$\mu_n^t \propto \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \frac{(t\lambda)^n}{n!} \exp(-t\lambda).$$

- Basta verificare che valga la *master equation*, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}\mu_n^t = (\mu^t L)(n) = \begin{cases} -\lambda \mu_0^t & \text{se } n = 0, \\ \lambda(\mu_{n-1}^t - \mu_n^t) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

- Calcoliamo quindi

$$\frac{d}{dt} \exp(-t\lambda) \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \begin{cases} -\lambda \exp(-t\lambda) & \text{se } n = 0, \\ \frac{nt^{n-1}\lambda^n}{n!} \exp(-t\lambda) - \lambda \frac{(t\lambda)^n}{n!} \exp(-t\lambda) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Legame con la densità Poisson

Se $X_0 = 0$, allora la densità marginale di X_t è Poisson di intensità λt, ossia

$$\mu_n^t \propto \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \frac{(t\lambda)^n}{n!} \exp(-t\lambda).$$

- Basta verificare che valga la *master equation*, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt}\mu_n^t = (\mu^t L)_n = \begin{cases} -\lambda \mu_0^t & \text{se } n = 0, \\ \lambda(\mu_{n-1}^t - \mu_n^t) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

- Calcoliamo quindi

$$\frac{d}{dt} \exp(-t\lambda) \frac{(t\lambda)^n}{n!} = \begin{cases} -\lambda \exp(-t\lambda) & \text{se } n = 0, \\ \frac{nt^{n-1}\lambda^n}{n!} \exp(-t\lambda) - \lambda \frac{(t\lambda)^n}{n!} \exp(-t\lambda) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

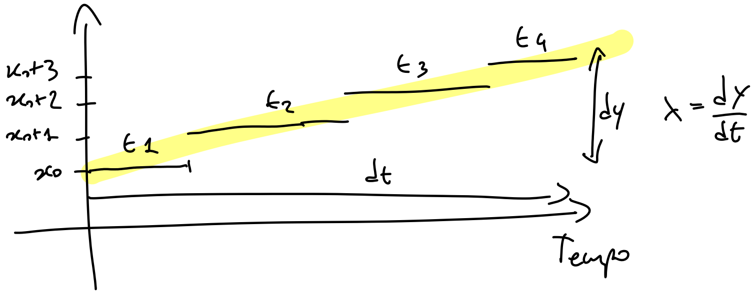
- Per concludere nel caso $n \geq 1$ basta notare che

$$\frac{nt^{n-1}\lambda^n}{n!} \exp(-t\lambda) = \lambda \frac{(t\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-t\lambda) = \lambda \mu_{n-1}^t.$$

Stima del parametro λ dalle osservazioni

Supponiamo di osservare un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$ con tempi di permanenza t_1 (nello stato x_0), t_2 (in x_1), ..., t_n.

- Poiché i salti avvengono solo tra n e $n+1$, deve essere $x_1 = x_0 + 1$, $x_2 = x_0 + 2$, ecc.



Stima del parametro λ dalle osservazioni

Supponiamo di osservare un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$ con tempi di permanenza t_1 (nello stato x_0), t_2 (in x_1), ..., t_n.

- Poiché i salti avvengono solo tra n e $n+1$, deve essere $x_1 = x_0 + 1$, $x_2 = x_0 + 2$, ecc.
- La verosimiglianza è

$$L(\Lambda = \lambda; X = \gamma) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(-\lambda t_k\right)\lambda = \lambda^n \exp\left(-\lambda T\right).$$

dove supponiamo noto a priori che $X_0 = x_0$ e $T = \sum_{k=1}^n t_k$.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \log L(\lambda) = \boxed{\frac{n}{\lambda} - T = 0} \implies \boxed{\lambda = \frac{n}{T}}$$

Stima del parametro λ dalle osservazioni

Supponiamo di osservare un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$ con tempi di permanenza t_1 (nello stato x_0), t_2 (in x_1), ..., t_n.

