Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 15

Dario Trevisan

14/11/2024

Section 1

Richiami e simulazione

Richiami sulle catene di Markov

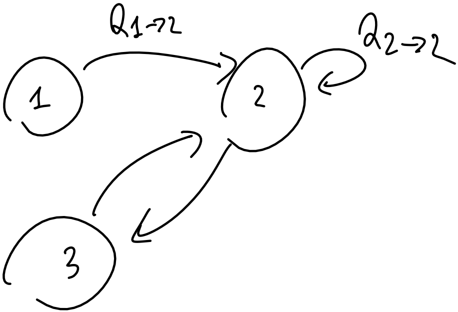
- $(X_n)_{n=0}^{N}$, un processo stocastico a **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.

Richiami sulle catene di Markov

- $(X_n)_{n=0}^N$, un processo stocastico a **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.
- Matrice di transizione $Q_{x \to y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$ (stocastica)

Richiami sulle catene di Markov

- $(X_n)_{n=0}^N$, un processo stocastico a **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.
- Matrice di transizione $Q_{x \to y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$ (stocastica)
- Rappresentazione grafica



Richiami sulle catene di Markov

- $(X_n)_{n=0}^N$, un processo stocastico a **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.
- Matrice di transizione $Q_{x \to y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$ (stocastica)
- Rappresentazione grafica
- Peso di un cammino $\gamma = x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n$,

$$Q_\gamma = Q_{x_0 x_1} Q_{x_1 x_2} \ldots Q_{x_{n-1} x_n}$$

Richiami sulle catene di Markov

- $(X_n)_{n=0}^N$, un processo stocastico a **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.
- Matrice di transizione $Q_{x \to y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$ (stocastica)
- Rappresentazione grafica
- Peso di un cammino $\gamma = x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n$,

$$Q_\gamma = Q_{x_0 x_1} Q_{x_1 x_2} \ldots Q_{x_{n-1} x_n}$$

- Legge del processo

$$P(X = \gamma) = P(X_0 = x_0) Q_\gamma$$

$$P(A) = \sum_{x \in E} P(A | X_0 = x) P(X_0 = x)$$

Richiami sulle catene di Markov

- $(X_n)_{n=0}^N$, un processo stocastico a **tempi discreti, stati discreti, di Markov, omogeneo**.
- Matrice di transizione $Q_{x \to y} = P(X_1 = y | X_0 = x)$ (stocastica)
- Rappresentazione grafica
- Peso di un cammino $\gamma = x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n$,
$$Q_\gamma = Q_{x_0 x_1} Q_{x_1 x_2} \ldots Q_{x_{n-1} x_n}$$
- Legge del processo
$$P(X = \gamma) = P(X_0 = x_0) Q_\gamma$$
- Legge marginale $\mu_n = \mu_{n-1} Q$, da cui $\boxed{\mu_n = \mu_0 Q^n}$.

Richiami sui processi a salti

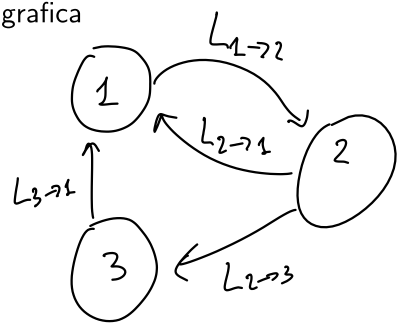
- $(X_t)_{t\in[0,T]}$, un processo stocastico a **tempi continui, stati discreti, di Markov, omogeneo**.

Richiami sui processi a salti

- $(X_t)_{t\in[0,T]}$, un processo stocastico a **tempi continui, stati discreti, di Markov, omogeneo**.
- Matrice di intensità di salto $L_{x\to y} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P(\underline{X_t = y|X_0 = x})$

Richiami sui processi a salti

- $(X_t)_{t\in[0,T]}$, un processo stocastico a **tempi continui, stati discreti, di Markov, omogeneo**.
- Matrice di intensità di salto $L_{x\to y} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P(X_t = y | X_0 = x)$
- Rappresentazione grafica



Richiami sui processi a salti

- $(X_t)_{t\in[0,T]}$, un processo stocastico a **tempi continui, stati discreti, di Markov, omogeneo**.
- Matrice di intensità di salto $L_{x\to y} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P(X_t = y | X_0 = x)$
- Rappresentazione grafica
- *densità* di probabilità di cammino $\gamma = x_0 \stackrel{t_1}{\to} x_1 \stackrel{t_2}{\to} x_2 \ldots \stackrel{t_n}{\to} x_n$,

