Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 13

Dario Trevisan

6/11/2022

Section 1

Intepretazione probabilistica del metodo dei minimi quadrati

Metodo dei minimi quadrati e MLE

Intepretiamo il metodo come una stima di massima verosimiglianza sotto opportune ipotesi (residui gaussiani indipendenti). Supponiamo

- $X \in E$, $Y \in E = \mathbb{R}^{d'}$, $U \in \mathbb{R}^k$ tali che

$$Y = g(X; U) + W,$$

Metodo dei minimi quadrati e MLE

Intepretiamo il metodo come una stima di massima verosimiglianza sotto opportune ipotesi (residui gaussiani indipendenti). Supponiamo

- $X \in E$, $Y \in E = \mathbb{R}^{d'}$, $U \in \mathbb{R}^k$ tali che

$$Y = g(X; U) + W,$$

- W è una variabile (il residuo) con densità gaussiana vettoriale $\mathcal{N}(0, vId)$ (dove $v > 0$ è un parametro).

Metodo dei minimi quadrati e MLE

Intepretiamo il metodo come una stima di massima verosimiglianza sotto opportune ipotesi (residui gaussiani indipendenti). Supponiamo

- $X \in E$, $Y \in E = \mathbb{R}^{d'}$, $U \in \mathbb{R}^k$ tali che

$$Y = g(X; U) + W,$$

- W è una variabile (il residuo) con densità gaussiana vettoriale $\mathcal{N}(0, vId)$ (dove $v > 0$ è un parametro).
- Le variabili X, U e W siano tra loro indipendenti.

Metodo dei minimi quadrati e MLE

Intepretiamo il metodo come una stima di massima verosimiglianza sotto opportune ipotesi (residui gaussiani indipendenti). Supponiamo

- $X \in E$, $Y \in E = \mathbb{R}^{d'}$, $U \in \mathbb{R}^k$ tali che

$$Y = g(X; U) + W,$$

- W è una variabile (il residuo) con densità gaussiana vettoriale $\mathcal{N}(0, vId)$ (dove $v > 0$ è un parametro).
- Le variabili X, U e W siano tra loro indipendenti.
- Anche senza ipotesi sulla densità a priori di X, scriviamo la verosimiglianza come segue:

$$\begin{aligned} L(u; x, y) &= p(X = x, Y = y | U = u) \\ &= p(Y = y | U = u, X = x) p(X = x | U = u) \\ &= p(Y - g(x; u) = y - g(x, u) | U = u, X = x) p(X = x) \\ &= p(W = y - g(x, u) | U = u, X = x) p(X = x) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2v} |y - g(x, u)|^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} p(X = x). \end{aligned}$$

- La stima di massima verosimiglianza per U equivale a minimizzare

$$u \mapsto |y - g(x, u)|^2,$$

ossia il minimo residuo quadratico.

Se si dispone di n variabili (X_i, W_i) tutte indipendenti tra loro (e dalla U) tali che

$$Y_i = g(X_i; U) + W_i,$$

allora la verosimiglianza di U associata alle osservazioni $x = (x_i)_{i=1}^n$, $y = (y_i)_{i=1}^n$,

$$\begin{aligned} L(u; x, y) &= p(X = x, Y = y | U = u) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2v}\sum_{i=1}^n |y_i - g(x_i, u)|^2\right) \frac{1}{\sqrt{(2\pi v)^n}} \prod_{i=1}^n p(X_i = x_i). \end{aligned}$$

- La stima di massima verosimiglianza consiste nel minimizzare

$$u \mapsto \sum_{i=1}^n |y_i - g(x_i, u)|^2,$$

Se si dispone di n variabili (X_i, W_i) tutte indipendenti tra loro (e dalla U) tali che

$$Y_i = g(X_i; U) + W_i,$$

allora la verosimiglianza di U associata alle osservazioni $x = (x_i)_{i=1}^n$, $y = (y_i)_{i=1}^n$,

$$\begin{aligned} L(u; x, y) &= p(X = x, Y = y | U = u) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2v}\sum_{i=1}^n |y_i - g(x_i, u)|^2\right) \frac{1}{\sqrt{(2\pi v)^n}} \prod_{i=1}^n p(X_i = x_i). \end{aligned}$$

- La stima di massima verosimiglianza consiste nel minimizzare

$$u \mapsto \sum_{i=1}^n |y_i - g(x_i, u)|^2,$$

- Massimizzando anche in v si ottiene anche l'errore quadratico medio

$$v_{\mathrm{MLE}} = MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |y_i - g(x_i; u)|^2.$$

Approccio bayesiano

La derivazione del metodo come MLE suggerisce un approccio bayesiano per raffinare il metodo.

- Supponiamo che sia noto a priori che U non si discosti troppo da un parametro noto u_0, ad esempio con una variabilità dell'ordine di $\sigma_u > 0$ (lungo ciascuna componente) e che le componenti di U siano indipendenti tra loro.

Approccio bayesiano

La derivazione del metodo come MLE suggerisce un approccio bayesiano per raffinare il metodo.

- Supponiamo che sia noto a priori che U non si discosti troppo da un parametro noto u_0, ad esempio con una variabilità dell'ordine di $\sigma_u > 0$ (lungo ciascuna componente) e che le componenti di U siano indipendenti tra loro.
- Si pone U a priori $\mathcal{N}(u_0, \sigma_u^2 Id)$, e dalla formula di Bayes

$$
\begin{aligned}
&p(U = u | X_i = x_i, Y_i = y_i, \forall i = 1, \dots, n) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}|u - u_0|^2\right) L(u; x, y) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}|y_i - g(x_i; u)|^2 + \frac{1}{\sigma_u^2}|u - u_0|^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

- Il massimo della densità a posteriori (stima MAP) si ottiene minimizzando

$$u \mapsto \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n} |y_i - g(x_i; u)|^2 + \frac{1}{\sigma_u^2}|u - u_0|^2.$$

- Il massimo della densità a posteriori (stima MAP) si ottiene minimizzando

$$u \mapsto \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n} |y_i - g(x_i; u)|^2 + \frac{1}{\sigma_u^2}|u - u_0|^2.$$

- È stato quindi introdotto un termine di *regolarizzazione* (o penalizzazione) alla somma dei residui, che diventa rilevante se u è troppo lontano dal parametro u_0.

- Il massimo della densità a posteriori (stima MAP) si ottiene minimizzando

$$u \mapsto \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n} |y_i - g(x_i; u)|^2 + \frac{1}{\sigma_u^2}|u - u_0|^2.$$

- È stato quindi introdotto un termine di *regolarizzazione* (o penalizzazione) alla somma dei residui, che diventa rilevante se u è troppo lontano dal parametro u_0.
- L'introduzione di questi ed altre funzioni è spesso utile per regolarizzare appunto la soluzione fornita dal semplice metodo dei minimi quadrati (queste tecniche hanno diversi nomi a seconda del tipo di termini che si aggiungono, ad esempio *ridge*, *weight decay*, *LASSO*, ecc.).

Approccio bayesiano e modelli lineari

- Supponendo ulteriormente che $g(x;u) = x \cdot u$, la densità a posteriori per U diventa

$$p(U = u | X_i = x_i, Y_i = y_i, \forall i = 1, \dots, n)$$
$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{v} \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i \cdot u|^2 + \frac{1}{\sigma_u^2} |u - u_0|^2 \right) \right),$$

che è una densità gaussiana vettoriale (essendo un esponenziale di polinomio di secondo grado rispetto alla variabile u).