- Poiché i salti avvengono solo tra n e $n+1$, deve essere $x_1 = x_0 + 1$, $x_2 = x_0 + 2$, ecc.
- La verosimiglianza è

  $$L(\Lambda = \lambda; X = \gamma) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(-\lambda t_k\right) \lambda = \lambda^n \exp\left(-\lambda T\right).$$

  dove supponiamo noto a priori che $X_0 = x_0$ e $T = \sum_{k=1}^n t_k$.
- La stima di massima verosimiglianza si trova annullando la derivata rispetto a λ e vale

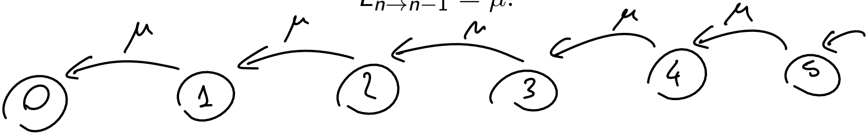
  $$\frac{n}{\lambda_{MLE}} - T = 0 \quad \text{quindi} \quad \lambda_{MLE} = \frac{n}{T}.$$

Code $M/M/1$

Supponiamo vi sia un solo servente e che il tempo di servizio per ciascun cliente sia una variabile esponenziale di parametro μ (ogni cliente sia indipendente dagli altri).

- Per arrivare al modello come un processo di Markov a salti, supponiamo non vi siano arrivi: si salta solo da n verso $n-1$ (se $n \geq 1$) con dei tempi di permanenza esponenziali di parametro μ. Pertanto, se $n \geq 1$,

$$L_{n \to n-1} = \mu.$$



Code $M/M/1$

Supponiamo vi sia un solo servente e che il tempo di servizio per ciascun cliente sia una variabile esponenziale di parametro μ (ogni cliente sia indipendente dagli altri).

- Per arrivare al modello come un processo di Markov a salti, supponiamo non vi siano arrivi: si salta solo da n verso $n-1$ (se $n \geq 1$) con dei tempi di permanenza esponenziali di parametro μ. Pertanto, se $n \geq 1$,

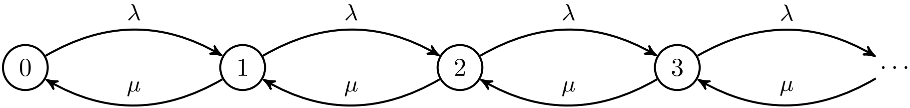
$$\boxed{L_{n\to n-1} = \mu.}$$

- Aggiungiamo gli arrivi come un processo di Poisson di intensità λ: per $n \geq 0$,

$$\boxed{L_{n\to n+1} = \lambda,}$$

  e di conseguenza

$$L_{n\to n} = \begin{cases} -\lambda & \text{se } n = 0 \\ -(\lambda+\mu) & \text{se } n \geq 1, \end{cases}$$



- Ogni stato è ricorrente, ma essendo infiniti stati non è ovvio che esista una distribuzione invariante.

$\lambda, \mu > 0$ Processo a salti irriducibile

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"]
\end{tikzcd}
$$

- Ogni stato è ricorrente, ma essendo infiniti stati non è ovvio che esista una distribuzione invariante.
- Vi è una competizione tra il tasso di arrivo λ e di uscita μ.

$\mu >> \lambda$ OK | $\mu << \lambda$ No distr. inv.

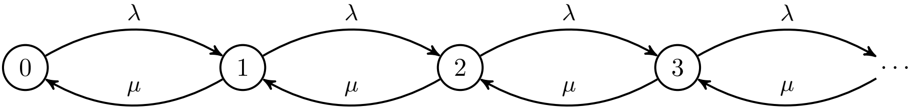
$\pi_0 \cdot \lambda = \pi_1 \cdot \mu$ $\qquad \pi = (\pi_n)_{n=0}^{+\infty}$

$\pi_1 = \pi_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

$\pi_1(\lambda+\mu) = \pi_0 \cdot \lambda + \pi_2 \cdot \mu \implies \pi_1 \lambda = \pi_2 \mu \implies \pi_2 = \pi_1 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