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(t_k L_{x_{k-1}x_{k-1}}\right) \prod_{k=1}^{n} L_{x_{k-1}x_k}$$

Richiami sui processi a salti

- $(X_t)_{t\in[0,T]}$, un processo stocastico a **tempi continui, stati discreti, di Markov, omogeneo**.
- Matrice di intensità di salto $L_{x\to y} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} P(X_t = y | X_0 = x)$
- Rappresentazione grafica
- *densità* di probabilità di cammino $\gamma = x_0 \xrightarrow{t_1} x_1 \to \ldots \xrightarrow{t_n} x_n$,

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(t_k L_{x_{k-1}x_{k-1}}\right) \prod_{k=1}^{n} L_{x_{k-1}x_k}$$

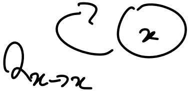
- Legge marginale $\boxed{\mu_t = \mu_0 \exp(tL),}$ da cui la *master equation*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mu_t = \mu_t L.}$$

Simulazione di processi di Markov

- *Catene*: campionare X_0 con probabilità μ_0, poi per $i \geq 0$:

Simulazione di processi di Markov



$T_1 \sim \text{Geom}(1 - Q_{x\to x})$

- *Catene*: campionare X_0 con probabilità μ_0, poi per $i \geq 0$:
  - tempo di permanenza T_i in X_i è v.a. geometrica (modificata) di parametro $1 - Q_{x_i \to x_i}$

Simulazione di processi di Markov

- *Catene*: campionare X_0 con probabilità μ_0, poi per $i \geq 0$:
  - tempo di permanenza T_i in X_i è v.a. geometrica (modificata) di parametro $1 - Q_{x_i \to x_i}$
  - stato al tempo X_{T_i} è scelta con probabilità $\propto Q_{x_i \to y}$, $y \neq x_i$

Simulazione di processi di Markov

- *Catene*: campionare X_0 con probabilità μ_0, poi per $i \geq 0$:
  - tempo di permanenza T_i in X_i è v.a. geometrica (modificata) di parametro $1 - Q_{x_i \to x_i}$
  - stato al tempo X_{T_i} è scelta con probabilità $\propto Q_{x_i \to y}$, $y \neq x_i$
- *Processi a salti*: campionare X_0 con probabilità μ_0, poi per $i \geq 0$:

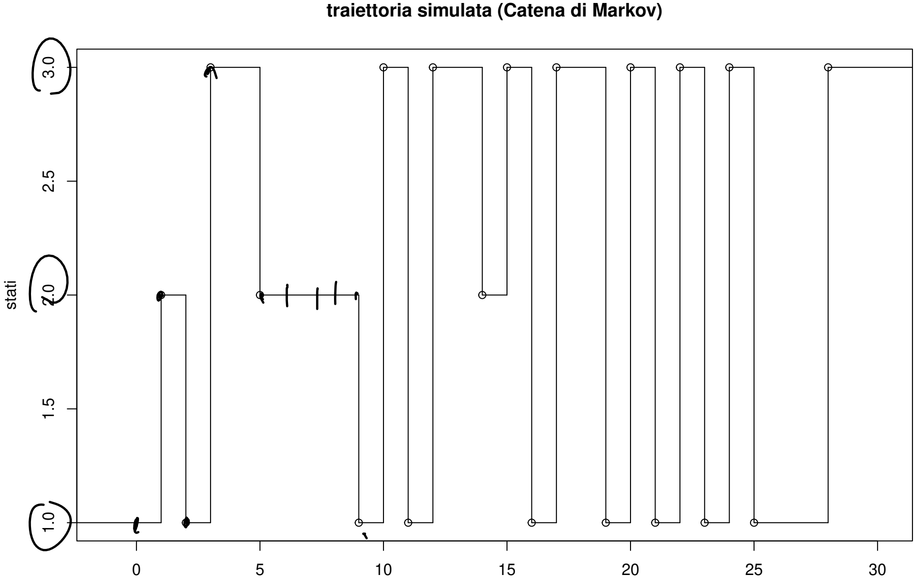
Simulazione di processi di Markov

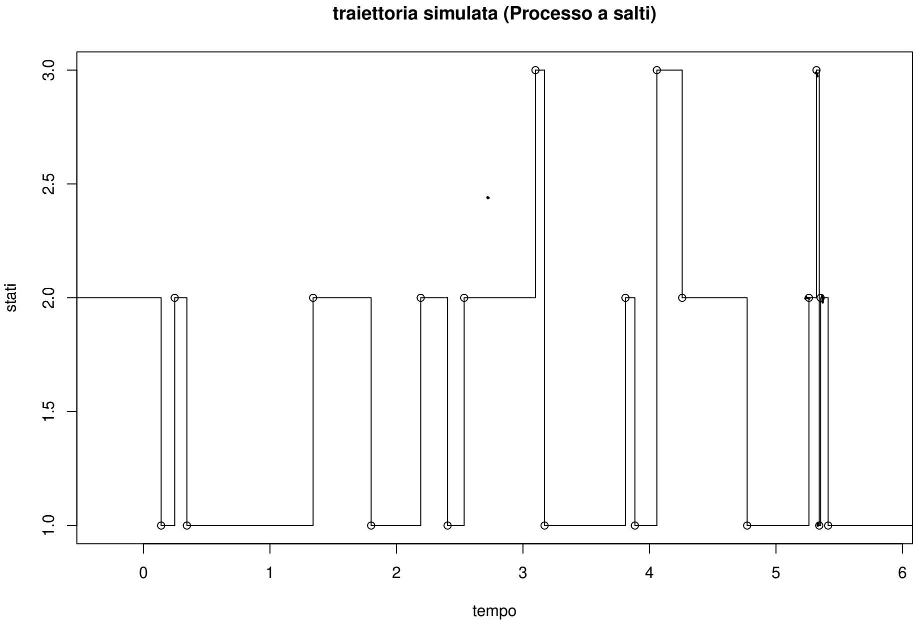
- *Catene*: campionare X_0 con probabilità μ_0, poi per $i \geq 0$:
  - tempo di permanenza T_i in X_i è v.a. geometrica (modificata) di parametro $1 - Q_{x_i \to x_i}$
  - stato al tempo X_{T_i} è scelta con probabilità $\propto Q_{x_i \to y}$, $y \neq x_i$
- *Processi a salti*: campionare X_0 con probabilità μ_0, poi per $i \geq 0$:
  - tempo di permanenza T_i in X_i è v.a. esponenziale di parametro $\underline{-L_{x_i \to x_i}}$

Simulazione di processi di Markov

- *Catene*: campionare X_0 con probabilità μ_0, poi per $i \geq 0$:
  - tempo di permanenza T_i in X_i è v.a. geometrica (modificata) di parametro $1 - Q_{x_i \to x_i}$
  - stato al tempo X_{T_i} è scelta con probabilità $\propto Q_{x_i \to y}$, $y \neq x_i$
- *Processi a salti*: campionare X_0 con probabilità μ_0, poi per $i \geq 0$:
  - tempo di permanenza T_i in X_i è v.a. esponenziale di parametro $-L_{x_i \to x_i}$
  - stato al tempo X_{T_i} è scelta con probabilità $\propto L_{x_i \to y}$, $y \neq x_i$

Esempi


traiettoria simulata (Catena di Markov)
stati
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0
5
10
15
20
25
30


traiettoria simulata (Processo a salti)
stati
tempo
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0
1
2
3
4
5
6

Section 2

Distribuzioni invarianti e stazionarietà

Distribuzione invariante

Gli esempi che abbiamo considerato mostrano che una catena di Markov (o un processo di Markov a salti) tende verso un "equilibrio" in cui le densità marginali sono costanti nel tempo.

- Lo studio delle possibili densità *limite* è particolarmente rilevante.

Distribuzione invariante

Gli esempi che abbiamo considerato mostrano che una catena di Markov (o un processo di Markov a salti) tende verso un "equilibrio" in cui le densità marginali sono costanti nel tempo.

- Lo studio delle possibili densità *limite* è particolarmente rilevante.
- Per definire tali densità, basta considerare rispettivamente l'equazione di evoluzione

$$\mu_n = \mu_{n-1} Q \quad \text{oppure} \quad \frac{d}{dt}\mu_t = \mu_t L,$$

e imporre che la densità marginale *non cambi* nel tempo.