Approccio bayesiano e modelli lineari

- Supponendo ulteriormente che $g(x;u) = x \cdot u$, la densità a posteriori per U diventa

$$p(U = u | X_i = x_i, Y_i = y_i, \forall i = 1, \dots, n)$$
$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{v} \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i \cdot u|^2 + \frac{1}{\sigma_u^2} |u - u_0|^2 \right) \right),$$

  che è una densità gaussiana vettoriale (essendo un esponenziale di polinomio di secondo grado rispetto alla variabile u).

- Si trova che U ha come nuovi parametri, il vettore dei valor medi

$$u_{|X=x, Y=y} = \left(x^T x + (v/\sigma_u^2) Id \right)^{-1} \left(x^T y + (v/\sigma_u^2) u_0 \right)$$

  e la matrice delle covarianze

$$\Sigma_{U|X=x, Y=y} = v \left(x^T x + (v/\sigma_u^2) Id \right)^{-1}.$$

- La deviazione standard della componente U_j del vettore dei parametri U, si ottiene dal termine diagonale della matrice,

$$\begin{aligned}\sigma_{U_j|X=x,Y=y} &= \sqrt{\mathrm{Var}\left(U_j|X=x,Y=y\right)} \\ &= \sqrt{v\left(x^T x + (v/\sigma_u^2)Id\right)^{-1}_{jj}}.\end{aligned}$$

- La deviazione standard della componente U_j del vettore dei parametri U, si ottiene dal termine diagonale della matrice,

$$\sigma_{U_j|X=x,Y=y} = \sqrt{\mathrm{Var}\left(U_j|X=x, Y=y\right)}$$
$$= \sqrt{v\left(x^T x + (v/\sigma_u^2)Id\right)^{-1}_{jj}}.$$

- Nel limite $v << \sigma_u^2$ dalle formule sopra si recuperano la stima del metodo classico dei minimi quadrati per il modello lineare

$$u_{\mathrm{OLS}} = (x^T x)^{-1} x^T y$$

e (avendo posto $v = v_{\mathrm{MLE}} = MSE$ la stima di massima verosimiglianza) gli errori standard dei parametri, per $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\sigma_j = \sqrt{v\left(x^T x\right)^{-1}_{jj}}.$$

Altre funzioni obiettivo

Perché minimizzare i quadrati dei residui? in effetti ci sono altre scelte possibili e ragionevoli (ma non si trovano formule esplicite).

- Ad esempio il valore assoluto (*least absolute deviation* in inglese) darebbe

$$u_{\text{LAD}} \in \arg\min_{u \in \mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^{n} |y_i - g(x_i; u)|.$$

Altre funzioni obiettivo

Perché minimizzare i quadrati dei residui? in effetti ci sono altre scelte possibili e ragionevoli (ma non si trovano formule esplicite).

- Ad esempio il valore assoluto (*least absolute deviation* in inglese) darebbe

$$u_{\text{LAD}} \in \arg\min_{u \in \mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^{n} |y_i - g(x_i; u)|.$$

- L'interpretazione è che i resudui hanno densità detta di Laplace $p(W = w) \propto \exp\left(-\frac{|w|}{b}\right)$.

Section 2

Sull'ipotesi di gaussianità

Giustificare l'ipotesi

- L'introduzione di opportune variabili gaussiane permette di intepretare metodi come la PCA o i minimi quadrati in termini probabilistici (stime di massima verosimiglianza).

Giustificare l'ipotesi

- L'introduzione di opportune variabili gaussiane permette di intepretare metodi come la PCA o i minimi quadrati in termini probabilistici (stime di massima verosimiglianza).
- Questo permette di chiarire le *ipotesi* sottostanti per garantire, almeno in teoria, una corretta applicazione del metodo.

Giustificare l'ipotesi

- L'introduzione di opportune variabili gaussiane permette di intepretare metodi come la PCA o i minimi quadrati in termini probabilistici (stime di massima verosimiglianza).
- Questo permette di chiarire le *ipotesi* sottostanti per garantire, almeno in teoria, una corretta applicazione del metodo.
- Ad esempio, nel caso dei minimi quadrati, i residui dovrebbero avere densità gaussiane.

Giustificare l'ipotesi

- L'introduzione di opportune variabili gaussiane permette di intepretare metodi come la PCA o i minimi quadrati in termini probabilistici (stime di massima verosimiglianza).
- Questo permette di chiarire le *ipotesi* sottostanti per garantire, almeno in teoria, una corretta applicazione del metodo.
- Ad esempio, nel caso dei minimi quadrati, i residui dovrebbero avere densità gaussiane.
- Come argomentare che n osservazioni $(x_i)_{i=1}^n$ di dati dalla realtà possano essere ragionevolmente modellizate tramite eventi del tipo $X_i = x_i$, dove le variabili aleatorie X_i siano gaussiane indipendenti?

Giustificare l'ipotesi

- L'introduzione di opportune variabili gaussiane permette di intepretare metodi come la PCA o i minimi quadrati in termini probabilistici (stime di massima verosimiglianza).
- Questo permette di chiarire le *ipotesi* sottostanti per garantire, almeno in teoria, una corretta applicazione del metodo.
- Ad esempio, nel caso dei minimi quadrati, i residui dovrebbero avere densità gaussiane.
- Come argomentare che n osservazioni $(x_i)_{i=1}^n$ di dati dalla realtà possano essere ragionevolmente modellizate tramite eventi del tipo $X_i = x_i$, dove le variabili aleatorie X_i siano gaussiane indipendenti?
- Discutiamo due approcci (qualitativi e quantitativi).

Approcci qualitativi

In questo caso si sfruttano teoremi limite, come la legge dei grandi numeri (che vedremo) per garantire che le osservazioni $(x_i)_{i=1}^n$ si avvicinano per n grande alle quantità teoriche in un certo senso.

- In questa categoria rientrano:

Approcci qualitativi

In questo caso si sfruttano teoremi limite, come la legge dei grandi numeri (che vedremo) per garantire che le osservazioni $(x_i)_{i=1}^n$ si avvicinano per n grande alle quantità teoriche in un certo senso.

- In questa categoria rientrano:
  1. il confronto tra l'istogramma dei valori osservati e la densità gaussiana stimata.