$\vdots$

$\pi_n(\lambda+\mu) = \pi_{n-1} \cdot \lambda + \pi_{n+1} \mu \implies \pi_n = \pi_{n-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$



- Ogni stato è ricorrente, ma essendo infiniti stati non è ovvio che esista una distribuzione invariante.
- Vi è una competizione tra il tasso di arrivo λ e di uscita μ.
- Risolvendo l'equazione $\pi L = 0$ (o imponendo il bilancio di flusso) si trova

$$\pi_n \propto \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n .$$

densità geometrica di parametro $1 - \frac{\lambda}{\mu} \in (0,1)$

$\Longrightarrow \frac{\lambda}{\mu} \in (0,1) \Longrightarrow \boxed{\lambda < \mu}$

$P(X = n) = (1-p)^n \cdot p$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"]
\end{tikzcd}
$$

- Ogni stato è ricorrente, ma essendo infiniti stati non è ovvio che esista una distribuzione invariante.
- Vi è una competizione tra il tasso di arrivo λ e di uscita μ.
- Risolvendo l'equazione $\mu L = 0$ (o imponendo il bilancio di flusso) si trova

$$\mu_n \propto \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n .$$

- Per garantire che μ sia una densità di probabilità, bisogna che

$$\sum_n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n < \infty,$$

ossia che $\lambda < \mu$.

- La distribuzione invariante è *geometrica* di parametro $\boxed{1 - \lambda/\mu,}$ con valor medio

$$\mathbb{E}[N] = \sum_n n\mu_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda},$$

$\mu > \lambda$

ma se $\mu \to \lambda$, $\mathbb{E}[N] \to +\infty$

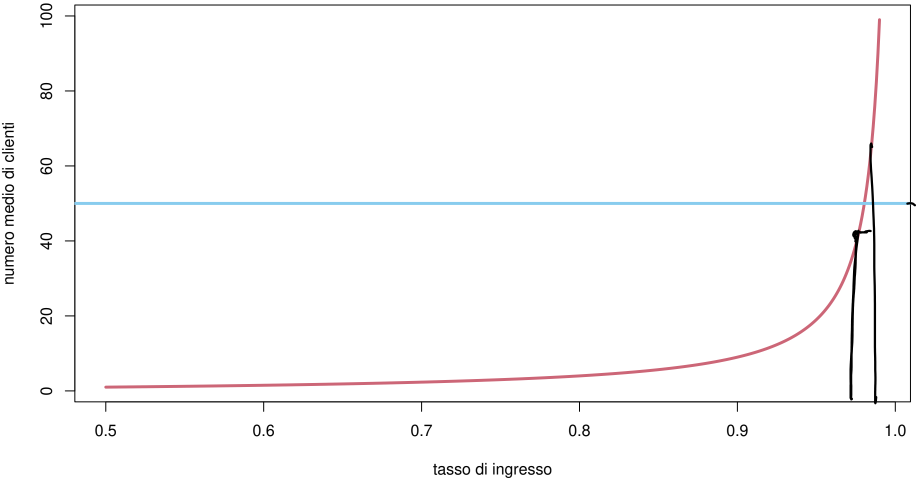


Figure 1: grafico di $\mathbb{E}[N]$ per $\mu = 1$ in funzione di λ (in rosso) e una soglia massima di possibili persone in coda (in azzurro)

Stima dei parametri dalle osservazioni

Stimiamo i parametri (λ, μ) avendo osservato un cammino $\gamma = (n_0 \to n_1 \to \ldots \to n_{\ell-1})$ con i tempi di permanenza t_1, t_2, ..., t_ℓ.

- Poniamo $T = \sum_{k=1}^{\ell} t_i$ e supponiamo inoltre che il cammino osservato non passi mai per lo stato 0.

Stima dei parametri dalle osservazioni

Stimiamo i parametri (λ, μ) avendo osservato un cammino $\gamma = (n_0 \to n_1 \to \ldots \to n_{\ell-1})$ con i tempi di permanenza t_1, t_2, ..., t_ℓ.

