Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 17

Dario Trevisan

20/11/2023

Section 1

Problemi vari

Problema 1

Si consideri una catena di Markov sugli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avente matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Classificare gli stati, determinare tutte le classi chiuse (dire quali sono irriducibili).

Problema 1

Si consideri una catena di Markov sugli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avente matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Classificare gli stati, determinare tutte le classi chiuse (dire quali sono irriducibili).
2. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. La catena è regolare?

Problema 1

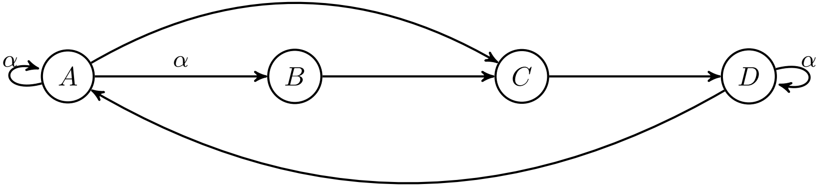
Si consideri una catena di Markov sugli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avente matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Classificare gli stati, determinare tutte le classi chiuse (dire quali sono irriducibili).
2. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. La catena è regolare?
3. Si supponga inizialmente che $P(X_0 = i) \propto i$. Avendo osservato $X_3 = 3$, determinare la stima di massimo a posteriori per X_0.

Problema 2

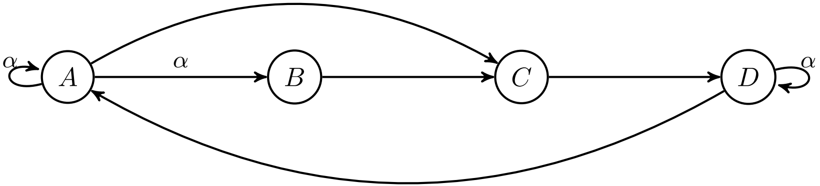
Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione in figura, dove $\alpha \in [0, 1/2]$ è un parametro.



1. Al variare di α, classificare gli stati, determinare le classi chiuse irriducibili della catena (dire se sono regolari), e calcolare le distribuzioni invarianti (come funzione di α)

Problema 2

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ con matrice di transizione in figura, dove $\alpha \in [0, 1/2]$ è un parametro.



1. Al variare di α, classificare gli stati, determinare le classi chiuse irriducibili della catena (dire se sono regolari), e calcolare le distribuzioni invarianti (come funzione di α)
2. Si supponga che la catena si stazionaria. Si osserva poi che $X_4 \in \{C, D\}$ e $X_5 = D$. È possibile stimare α?

Problema 3

Aldo partecipa al seguente gioco. Egli ha a davanti a sé tre urne, dall'esterno identiche, contenenti

- una (A) 2 palline colorate di rosso,

Aldo ignora inizialmente però quale urna sia la A, quale la B e quale la C.

Aldo può effettuare due estrazioni in sequenza (anche eventualmente con rimpiazzo) scegliendo ogni volta l'urna che preferisce (nella seconda estrazione può tenere conto del colore estratto nella prima), e vince il gioco qualora abbia estratto due palline di colore diverso.

Problema 3

Aldo partecipa al seguente gioco. Egli ha a davanti a sé tre urne, dall'esterno identiche, contenenti

- una (A) 2 palline colorate di rosso,
- una (B) 2 palline blu

Aldo ignora inizialmente però quale urna sia la A, quale la B e quale la C.

Aldo può effettuare due estrazioni in sequenza (anche eventualmente con rimpiazzo) scegliendo ogni volta l'urna che preferisce (nella seconda estrazione può tenere conto del colore estratto nella prima), e vince il gioco qualora abbia estratto due palline di colore diverso.

Problema 3

Aldo partecipa al seguente gioco. Egli ha a davanti a sé tre urne, dall'esterno identiche, contenenti

- una (A) 2 palline colorate di rosso,
- una (B) 2 palline blu
- una (C) contenente 1 pallina rossa e una blu.