Approcci qualitativi

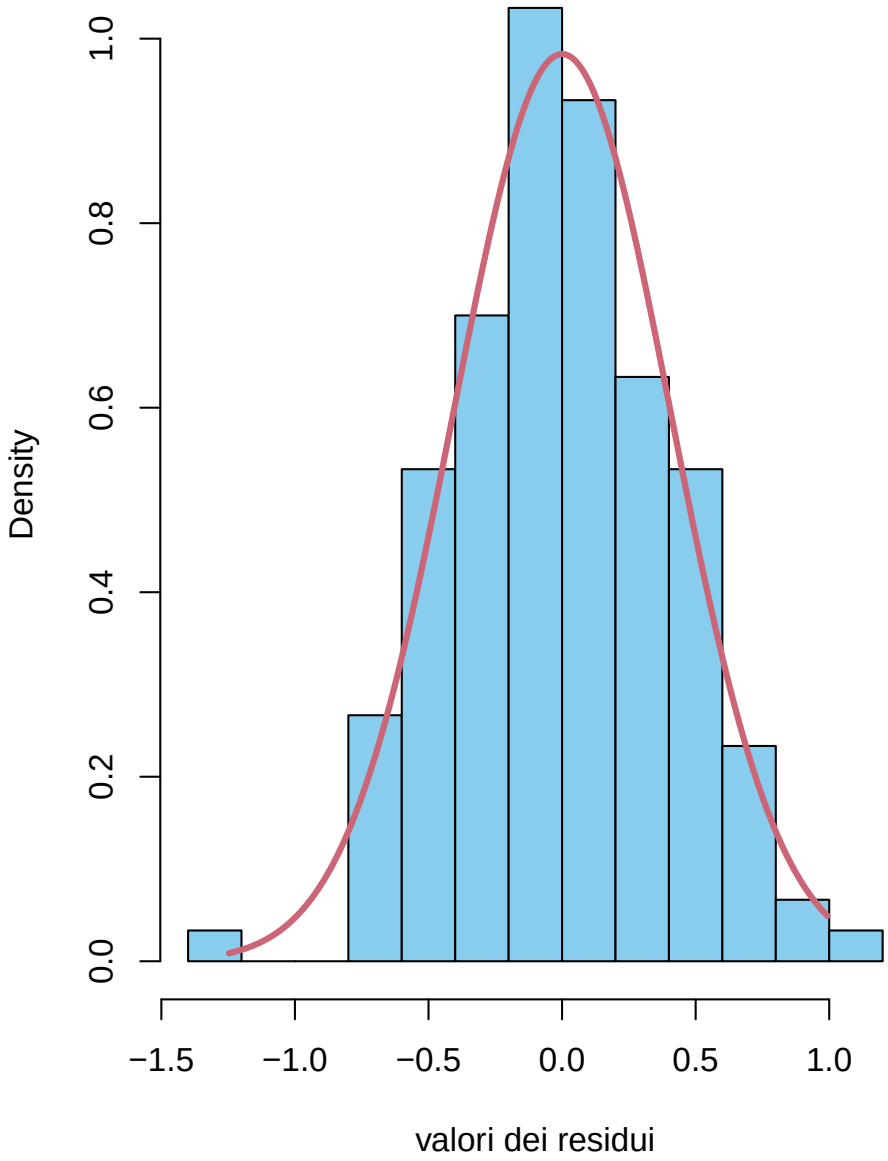
In questo caso si sfruttano teoremi limite, come la legge dei grandi numeri (che vedremo) per garantire che le osservazioni $(x_i)_{i=1}^n$ si avvicinano per n grande alle quantità teoriche in un certo senso.

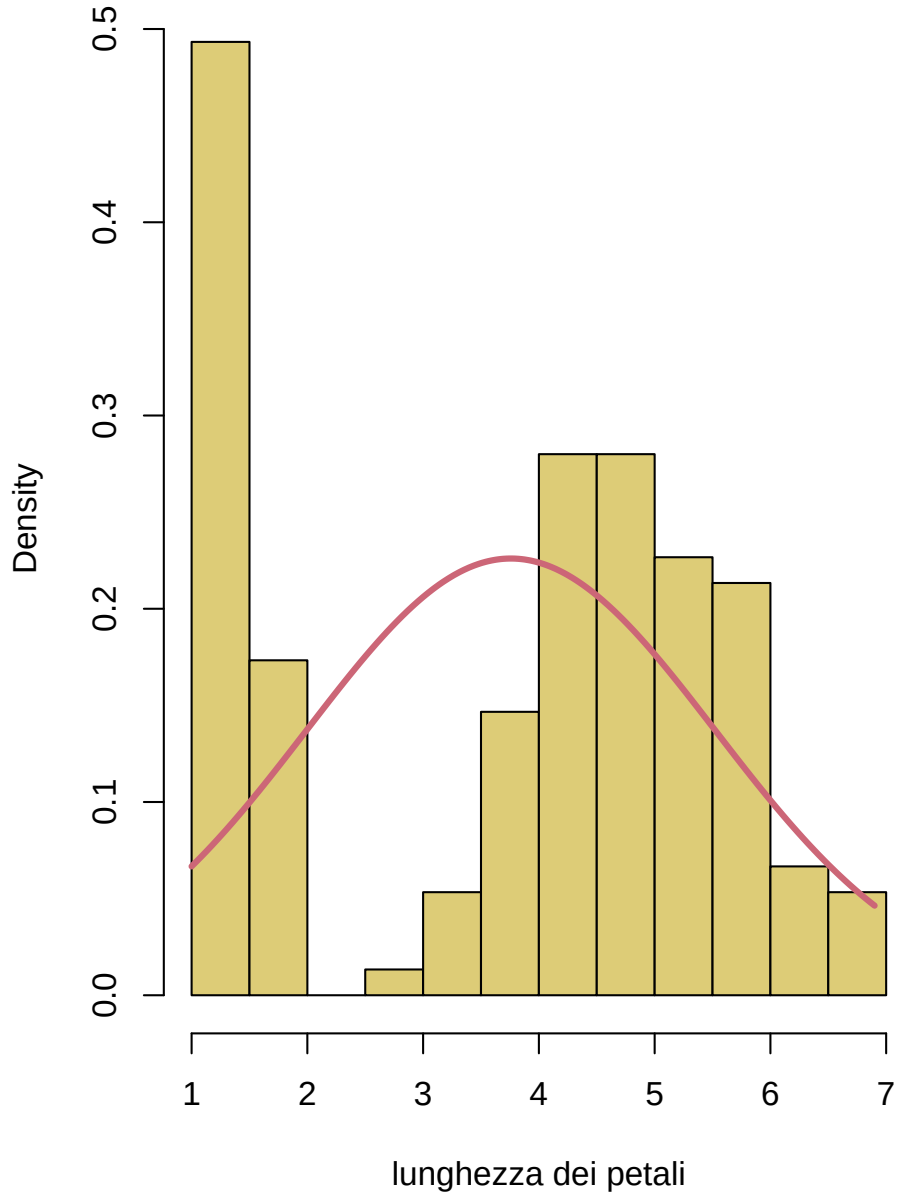
- In questa categoria rientrano:
  1. il confronto tra l'istogramma dei valori osservati e la densità gaussiana stimata.
  2. il confronto tra la funzione quantile empirica (ossia della variabile uniforme discreta sugli n valori osservati) con la funzione quantile di una opportuna gaussiana e quella teorica (QQ-plot).