- Poniamo $T = \sum_{k=1}^{\ell} t_i$ e supponiamo inoltre che il cammino osservato non passi mai per lo stato 0.
- La verosimiglianza è

$$\boxed{L(\lambda, \mu; X = \gamma) = \exp\left(-(\lambda + \mu) T\right) \lambda^{\gamma_+} \mu^{\gamma_-},}$$

  dove γ_+ indica il numero di arrivi osservati in γ (ossia transizioni da uno stato n a $n+1$), mentre γ_- il numero di uscite.

Stima dei parametri dalle osservazioni

Stimiamo i parametri (λ, μ) avendo osservato un cammino $\gamma = (n_0 \to n_1 \to \ldots \to n_{\ell-1})$ con i tempi di permanenza t_1, t_2, ..., t_ℓ.

- Poniamo $T = \sum_{k=1}^{\ell} t_i$ e supponiamo inoltre che il cammino osservato non passi mai per lo stato 0.
- La verosimiglianza è

$$L(\lambda, \mu; X = \gamma) = \exp\left(-(\lambda + \mu) T\right) \lambda^{\gamma_+} \mu^{\gamma_-},$$

  dove γ_+ indica il numero di arrivi osservati in γ (ossia transizioni da uno stato n a $n+1$), mentre γ_- il numero di uscite.
- La stima di massima verosimiglianza è

$$\boxed{\lambda_{MLE} = \frac{\gamma_+}{T}, \quad \mu_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T - t_0}}$$

t_0 = tempo trascorso in $\underline{\underline{0}}$

Se il cammino osservato trascorre un tempo T_0 nello stato 0, l'espressione per la verosimiglianza cambia: al posto di $-(\lambda + \mu)T$ si trova $-\lambda T - \mu(T - T_0)$

- λ_{MLE} non cambia, invece

$$\mu_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T - T_0}.$$

Se il cammino osservato trascorre un tempo T_0 nello stato 0, l'espressione per la verosimiglianza cambia: al posto di $-(\lambda+\mu)T$ si trova $-\lambda T - \mu(T - T_0)$

- λ_{MLE} non cambia, invece

$$\mu_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T - T_0}.$$

- Intepretazione: il tempo in cui la coda è vuota non si può usare per stimare il tasso di uscita.

Se il cammino osservato trascorre un tempo T_0 nello stato 0, l'espressione per la verosimiglianza cambia: al posto di $-(\lambda+\mu)T$ si trova $-\lambda T - \mu(T - T_0)$

- λ_{MLE} non cambia, invece
$$\mu_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T - T_0}.$$
- Intepretazione: il tempo in cui la coda è vuota non si può usare per stimare il tasso di uscita.
- *Esempio*: In un intervallo di 10 minuti si osservano 5 persone arrivare alla cassa di un supermercato e 3 persone uscirne. Supponendo che la cassa non sia mai senza lavoro si stimano i parametri $\lambda = 1/2$ persone al minuto, $\mu = 3/10$ persone al minuto. Se invece la cassa è rimasta priva di persone in coda per 4 minuti, si stima $\mu = 3/6 = 1/2$ persone al minuto.

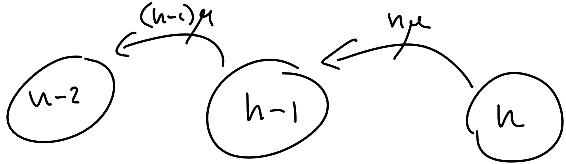
Code $M/M/\infty$

<u>Esercizio</u> Se T_1, T_2 v.a. esponenziali indipendenti di par μ

$$\Longrightarrow Z = \min\{T_1, T_2\} \text{ è } Exp(2\mu)$$

Consideriamo la situazione con un numero arbitrariamente grande, idealmente infinito, di serventi ($M/M/\infty$).

- Il tempo di servizio per ciascun cliente sia una variabile esponenziale di parametro μ (e ogni cliente sia indipendente dagli altri).



$$\min\{T_1, T_2, T_3, T_4, \dots, T_n\} \sim Exp(n\mu)$$

Code $M/M/\infty$

Consideriamo la situazione con un numero arbitrariamente grande, idealmente infinito, di serventi ($M/M/\infty$).

