Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 16

Dario Trevisan

16/11/2023

Section 1

Distribuzioni invarianti (dimostrazioni)

Teorema di esistenza

Se l'insieme degli stati E di una catena di Markov (o processo di Markov a salti) è finito allora esiste sempre almeno una distribuzione invariante μ.

Dimostrazione

Vediamo la dimostrazione nel caso delle catene di Markov.

- Si consideri una qualsiasi densità discreta μ_0 (come vettore riga).

Dimostrazione

Vediamo la dimostrazione nel caso delle catene di Markov.

- Si consideri una qualsiasi densità discreta μ_0 (come vettore riga).
- Se μ_0 è la densità marginale di una catena di Markov $(X_n)_n$ al tempo $n = 0$, la densità marginale al tempo $k = 0, 1, 2, \ldots$, è

$$\mu_0 Q^k.$$

Dimostrazione

Vediamo la dimostrazione nel caso delle catene di Markov.

- Si consideri una qualsiasi densità discreta μ_0 (come vettore riga).
- Se μ_0 è la densità marginale di una catena di Markov $(X_n)_n$ al tempo $n = 0$, la densità marginale al tempo $k = 0, 1, 2, \ldots$, è

$$\mu_0 Q^k.$$

- Consideriamo le medie

$$\bar{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_0 Q^k,$$

Dimostrazione

Vediamo la dimostrazione nel caso delle catene di Markov.

- Si consideri una qualsiasi densità discreta μ_0 (come vettore riga).
- Se μ_0 è la densità marginale di una catena di Markov $(X_n)_n$ al tempo $n = 0$, la densità marginale al tempo $k = 0, 1, 2, \ldots$, è

$$\mu_0 Q^k.$$

- Consideriamo le medie

$$\bar{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_0 Q^k,$$

- ciascuna $\bar{\mu}_n$ è una densità discreta di probabilità (quindi un vettore a componenti in $[0, 1]$ e a somma 1)

Per il caso vettoriale del teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una *sottosuccessione* $\bar{\mu}_{n_k}$ con $n_k \to \infty$ che converge ad un limite

$$\bar{\mu}_\infty = \lim_{k\to\infty} \bar{\mu}_{n_k},$$

ossia ogni componente del vettore $\bar{\mu}_{n_k}$ converge alla corrispondente componente di $\bar{\mu}_\infty$.

- Anche il limite è una densità discreta di probabilità sugli stati E, perché ciascuna componente del vettore è in $[0, 1]$, essendo limiti di valori compresi tra 0 e 1, e la somma dei limiti delle componenti coincide con il limite della somma, che vale 1.

Per il caso vettoriale del teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una *sottosuccessione* $\bar{\mu}_{n_k}$ con $n_k \to \infty$ che converge ad un limite

$$\bar{\mu}_\infty = \lim_{k\to\infty} \bar{\mu}_{n_k},$$

ossia ogni componente del vettore $\bar{\mu}_{n_k}$ converge alla corrispondente componente di $\bar{\mu}_\infty$.

- Anche il limite è una densità discreta di probabilità sugli stati E, perché ciascuna componente del vettore è in $[0,1]$, essendo limiti di valori compresi tra 0 e 1, e la somma dei limiti delle componenti coincide con il limite della somma, che vale 1.
- Quindi, basta dimostrare che vale

$$\bar{\mu}_\infty = \bar{\mu}_\infty Q.$$

Per ogni n, si ha l'identità

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_n Q &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_0 Q^k\right) Q\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_0 Q^{k+1}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_0 Q^k + \frac{1}{n}\left(\mu_0 Q^{n+1} - \mu_0 Q\right)\\ &= \bar{\mu}_n + \frac{1}{n}\left(\mu_0 Q^{n+1} - \mu_0 Q\right).\end{aligned}$$

Al tendere di $n \to \infty$, il termine

$$\frac{1}{n}\left(\mu_0 Q^{n+1} - \mu_0 Q\right) \to 0$$

è infinitesimo al tendere di $n \to \infty$, perché le componenti del vettore $\mu_0 Q^{n+1}$ sono comprese tra $[0, 1]$, e si divide per n. Ponendo $n = n_k \to \infty$, concludiamo quindi che $\bar{\mu}_\infty$ è una distribuzione invariante.

Il teorema di unicità

Sia Q una matrice di transizione (oppure L di intensità di salto) irriducibile su un insieme di stati E finito. Allora esiste una e una sola distribuzione invariante.

Dimostrazione

Consideriamo solo il caso di matrice Q di transizione. Introduciamo la matrice

$$R = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} Q^n,$$

che è una matrice stocastica e grazie all'ipotesi di irriducibilità vale $R_{xy} > 0$ per ogni $x, y \in E$.