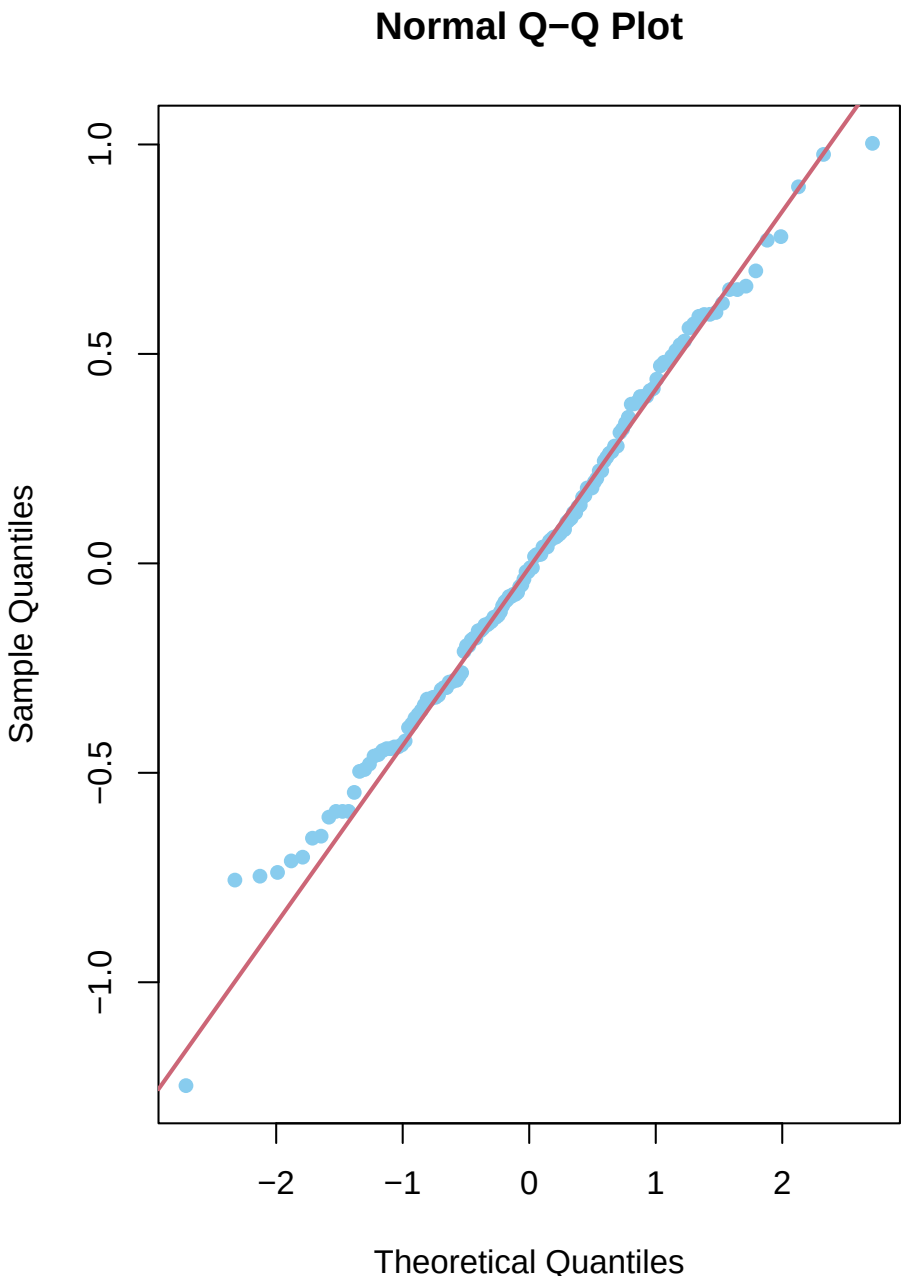
Approcci qualitativi

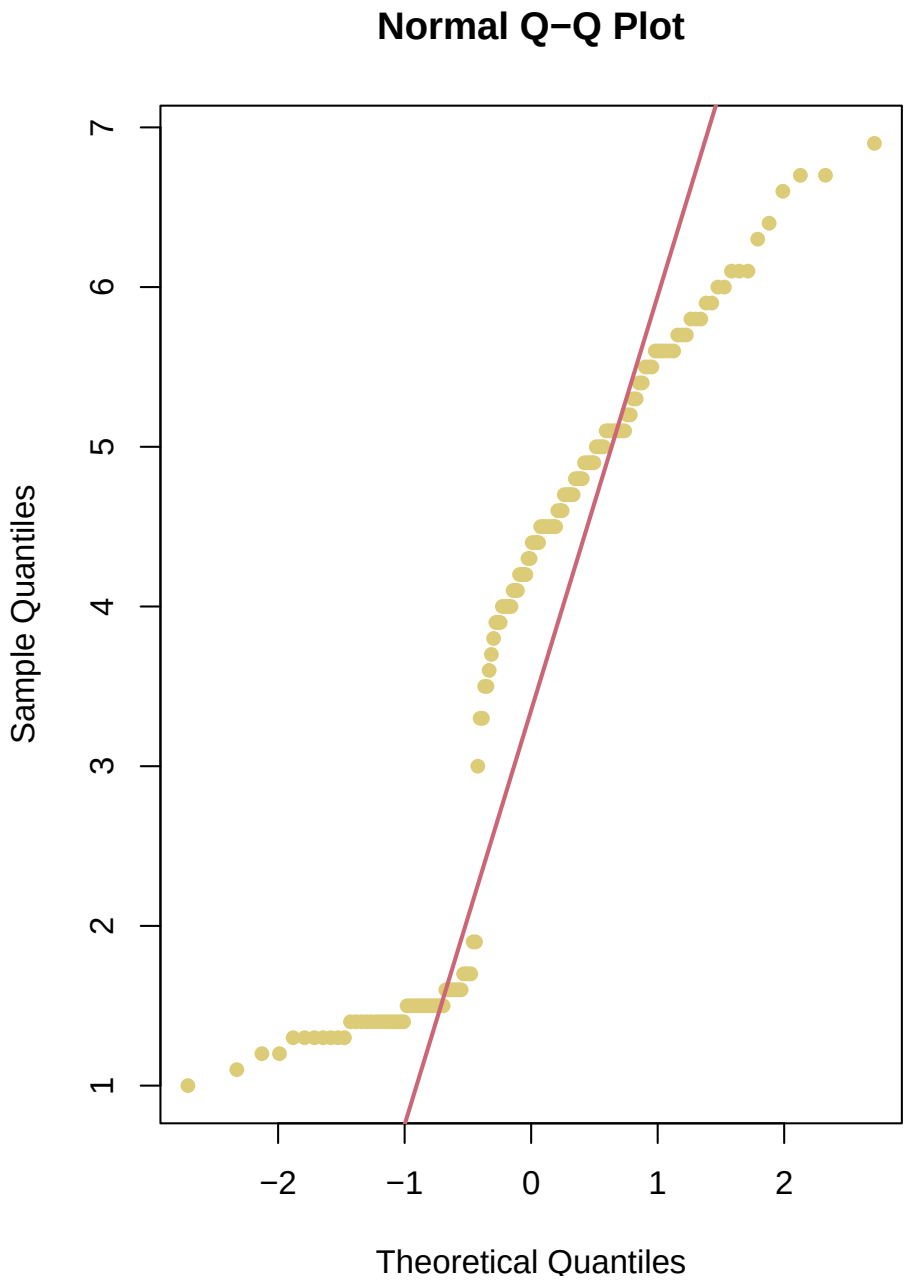
In questo caso si sfruttano teoremi limite, come la legge dei grandi numeri (che vedremo) per garantire che le osservazioni $(x_i)_{i=1}^n$ si avvicinano per n grande alle quantità teoriche in un certo senso.

- In questa categoria rientrano:
  1. il confronto tra l'istogramma dei valori osservati e la densità gaussiana stimata.
  2. il confronto tra la funzione quantile empirica (ossia della variabile uniforme discreta sugli n valori osservati) con la funzione quantile di una opportuna gaussiana e quella teorica (QQ-plot).
- In entrambi i casi si valuta graficamente la somiglianza tra le quantità teoriche e quelle empiriche.


Density
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
valori dei residui


Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
1
2
3
4
5
6
7
lunghezza dei petali


Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−2
−1
0
1
2


Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
7
6
5
4
3
2
1
−2
−1
0
1
2

Generalità sui test statistici

- **Obiettivo**: scartare (rifiutare) alcune alternative A_i sulla base dell'osservazione di B.