Definizione: caso catene di Markov

Sia Q una matrice di transizione. Si dice che un vettore riga $\mu \in \mathbb{R}^E$ corrispondente ad una densità discreta sull'insieme degli stati,

$$\mu_x \in [0,1] \quad \text{per ogni } x \in E$$

e

$$\sum_{x \in E} \mu_x = 1$$

è una **distribuzione invariante** per Q se vale

$$\mu = \mu Q.$$

Definizione: caso processi di Markov a salti

Sia L una matrice di intensità di salto. Si dice che un vettore riga $\mu \in \mathbb{R}^E$ corrispondente ad una densità discreta sull'insieme degli stati,

$$\mu_x \in [0,1] \quad \text{per ogni } x \in E$$

e

$$\sum_{x \in E} \mu_x = 1$$

è una **distribuzione invariante** per L se vale

$$0 = \mu L.$$

$$L \longleftrightarrow Q - I$$

- μ è invariante se e solo se, qualora si consideri un processo X (catena o a salti) tale che la legge marginale al tempo iniziale sia μ, allora tutte le leggi marginali coincidono con μ.

$$\mu = \mu Q$$

$\forall x \in E$

$$\mu_x = (\mu Q)_x = \sum_{y \in E} \mu_y Q_{y \to x}$$

$$\boxed{\sum_{y \in E} Q_{x \to y} = 1}$$

$$\boxed{\sum_{\substack{y \in E \\ y \neq x}} \mu_x Q_{x \to y} = \sum_{\substack{y \in E \\ y \neq x}} \mu_y Q_{y \to x}}$$

- μ è invariante se e solo se, qualora si consideri un processo X (catena o a salti) tale che la legge marginale al tempo iniziale sia μ, allora tutte le leggi marginali coincidono con μ.
- La condizione di invarianza si può riscrivere anche come (nel caso delle catene) segue: per ogni $x \in E$,

$$\sum_{y \neq x} \mu_x Q_{x \to y} = \sum_{y \neq x} \mu_y Q_{y \to x}.$$

- μ è invariante se e solo se, qualora si consideri un processo X (catena o a salti) tale che la legge marginale al tempo iniziale sia μ, allora tutte le leggi marginali coincidono con μ.
- La condizione di invarianza si può riscrivere anche come (nel caso delle catene) segue: per ogni $x \in E$,

$$\sum_{y \neq x} \mu_x Q_{x \to y} = \sum_{y \neq x} \mu_y Q_{y \to x}.$$

- In questa formulazione il membro a sinistra si interpreta come flusso (di probabilità) uscente dallo stato x, mentre il membro a destra è un flusso entrante. L'equazione esprime quindi un *bilancio di flusso*.

- μ è invariante se e solo se, qualora si consideri un processo X (catena o a salti) tale che la legge marginale al tempo iniziale sia μ, allora tutte le leggi marginali coincidono con μ.

- La condizione di invarianza si può riscrivere anche come (nel caso delle catene) segue: per ogni $x \in E$,

$$\sum_{y \neq x} \mu_x Q_{x \to y} = \sum_{y \neq x} \mu_y Q_{y \to x}.$$

- In questa formulazione il membro a sinistra si interpreta come flusso (di probabilità) uscente dallo stato x, mentre il membro a destra è un flusso entrante. L'equazione esprime quindi un *bilancio di flusso*.

- Nel caso di processi a salti, l'equazione diventa

$$\boxed{\sum_{y \neq x} \mu_x L_{xy} = \sum_{y \neq x} \mu_y L_{yx}.}$$

Stazionarietà e distribuzione invariante

$$0 = \frac{d}{dt}\mu_t = \mu_t L \Rightarrow \mu_t = \mu_0 \quad \text{invariante}$$

È facile vedere che se è stazionario allora le marginali devono essere invarianti. Vale un risultato più preciso.

omogeneo

- Sia X una catena di Markov o un processo di Markov a salti. Allora X è stazionario se e solo se la marginale al tempo iniziale X_0 ha come densità una distribuzione invariante.

$$P(X_{k+1}=y, X_k=x) \overset{?}{=} P(X_1=y, X_0=x)$$

$$P(X_k=x)\,P(X_{k+1}=y \mid X_k=x) \qquad P(X_0=x)\,P(X_1=y \mid X_0=x)$$

Domande fondamentali

- data Q (oppure L) le distribuzioni invarianti esistono sempre?