- Se μ è una distribuzione invariante per Q, vale l'identità

$$\mu R = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \mu Q^n = \mu \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \mu,$$

  , ossia μ è distribuzione invariante anche per la matrice di transizione R

Consideriamo una seconda distribuzione invariante $\tilde{\mu}$ e scriviamo la seguente diseguaglianza:

$$
\begin{aligned}
\sum_{x \in E} |\mu_x - \tilde{\mu}_x| &= \sum_{x \in E} \Big| \sum_{y \in E} \mu_y R_{yx} - \sum_{y \in E} \tilde{\mu}_y R_{yx} \Big| \\
&= \sum_{x \in E} \Big| \sum_{y \in E} (\mu_y - \tilde{\mu}_y) R_{yx} \Big| \\
&\leq \sum_{x \in E} \sum_{y \in E} |\mu_y - \tilde{\mu}_y| R_{yx} \\
&= \sum_{y \in E} |\mu_y - \tilde{\mu}_y| \sum_{x \in E} R_{yx} \\
&= \sum_{y \in E} |\mu_y - \tilde{\mu}_y|.
\end{aligned}
$$

Poiché la prima e l'ultima espressione coincidono, devono essere tutte uguaglianze, in particolare quando si stima

$$
\Big| \sum_{y \in E} (\mu_y - \tilde{\mu}_y) R_{yx} \Big| \leq \sum_{y \in E} |\mu_y - \tilde{\mu}_y| R_{yx}.
$$

È noto che la diseguaglianza triangolare tra numeri reali

$$\left|\sum_i z_i\right| \leq \sum_i |z_i|$$

è una uguaglianza se e solo se hanno tutti lo stesso segno, ossia $z_i \geq 0$ per ogni i oppure $z_i \leq 0$ per ogni i.

- Supponiamo che valga, per ogni $y \in E$,

  $$(\mu_y - \tilde{\mu}_y) R_{yx} \geq 0,$$

  essendo $R_{yx} > 0$ si ottiene (dividendo) che $\mu_y \geq \tilde{\mu}_y$ per ogni $y \in E$.

È noto che la diseguaglianza triangolare tra numeri reali

$$|\sum_i z_i| \leq \sum_i |z_i|$$

è una uguaglianza se e solo se hanno tutti lo stesso segno, ossia $z_i \geq 0$ per ogni i oppure $z_i \leq 0$ per ogni i.

- Supponiamo che valga, per ogni $y \in E$,

  $$(\mu_y - \tilde{\mu}_y) R_{yx} \geq 0,$$

  essendo $R_{yx} > 0$ si ottiene (dividendo) che $\mu_y \geq \tilde{\mu}_y$ per ogni $y \in E$.
- Poiché sono entrambe densità di probabilità,

  $$\sum_{y \in E} \mu_y = 1 = \sum_{y \in E} \mu_y,$$

  ne segue che deve valere $\mu_y = \tilde{\mu}_y$.

Section 2

Catene regolari

Sul limite di Q^n per $n \to \infty$

Data una catena di Markov con matrice di tranzione Q su un insieme di stati finito, quando esiste il limite

$$\lim_{n \to \infty} (Q^n)_{ij} ?$$

- Abbiamo ottenuto la scorsa volta i due sistemi di equazioni:

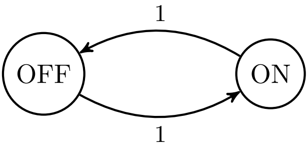
$$Q^\infty = Q^\infty \cdot Q, \qquad Q^\infty_{ij} = \sum_{k \in E} Q^\infty_{ik} Q_{kj}$$

ossia ogni riga di Q^∞ è una distribuzione invariante, e

$$Q^\infty = Q \cdot Q^\infty, \qquad Q^\infty_{ij} = \sum_{k \in E} Q_{ik} Q^\infty_{kj},$$

che permette di determinare completamente Q^∞.

Un esempio in cui il limite Q^∞ non esiste



Catene regolari

Sia Q una matrice di transizione di una catena di Markov su un insieme E di stati finito. Diciamo che Q (o la catena) è **regolare** se

- esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che la potenza Q^n abbia tutte entrate strettamente positive, ossia
$$(Q^n)_{ij} > 0 \quad \text{per ogni } i, j \in E.$$

Catene regolari

Sia Q una matrice di transizione di una catena di Markov su un insieme E di stati finito. Diciamo che Q (o la catena) è **regolare** se

- esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che la potenza Q^n abbia tutte entrate strettamente positive, ossia
$$(Q^n)_{ij} > 0 \quad \text{per ogni } i, j \in E.$$
- Una catena è irriducibile se per ogni $i, j \in E$ esiste un cammino di una lunghezza n che li collega, ossia $(Q^n)_{ij} > 0$.