Generalità sui test statistici

- **Obiettivo**: scartare (rifiutare) alcune alternative A_i sulla base dell'osservazione di B.
- **Intuizione**: eliminare quelle con probabilità a posteriori nulla (ovvio) o bassa.

Generalità sui test statistici

- **Obiettivo**: scartare (rifiutare) alcune alternative A_i sulla base dell'osservazione di B.
- **Intuizione**: eliminare quelle con probabilità a posteriori nulla (ovvio) o bassa.
- Nella pratica ci si appoggia alla verosimiglianza invece delle probabilità a posteriori (simile se a priori sono uniformi).

Generalità sui test statistici

- **Obiettivo**: scartare (rifiutare) alcune alternative A_i sulla base dell'osservazione di B.
- **Intuizione**: eliminare quelle con probabilità a posteriori nulla (ovvio) o bassa.
- Nella pratica ci si appoggia alla verosimiglianza invece delle probabilità a posteriori (simile se a priori sono uniformi).
- Ipotesi nulla $\mathcal{H}_0$ (da rifiutare)) e alternativa $\mathcal{H}_1$.

Generalità sui test statistici

- **Obiettivo**: scartare (rifiutare) alcune alternative A_i sulla base dell'osservazione di B.
- **Intuizione**: eliminare quelle con probabilità a posteriori nulla (ovvio) o bassa.
- Nella pratica ci si appoggia alla verosimiglianza invece delle probabilità a posteriori (simile se a priori sono uniformi).
- Ipotesi nulla $\mathcal{H}_0$ (da rifiutare)) e alternativa $\mathcal{H}_1$.
- **Valore** p (p-*value*) di Fisher:

$$p = \max_{A_i \in \mathcal{H}_0} P(B|A_i) = \max_{A_i \in \mathcal{H}_0} L(A_i; B).$$

Generalità sui test statistici

- **Obiettivo**: scartare (rifiutare) alcune alternative A_i sulla base dell'osservazione di B.
- **Intuizione**: eliminare quelle con probabilità a posteriori nulla (ovvio) o bassa.
- Nella pratica ci si appoggia alla verosimiglianza invece delle probabilità a posteriori (simile se a priori sono uniformi).
- Ipotesi nulla $\mathcal{H}_0$ (da rifiutare)) e alternativa $\mathcal{H}_1$.
- **Valore** p (p-*value*) di Fisher:

$$p = \max_{A_i \in \mathcal{H}_0} P(B|A_i) = \max_{A_i \in \mathcal{H}_0} L(A_i; B).$$

- Più piccolo è il valore p, minore è la probabilità che B sia vero rispetto a l'ipotesi $\mathcal{H}_0$, e quindi, invocando Bayes, anche che A_i sia vero sapendo B.

Generalità sui test statistici

- **Obiettivo**: scartare (rifiutare) alcune alternative A_i sulla base dell'osservazione di B.
- **Intuizione**: eliminare quelle con probabilità a posteriori nulla (ovvio) o bassa.
- Nella pratica ci si appoggia alla verosimiglianza invece delle probabilità a posteriori (simile se a priori sono uniformi).
- Ipotesi nulla $\mathcal{H}_0$ (da rifiutare)) e alternativa $\mathcal{H}_1$.
- **Valore** p (p-*value*) di Fisher:

$$p = \max_{A_i \in \mathcal{H}_0} P(B|A_i) = \max_{A_i \in \mathcal{H}_0} L(A_i; B).$$

- Più piccolo è il valore p, minore è la probabilità che B sia vero rispetto a l'ipotesi $\mathcal{H}_0$, e quindi, invocando Bayes, anche che A_i sia vero sapendo B.

Test di gaussianità

- l'ipotesi nulla è l'evento $\mathcal{H}_0 =$ "le osservazioni provengono da n variabili gaussiane indipendenti, tutte con gli stessi parametri"

Test di gaussianità

- l'ipotesi nulla è l'evento $\mathcal{H}_0 =$ "le osservazioni provengono da n variabili gaussiane indipendenti, tutte con gli stessi parametri"
- l'alternativa semplice $\mathcal{H}_1$ è la sua negazione.

Test di gaussianità

- l'ipotesi nulla è l'evento $\mathcal{H}_0 =$ "le osservazioni provengono da n variabili gaussiane indipendenti, tutte con gli stessi parametri"
- l'alternativa semplice $\mathcal{H}_1$ è la sua negazione.
- La descrizione specifica di questi test è troppo lunga (vediamo solo i comandi R)

Test di gaussianità

- l'ipotesi nulla è l'evento $\mathcal{H}_0 =$ "le osservazioni provengono da n variabili gaussiane indipendenti, tutte con gli stessi parametri"
- l'alternativa semplice $\mathcal{H}_1$ è la sua negazione.
- La descrizione specifica di questi test è troppo lunga (vediamo solo i comandi R)
- Il valore p, è calcolato rispetto alla probabilità condizionata alla validità dell'ipotesi nulla.

Test di gaussianità

- l'ipotesi nulla è l'evento $\mathcal{H}_0 =$ "le osservazioni provengono da n variabili gaussiane indipendenti, tutte con gli stessi parametri"
- l'alternativa semplice $\mathcal{H}_1$ è la sua negazione.
- La descrizione specifica di questi test è troppo lunga (vediamo solo i comandi R)
- Il valore p, è calcolato rispetto alla probabilità condizionata alla validità dell'ipotesi nulla.
- Più piccolo il valore p, maggiore sarà il "grado di fiducia" che il test attribuisce nel rifiutare l'ipotesi nulla.

Test di gaussianità

- l'ipotesi nulla è l'evento $\mathcal{H}_0 =$ "le osservazioni provengono da n variabili gaussiane indipendenti, tutte con gli stessi parametri"
- l'alternativa semplice $\mathcal{H}_1$ è la sua negazione.
- La descrizione specifica di questi test è troppo lunga (vediamo solo i comandi R)
- Il valore p, è calcolato rispetto alla probabilità condizionata alla validità dell'ipotesi nulla.
- Più piccolo il valore p, maggiore sarà il "grado di fiducia" che il test attribuisce nel rifiutare l'ipotesi nulla.
- Se usiamo il test per "confermare" l'ipotesi di gaussianità, il test sarà tanto più utile quanto più *grande* (ossia vicino ad 1) è il valore p.

Esempi in R

```r
# Un test di gaussianità è dovuto a Shapiro (e Wilk).

shapiro.test(iris_res)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  iris_res
## W = 0.99298, p-value = 0.6767
```

```r
shapiro.test(iris_petali)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  iris_petali
## W = 0.87627, p-value = 7.412e-10
```

```r
ks.test(iris_res,  "pnorm", mean=mean(iris_res), sd=sd(iris_re
```

```
##
##  Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  iris_res
## D = 0.040916, p-value = 0.9632
## alternative hypothesis: two-sided
```

```r
ks.test(iris_petali,  "pnorm", mean=mean(iris_petali), sd=sd(i
```

```
##
##  Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  iris_petali
## D = 0.19815, p-value = 1.532e-05
## alternative hypothesis: two-sided
```

Section 3

Approssimazione di Laplace

Un metodo euristico per approssimare con gaussiane

Data una variabile $X \in \mathbb{R}^d$ con densità non gaussiana, è possibile approssimarla con una gaussiana?

- In questo modo gli strumenti sviluppati per le variabili gaussiane si potrebbero applicare (tenendo conto dell'errore di approssimazione).