- Il tempo di servizio per ciascun cliente sia una variabile esponenziale di parametro μ (e ogni cliente sia indipendente dagli altri).
- Per arrivare al modello , consideriamo il caso in cui non vi siano arrivi: si osservano salti da n a $n-1$ con dei tempi di permanenza dati dal minimo di n variabili aleatorie esponenziali indipendenti tra loro (la transizione avviene appena il cliente che impega meno tempo tra gli n in servizo lascia la coda).

Esercizio: il minimo di n variabili esponenziali indipendenti, tutte di parametro μ, ha densità esponenziale di parametro $n\mu$.

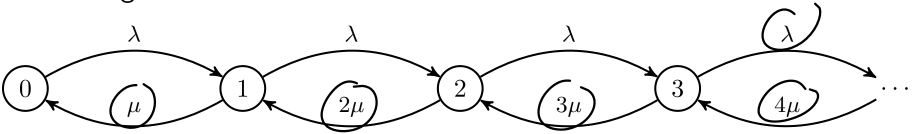
Pertanto, si avrà (se $n \geq 1$)

$$L_{n \to n-1} = n\mu.$$

Nel caso in cui vi siano arrivi con un processo di Poisson di intensità λ, poniamo, per $n \geq 0$,

$$L_{n \to n+1} = \lambda,$$

e di conseguenza



$\boxed{\lambda < n\mu}$ per n grande

$\implies$ esiste distr. invariante

Distribuzione invariante

Come nel caso $M/M/1$, ogni stato è ricorrente.

- La competizione tra il tasso di arrivo λ e di uscita μ, è “smorzata” dal fatto che per n abbastanza grande si ha comunque $\lambda < n\mu$.

Distribuzione invariante

Come nel caso $M/M/1$, ogni stato è ricorrente.

- La competizione tra il tasso di arrivo λ e di uscita μ, è "smorzata" dal fatto che per n abbastanza grande si ha comunque $\lambda < n\mu$.
- Infatti una distribuzione invariante esiste sempre: risolvendo il sistema $\mu L = 0$ si trova una densità di Poisson di parametro λ/μ:

$$\boxed{\mu_n \propto \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.}$$

Stima dei parametri dalle osservazioni

Come nel caso $M/M/1$, per stimare (λ, μ) sulla base dell'osservazione di un cammino $\gamma = (n_0 \to n_1 \to \ldots \to n_\ell)$ con i tempi di permanenza t_1, t_2, ..., t_ℓ scriviamo la verosimiglianza:

$$L(\lambda, \mu; X = \gamma) \propto \exp\left(-\lambda T - \mu T_\gamma\right)\right) \lambda^{\gamma_+} \mu^{\gamma_-},$$

dove $T = \sum_{k=1}^{\ell} t_i$, γ_+ e γ_- sono come nel caso $M/M/1$.

Il termine nuovo è

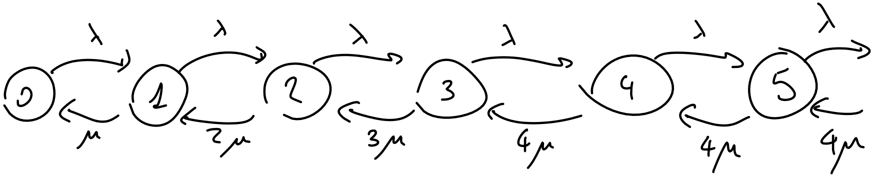
$$T_\gamma = \sum_{k=1}^{\ell} t_i n_i,$$

(il tempo totale trascorso da tutti i clienti osservati nella coda). La stima di massima verosimiglianza è è

$$\lambda_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T}, \quad \mu_{MLE} = \frac{\gamma_-}{T_\gamma}.$$

Il caso $M/M/c$

$c = 4$



Il caso $M/M/c$ con $2 \leq c < \infty$ è intermedio tra i gli estremi che abbiamo considerato.

- Una distribuzione invariante esiste se e solo se $\lambda < c\mu$, ma le formule sono meno eleganti.