Catene regolari

Sia Q una matrice di transizione di una catena di Markov su un insieme E di stati finito. Diciamo che Q (o la catena) è **regolare** se

- esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che la potenza Q^n abbia tutte entrate strettamente positive, ossia
$$(Q^n)_{ij} > 0 \quad \text{per ogni } i, j \in E.$$
- Una catena è irriducibile se per ogni $i, j \in E$ esiste un cammino di una lunghezza n che li collega, ossia $(Q^n)_{ij} > 0$.
- Nel caso di catena *regolare*, si richiede che la lunghezza n sia la stessa per tutti gli $i, j \in E$ (anche quando $i = j$).

Catene regolari

Sia Q una matrice di transizione di una catena di Markov su un insieme E di stati finito. Diciamo che Q (o la catena) è **regolare** se

- esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che la potenza Q^n abbia tutte entrate strettamente positive, ossia
$$(Q^n)_{ij} > 0 \quad \text{per ogni } i, j \in E.$$
- Una catena è irriducibile se per ogni $i, j \in E$ esiste un cammino di una lunghezza n che li collega, ossia $(Q^n)_{ij} > 0$.
- Nel caso di catena *regolare*, si richiede che la lunghezza n sia la stessa per tutti gli $i, j \in E$ (anche quando $i = j$).
- *Se la catena è regolare, allora è anche irriducibile*

Un teorema

Sia Q una matrice di transizione *irriducibile* su un insieme di stati E finito. Allora esiste il limite

$$Q^{\infty}_{ij} = \lim_{n\to\infty} (Q^n)_{ij} \quad \text{per ogni } i, j \in E,$$

se e solo se Q è regolare.

- Se Q non è irriducibile, il limite esiste (per ogni $i, j \in E$) *se e solo se* la catena ristretta a ciascuna classe chiusa irriducibile è regolare.

Come verificare che Q sia regolare?

- Una strategia è di moltiplicare Q per se stessa finché le componenti non sono tutte positive.

Come verificare che Q sia regolare?

- Una strategia è di moltiplicare Q per se stessa finché le componenti non sono tutte positive.
- Un metodo più veloce è di considerare solo le potenze di 2, ossia calcolare

$$Q^2 = Q \cdot Q, \quad Q^4 = Q^2 \cdot Q^2, \quad Q^8 = Q^4 \cdot Q^4, \quad \text{ecc.},$$

Come verificare che Q sia regolare?

- Una strategia è di moltiplicare Q per se stessa finché le componenti non sono tutte positive.
- Un metodo più veloce è di considerare solo le potenze di 2, ossia calcolare

$$Q^2 = Q \cdot Q, \quad Q^4 = Q^2 \cdot Q^2, \quad Q^8 = Q^4 \cdot Q^4, \quad \text{ecc.},$$

- **Criterio di regolarità.** Sia Q una matrice di transizione *irriducibile* su un insieme di stati E finito. Se esiste (almeno) uno stato $i \in E$ tale che $Q_{ii} > 0$, allora Q è anche *regolare*.

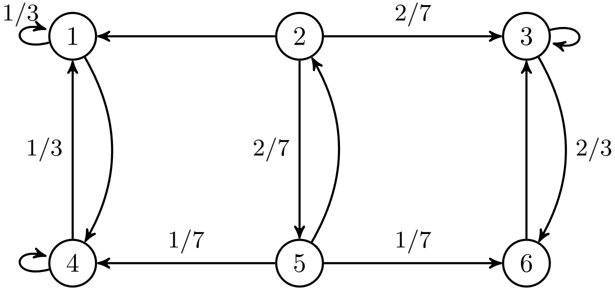
Section 3

Problemi

Problema

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_n$ rappresentata in figura.

1. Classificare gli stati.
2. Determinare tutte le distribuzioni invarianti.
3. Supponendo che $X_0 = 2$ determinare $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1)$



Problema

Si consideri una catena di Markov sugli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avente matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Classificare gli stati, determinare tutte le classi chiuse (dire quali sono irriducibili).

Problema

Si consideri una catena di Markov sugli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avente matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Classificare gli stati, determinare tutte le classi chiuse (dire quali sono irriducibili).
2. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. La catena è regolare?

Problema

Si consideri una catena di Markov sugli stati $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ avente matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Classificare gli stati, determinare tutte le classi chiuse (dire quali sono irriducibili).
2. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti. La catena è regolare?
3. Si supponga inizialmente che $P(X_0 = i) \propto i$. Avendo osservato $X_3 = 3$, determinare la stima di massimo a posteriori per X_0.