Un metodo euristico per approssimare con gaussiane

Data una variabile $X \in \mathbb{R}^d$ con densità non gaussiana, è possibile approssimarla con una gaussiana?

- In questo modo gli strumenti sviluppati per le variabili gaussiane si potrebbero applicare (tenendo conto dell'errore di approssimazione).
- Una soluzione semplice e spesso efficace è l'**approssimazione di Laplace**.

Si considera lo sviluppo del logaritmo della densità

$$x \mapsto \log(p(X = x)),$$

in un punto di massimo $x_{\max}$ (anche un massimo locale). Si trova

$$\log(p(X = x))$$
$$= \log(p(X = x_{\max})) + \frac{1}{2}(x - x_{\max}) \cdot H(x_{\max})(x - x_{\max}) + O(|x - x_{\max}|^3),$$

dove

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 \log(p(X = x))}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{d}$$

la matrice delle derivate seconde (detta anche hessiana).

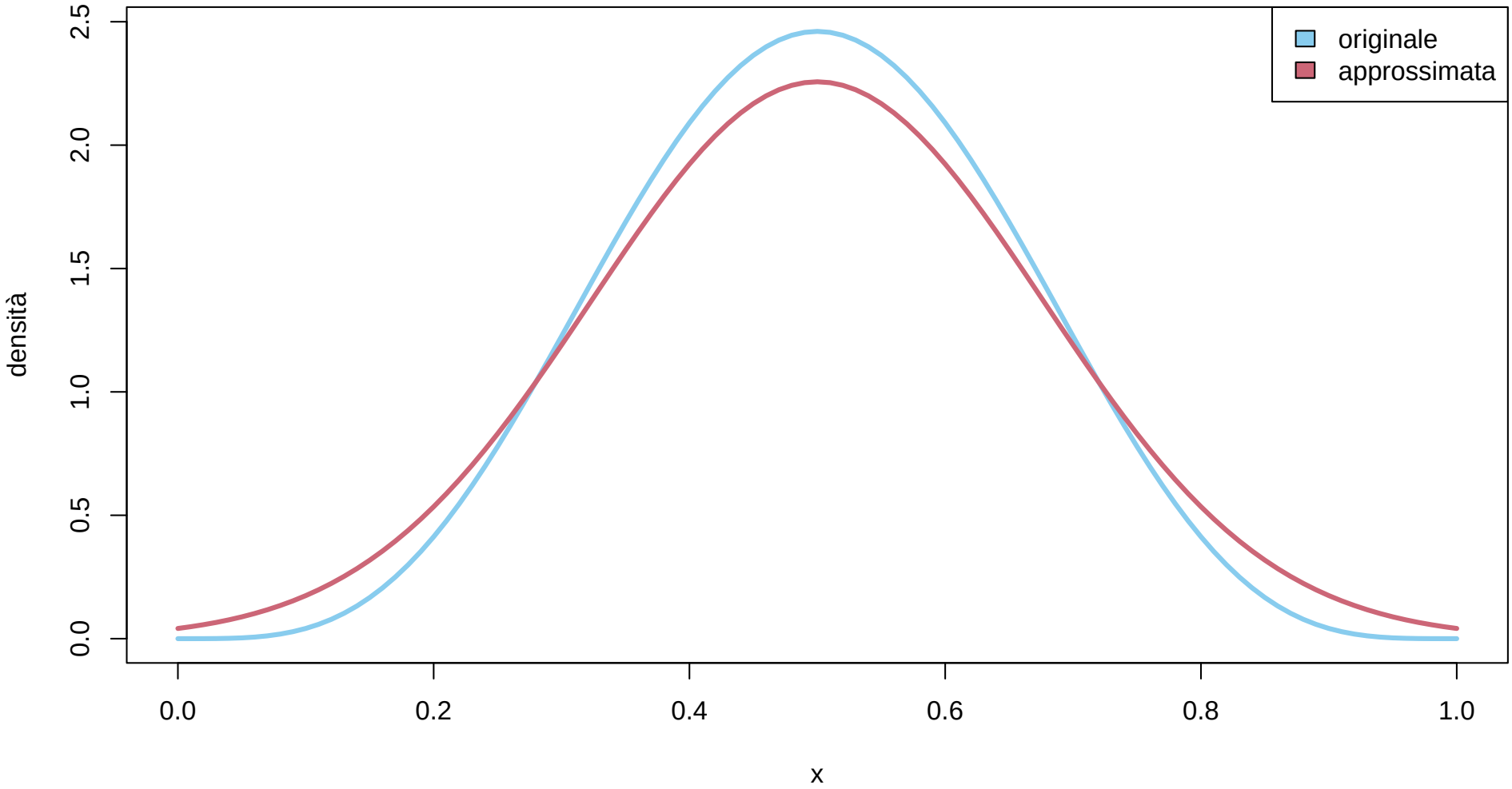
- $H(x_{\max})$ è una matrice (semi-)definita negativa.

- L'approssimazione di Laplace è data dalla densità gaussiana di valor medio $x_{\max}$ e matrice delle covarianze $-(H(x_{\max}))^{-1}$.

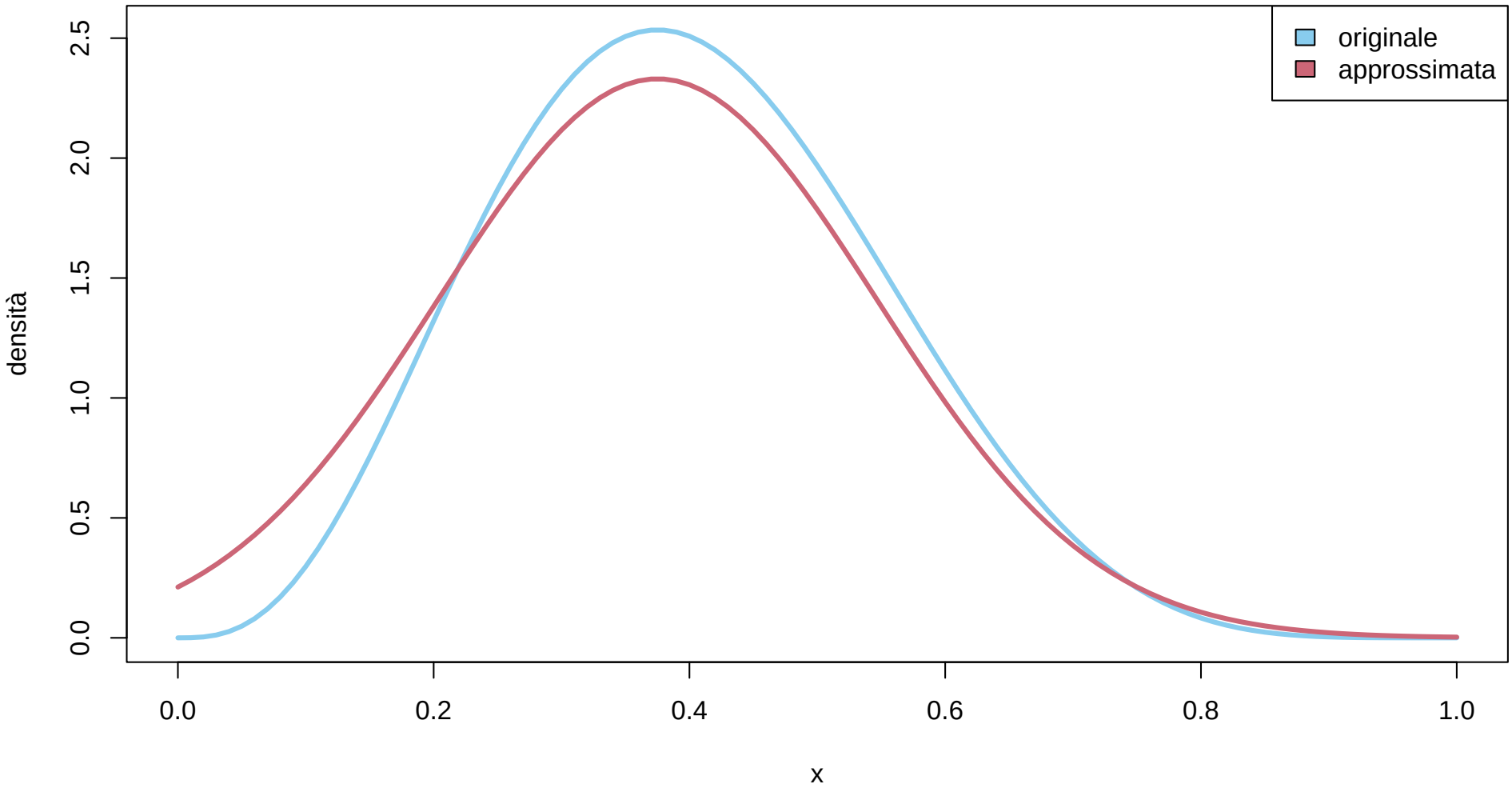
- L'approssimazione di Laplace è data dalla densità gaussiana di valor medio $x_{\max}$ e matrice delle covarianze $-(H(x_{\max}))^{-1}$.
- Spesso si calcola $x_{\max}$ tramite metodi numerici che restituiscono anche la matrice hessiana.