Aldo ignora inizialmente però quale urna sia la A, quale la B e quale la C.

Aldo può effettuare due estrazioni in sequenza (anche eventualmente con rimpiazzo) scegliendo ogni volta l'urna che preferisce (nella seconda estrazione può tenere conto del colore estratto nella prima), e vince il gioco qualora abbia estratto due palline di colore diverso.

1. Supponendo che Aldo giochi la strategia “scelgo un’urna a caso ed estraggo con rimpiazzo due palline da tale urna’ ’, calcolare la probabilità che vinca il gioco.

1. Supponendo che Aldo giochi la strategia “scelgo un’urna a caso ed estraggo con rimpiazzo due palline da tale urna' ', calcolare la probabilità che vinca il gioco.
2. Supponendo che Aldo giochi la strategia “scelgo un’urna a caso ed estraggo senza rimpiazzo due palline da tale urna' ', calcolare la probabilità che vinca il gioco.

1. Supponendo che Aldo giochi la strategia "scelgo un'urna a caso ed estraggo con rimpiazzo due palline da tale urna'', calcolare la probabilità che vinca il gioco.
2. Supponendo che Aldo giochi la strategia "scelgo un'urna a caso ed estraggo senza rimpiazzo due palline da tale urna'', calcolare la probabilità che vinca il gioco.
3. Supponendo che Aldo giochi la strategia "scelgo un'urna a caso ed estraggo una pallina, poi estraggo la seconda pallina da una delle rimanenti due urne (scegliendo a caso tra queste)'', calcolare la probabilità che vinca il gioco.

Problema 4

Supponendo che le date dei compleanni siano distribuite uniformemente sui 365 giorni di un anno e persone diverse abbiano giorni di compleanno indipendenti tra loro:

1. Calcolare la probabilità che in un insieme di 3 persone almeno due festeggino il compleanno nello stesso giorno.

Problema 4

Supponendo che le date dei compleanni siano distribuite uniformemente sui 365 giorni di un anno e persone diverse abbiano giorni di compleanno indipendenti tra loro:

1. Calcolare la probabilità che in un insieme di 3 persone almeno due festeggino il compleanno nello stesso giorno.
2. Calcolare la probabilità che in un insieme di 3 persone (diverse da te) almeno una festeggi il compleanno nel tuo stesso giorno.

Problema 4

Supponendo che le date dei compleanni siano distribuite uniformemente sui 365 giorni di un anno e persone diverse abbiano giorni di compleanno indipendenti tra loro:

1. Calcolare la probabilità che in un insieme di 3 persone almeno due festeggino il compleanno nello stesso giorno.
2. Calcolare la probabilità che in un insieme di 3 persone (diverse da te) almeno una festeggi il compleanno nel tuo stesso giorno.
3. Rispondere alle domande precedenti sostituendo a 3 un numero $n \geq 1$ qualsiasi di persone. Per quale n la probabilità del primo quesito diventa 1? e per il secondo quesito?

Problema 5

Per $k \in \{0,1,2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0,\infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0,1,2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.

Problema 5

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.
2. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, posta T_k una variabile aleatoria con densità f_k, calcolare il valor medio di T_k.

Problema 5

Per $k \in \{0, 1, 2\}$, si consideri la funzione $f_k(t)$ definita per $t \in [0, \infty)$

$$f_k(t) = c_k t^k e^{-t}$$

e $f_k(t) = 0$ per $t < 0$, dove $c_k > 0$ è una costante opportuna.

1. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, determinare c_k in modo che f_k sia una densità continua di probabilità.
2. Per ogni $k \in \{0, 1, 2\}$, posta T_k una variabile aleatoria con densità f_k, calcolare il valor medio di T_k.
3. Sia $K \in \{0, 1, 2\}$ una variabile con densità discreta $P(K = k) \propto 1 + k$ e T una variabile tale che, sapendo $K = k$, ha densità f_k. Avendo osservato $T \leq 1$, fornire una stima di K.