Domande fondamentali

- data Q (oppure L) le distribuzioni invarianti esistono sempre?
- se sì, quante sono?

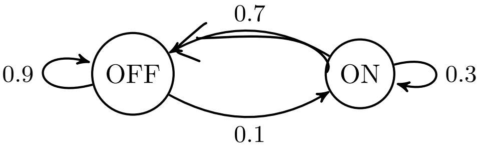
Domande fondamentali

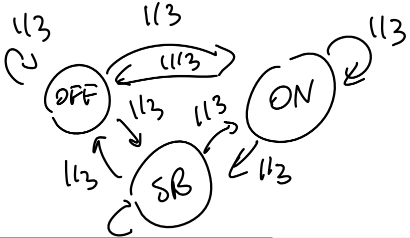
- data Q (oppure L) le distribuzioni invarianti esistono sempre?
- se sì, quante sono? ← unicità / classificazione
- Dal lato pratico è invece importante disporre di algoritmi efficienti per poter calcolare, almeno in modo approssimato, le distribuzioni invarianti.

Teorema di esistenza

Se l'insieme degli stati di una catena di Markov (o processo di Markov a salti) E è $\boxed{\text{finito}}$ allora esiste sempre almeno una distribuzione invariante μ.

Un esempio





Bilancio di flusso $\mu = (\mu_{ON}, \mu_{OFF})$

$$\begin{cases} \mu_{ON} \cdot 0{,}7 = \mu_{OFF} \cdot 0{,}1 \\ \mu_{ON} + \mu_{OFF} = 1 \end{cases}$$

$7\mu_{ON} = \mu_{OFF}$.

$8\mu_{ON} = 1$

$$\boxed{\mu_{ON} = \frac{1}{8} \qquad \mu_{OFF} = \frac{7}{8}}$$

Lo stesso esempio in R

$\boxed{Ax = b}$

$Q^T \mu^T = \mu^T$ $\quad (Q^T - Id)\mu^T = 0$

Il comando $\boxed{\texttt{eigen()}}$ determina autovalori e autovettori di una matrice: in questo caso ci interessano infatti gli autovettori di Q^T con autovalore 1, o equivalentemente gli autovettori di $Id - Q^t$ con autovalore 0 (il nucleo di $Id - Q^T$).

```
## [1] 1.0 0.2
##              [,1]          [,2]
## [1,] 0.9899495 -0.7071068
## [2,] 0.1414214  0.7071068
## [1] 0.875 0.125
```

Caso processo di Markov a salti

Determiniamo le distribuzioni invarianti nel caso della matrice di intensità di salto dell'esempio della lezione precedente.

$E = \{\text{Off}, \text{Standby}, \text{On}\}$, con matrice delle intensità di salto

$$L = \begin{array}{c} \text{OFF} \\ \text{SB} \\ \text{ON} \end{array} \begin{pmatrix} * & 5 & 10 \\ 1 & * & 3 \\ 0 & 4 & * \end{pmatrix}.$$

Bilancio in OFF $\quad \mu_{OFF}\, 15 = \mu_{SB}$

SB $\quad \mu_{OFF} \cdot 55 = \quad + \mu_{ON} \cdot 4$

$\mu_{ON} + \mu_{OFF} + \mu_{SB} = 1$

$\mu L = 0$ $\qquad$ $L^T \mu^T = 0$

```
## [1] -1.514005e+01 -7.859945e+00  8.881784e-16
##                [,1]        [,2]        [,3]
## [1,]  0.7539667 -0.09196364 -0.04908437
## [2,] -0.1055968 -0.65662548 -0.73626560
## [3,] -0.6483699  0.74858912 -0.67491013
## [1] 0.03361345 0.50420168 0.46218487
```

Attenzione!

$$\{\text{autovalori di } Q\} = \{\text{autovalori di } Q^T\}$$

Non confondete l'equazione $\mu(Id - Q) = 0$, oppure $\mu L = 0$ con le equazioni $(Id - Q)v = 0$ o $Lv = 0$.

- Infatti queste ultime hanno sempre come soluzione la densità uniforme $v_x = 1/d$, dove d è il numero degli elementi di E.

$$Q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q \ \underline{\text{stocastica}}$$

Attenzione!