- L'approssimazione di Laplace è data dalla densità gaussiana di valor medio $x_{\max}$ e matrice delle covarianze $-(H(x_{\max}))^{-1}$.
- Spesso si calcola $x_{\max}$ tramite metodi numerici che restituiscono anche la matrice hessiana.
- Non è garantita in generale che l'approssimazione sia vicina alla densità di X, in particolare per valori x lontani da $x_{\max}$. Vediamo degli esempi.

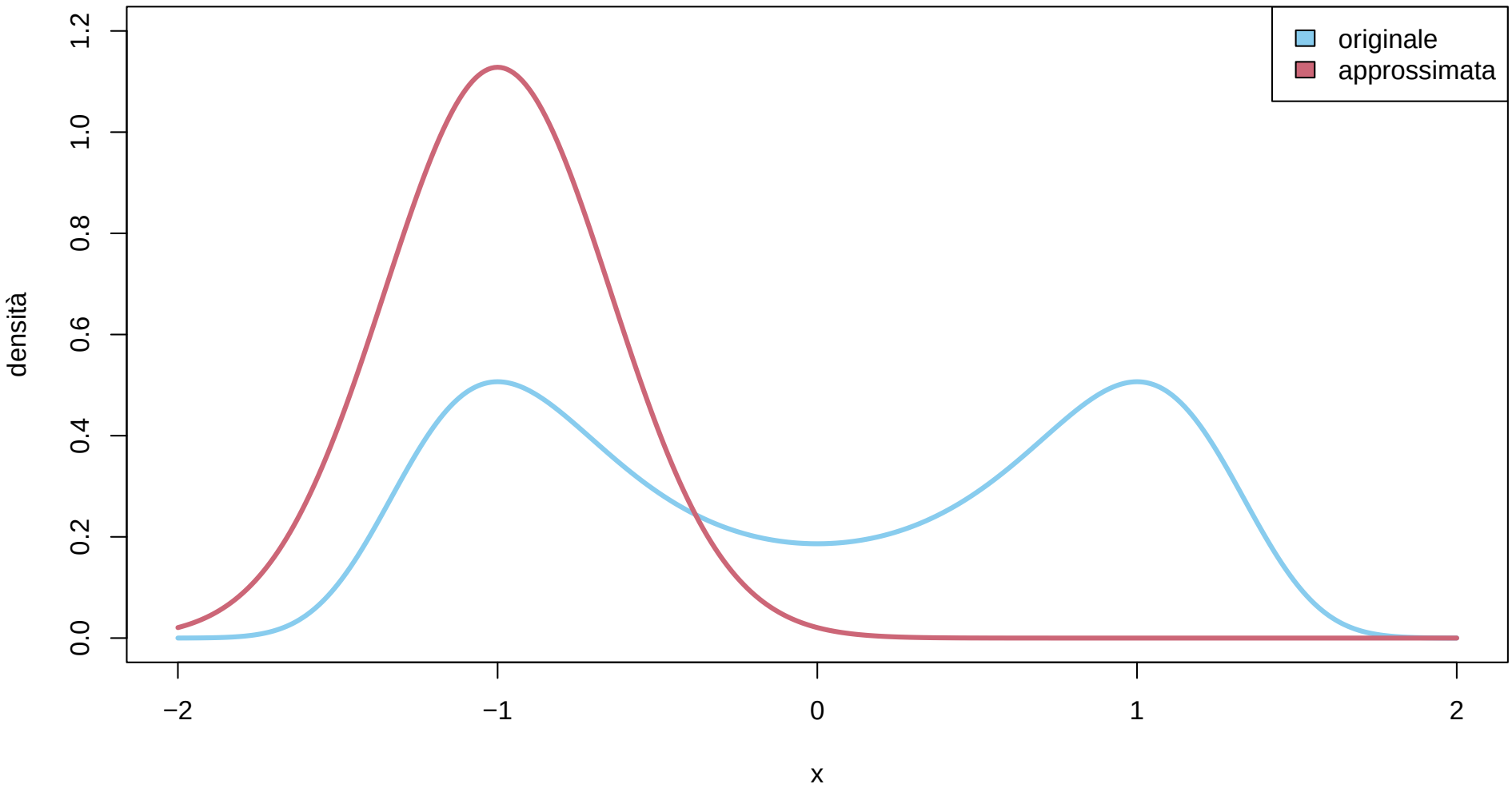
$$p(X = x) = x^4(1-x)^4 \quad \text{per } x \in [0,1], \text{ nulla altrimenti.}$$



$$p(X = x) = x^3(1 - x)^5 \quad \text{per } x \in [0, 1], \text{ nulla altrimenti.}$$



$$p(X = x) = \exp(-(1-x)^2(1+x)^2) \quad \text{per } x \in [-2, 2], \text{ nulla altrimenti.}$$



Vediamo un esempio nel caso vettoriale.