Non confondete l'equazione $\mu(Id - Q) = 0$, oppure $\mu L = 0$ con le equazioni $(Id - Q)v = 0$ o $Lv = 0$.

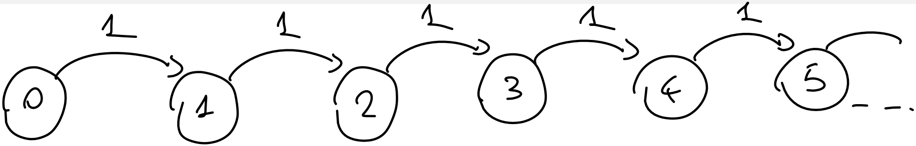
- Infatti queste ultime hanno sempre come soluzione la densità uniforme $v_x = 1/d$, dove d è il numero degli elementi di E.
- Se non si specifica l'operazione di trasposizione si trova sempre tale soluzione, che però non è quella cercata.

Attenzione!

Non confondete l'equazione $\mu(Id - Q) = 0$, oppure $\mu L = 0$ con le equazioni $(Id - Q)v = 0$ o $Lv = 0$.

- Infatti queste ultime hanno sempre come soluzione la densità uniforme $\boxed{v_x = 1/d,}$ dove d è il numero degli elementi di E.
- Se non si specifica l'operazione di trasposizione si trova sempre tale soluzione, che però non è quella cercata.
- Se la matrice Q è *bistocastica* allora μ uniforme è distribuzione invariante. Un caso particolare è quando Q sia simmetrica.

Cosa accade con infiniti stati? $E = \mathbb{N}$



$$
\left.
\begin{aligned}
&\mu_0 \cdot 1 = 0\\
&\mu_1 \cdot 1 = \mu_0 \cdot 1 = 0\\
&\vdots\\
&\mu_n \cdot 1 = \mu_{n-1} \cdot 1 = 0
\end{aligned}
\right\}
\quad \mu_n = 0 \text{ per ogni } n
$$

ma $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n = 1$ NON $\underline{\underline{\text{vale}}}$

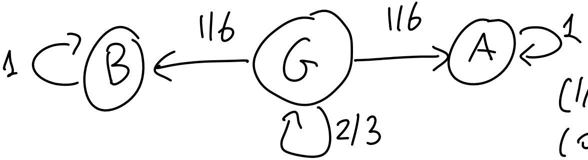
Section 3

Distribuzioni invarianti: classificazione

Un gioco

Alice e Bruno consiste lanciano un dado ripetutamente fintanto che non esca il numero 1 (e in tal caso vince Alice) oppure il numero 6 (e e in tal caso vince Bob).

- Possiamo rappresentare una partita tramite una catena di Markov sugli stati $E = \{A, G, B\}$, dove A indica che Alice ha vinto, B Bruno ha vinto, e G il gioco continua (si deve lanciare nuovamente il dado).



$(1/2, 0, 1/2)$

$(0, 0, 1)$

$(1, 0, 0)$

Vi sono almeno due distribuzioni stazionarie, corrispondenti rispettivamente al caso in cui Alice vinca, $\mu_A = (1,0,0)$ oppure Bruno vinca, $\mu_B = (0,0,1)$.

- Ma in realtà sono infinite, perché ogni combinazione

$$\alpha\mu_A + (1-\alpha)\mu_B = (\alpha, 0, 1-\alpha), \quad \text{con } \alpha \in [0,1]$$

è pure una distribuzione invariante (corrispondente al fatto che Alice vinca con probabilità α e Bruno con probabilità $1-\alpha$).

Se la catena di Markov al tempo iniziale si trova in G, la densità limite sarà corrispondente ad $\alpha = 1/2$, perché le regole del gioco non favoriscono né Alice né Bruno.

Classificazione degli stati

Data una matrice di transizione Q, si dice che lo stato $y \in E$ è **accessibile** (o raggiungibile) da $x \in E$ se esiste un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$ con $x_0 = x$ e $x_n = y$ e peso strettamente positivo:

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n} Q_{x_{k-1}x_k} > 0.$$

- Nel caso di una matrice di intensità di salto L, il peso Q_γ va sostituito con

$$L_\gamma = \prod_{k=1}^{n} L_{x_{k-1}x_k} > 0$$

Classificazione degli stati

Data una matrice di transizione Q, si dice che lo stato $y \in E$ è **accessibile** (o raggiungibile) da $x \in E$ se esiste un cammino $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_n)$ con $x_0 = x$ e $x_n = y$ e peso strettamente positivo:

$$Q_\gamma = \prod_{k=1}^{n} Q_{x_{k-1}x_k} > 0.$$

- Nel caso di una matrice di intensità di salto L, il peso Q_γ va sostituito con
$$L_\gamma = \prod_{k=1}^{n} L_{x_{k-1}x_k}.$$
- Q^n_{xy} è la somma dei pesi di tutti i cammini lunghi n che collegano x a y: y è raggiungibile da x se esiste $n \geq 1$ tale che $Q^n_{xy} > 0$.

ok $x \rightsquigarrow y \quad y \rightsquigarrow z \implies x \rightsquigarrow z$

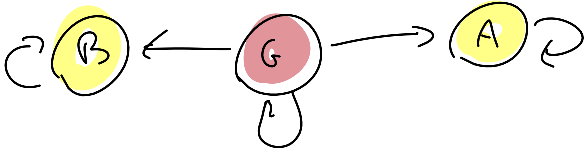
?? $x \rightsquigarrow y \implies y \rightsquigarrow x$

Se $y \in E$ è raggiungibile da $x \in E$, e $z \in E$ è raggiungibile da y, allora z è raggiungibile da x.

- Non è detto che anche x sia raggiungibile da y: se questo appunto non accade, lo stato x è detto **transitorio**: uno stato transitorio è tale che esista y raggiungibile da x ma x non è raggiungibile da y.

Se $y \in E$ è raggiungibile da $x \in E$, e $z \in E$ è raggiungibile da y, allora z è raggiungibile da x.

- Non è detto che anche x sia raggiungibile da y: se questo appunto non accade, lo stato x è detto **transitorio**: uno stato transitorio è tale che esista y raggiungibile da x ma x non è raggiungibile da y.
- Se x non è transitorio, è detto **ricorrente**.

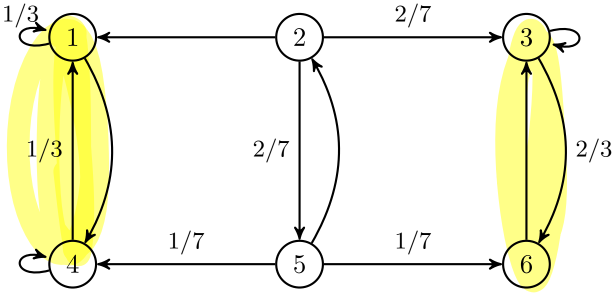


Se $y \in E$ è raggiungibile da $x \in E$, e $z \in E$ è raggiungibile da y, allora z è raggiungibile da x.

- Non è detto che anche x sia raggiungibile da y: se questo appunto non accade, lo stato x è detto **transitorio**: uno stato transitorio è tale che esista y raggiungibile da x ma x non è raggiungibile da y.
- Se x non è transitorio, è detto **ricorrente**.
- Se l'insieme degli stati E è finito, non possono essere tutti transitori, deve esserci almeno uno stato ricorrente.

Un esempio

2 è transitorio 5 transitorio



Classi chiuse

Un sottoinsieme $C \subseteq E$ di stati è detto **classe chiusa** se, per ogni $x \in C$ e $y \in E$ raggiungibile da x, anche $y \in C$.

- Una classe chiusa C è detta **irriducibile** se non contiene altre classi chiuse $C' \subseteq C$ (diverse dai casi banali $C' = \emptyset$ oppure $C' = C$ stessa).

Classi chiuse

Un sottoinsieme $C \subseteq E$ di stati è detto **classe chiusa** se, per ogni $x \in C$ e $y \in E$ raggiungibile da x, anche $y \in C$.

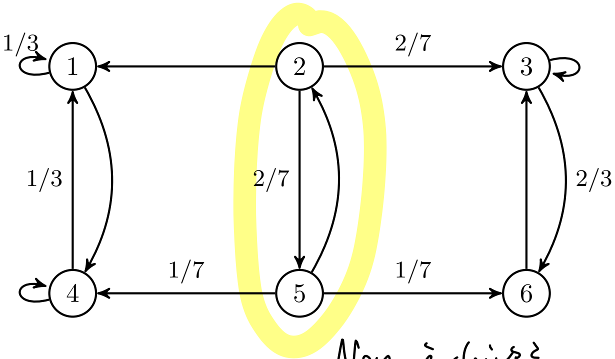
- Una classe chiusa C è detta **irriducibile** se non contiene altre classi chiuse $C' \subseteq C$ (diverse dai casi banali $C' = \emptyset$ oppure $C' = C$ stessa).
- La matrice Q (oppure L) è detta **irriducibile** se tutto l'insieme degli stati E è una classe chiusa irriducibile.

Da uno stato in una classe chiusa non è possibile raggiungere stati al di fuori di essa (mentre è possibile entrarvi)

- una classe chiusa è irriducibile quando da ogni stato in essa si può raggiungere qualsiasi altro stato in essa.

Da uno stato in una classe chiusa non è possibile raggiungere stati al di fuori di essa (mentre è possibile entrarvi)

- una classe chiusa è irriducibile quando da ogni stato in essa si può raggiungere qualsiasi altro stato in essa.
- Data una classe chiusa è ben definita la *restrizione* della matrice Q su $C \times C$, perché $Q_{x \to y} = 0$ per $x \in C$ e $y \notin C$, e quindi $(Q_{x \to y})_{y \in C}$ sono densità discrete di probabilità (la somma delle righe vale ancora 1). Un ragionamento analogo vale nel caso di matrici di intensità di salto L.



Non è chiusa

Il teorema di unicità

Sia Q una matrice di transizione (oppure L di intensità di salto) irriducibile su un insieme di stati E finito. Allora esiste una e una sola distribuzione invariante.

Classificazione delle distribuzioni invarianti

Se E è finito, si può sempre partizionare in insiemi a due a due disgiunti

$$E = \{\text{stati transitori}\} \cup C^1 \cup C^2 \cup \ldots \cup C^k,$$

dove le C^i sono classi chiuse irriducibili.

- Consideriamo la restrizione di Q su ciascuna classe chiusa irriducibile C^i: esiste una e una sola distribuzione invariante associata μ^i,

Classificazione delle distribuzioni invarianti

Se E è finito, si può sempre partizionare in insiemi a due a due disgiunti

$$E = \{\text{stati transitori}\} \cup C^1 \cup C^2 \cup \ldots \cup C^k,$$

dove le C^i sono classi chiuse irriducibili.

- Consideriamo la restrizione di Q su ciascuna classe chiusa irriducibile C^i: esiste una e una sola distribuzione invariante associata μ^i,
- Si può dimostrare (non lo faremo) che **tutte** le distribuzioni invarianti sono ottenibili come combinazioni

$$\mu = \alpha_1 \mu^1 + \alpha_2 \mu^2 + \ldots, + \alpha_k \mu^k,$$

dove α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in [0, 1]$ sono tali che

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1.$$

Classificazione delle distribuzioni invarianti

Se E è finito, si può sempre partizionare in insiemi a due a due disgiunti

$$E = \{\text{stati transitori}\} \cup C^1 \cup C^2 \cup \ldots \cup C^k,$$

dove le C^i sono classi chiuse irriducibili.

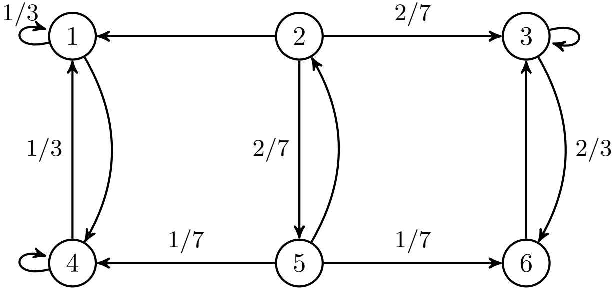
- Consideriamo la restrizione di Q su ciascuna classe chiusa irriducibile C^i: esiste una e una sola distribuzione invariante associata μ^i,
- Si può dimostrare (non lo faremo) che **tutte** le distribuzioni invarianti sono ottenibili come combinazioni

  $$\mu = \alpha_1 \mu^1 + \alpha_2 \mu^2 + \ldots, + \alpha_k \mu^k,$$

  dove α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in [0, 1]$ sono tali che

  $$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1.$$

- In particolare ogni distribuzione invariante è nulla sugli stati transitori.


1/3
1
2
2/7
3
1/3
2/7
2/3
1/7
1/7
4
5
6