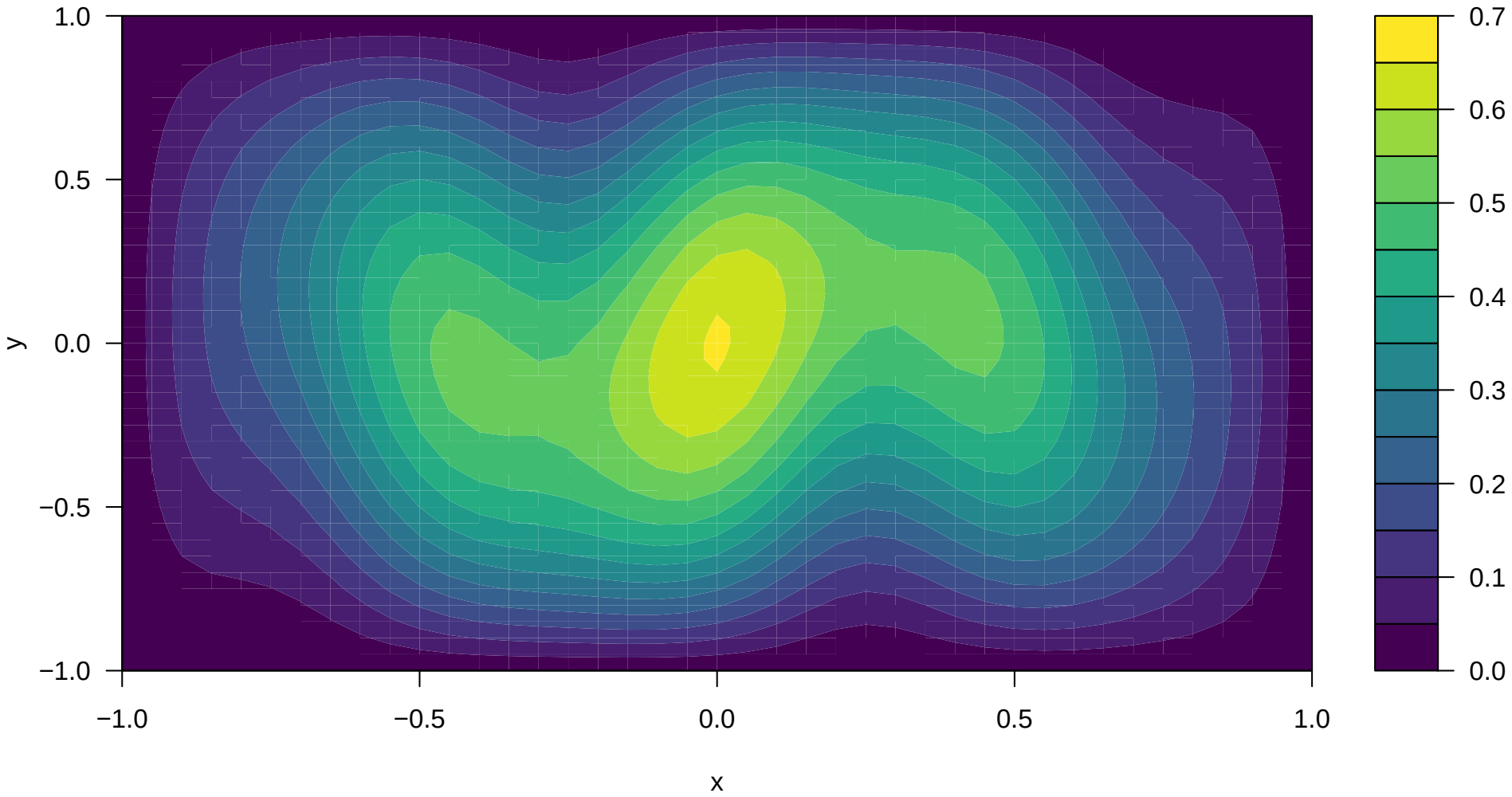


Figure 1: heatmap della densità originale

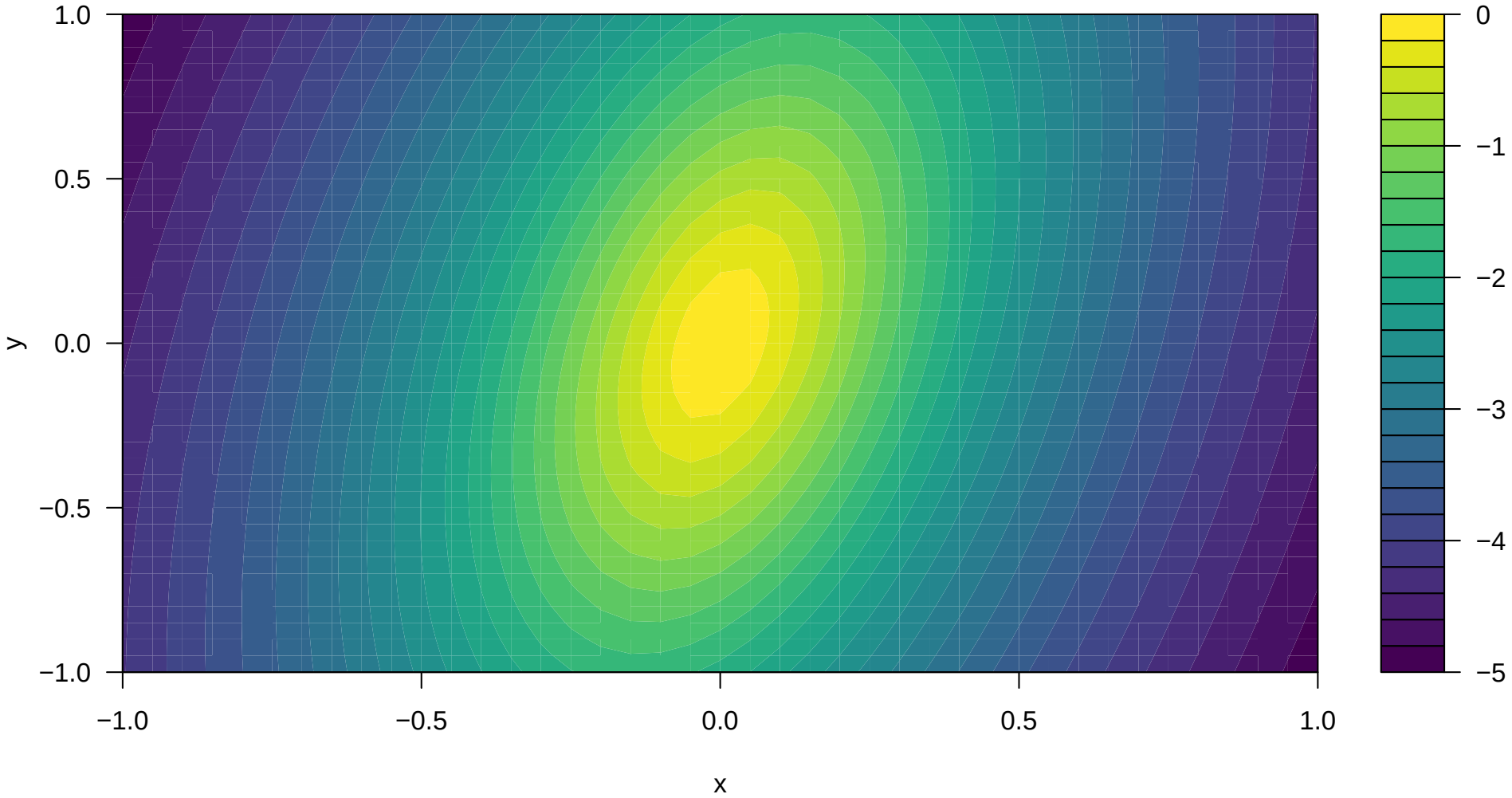


Figure 2: heatmap dell'approssimazione di Laplace.

Section 4

Esercizi

Eventi e variabili aleatorie discrete

Un nostro amico appassionato di dadi ci propone il seguente gioco: egli ha con sé un dado a 4 facce (tetraedro) numerate da 1 a 4 e uno a sei facce, numerate da 1 a 6. Sceglie uno dei due dadi (senza mostrarci quale) ed esegue con esso 2 lanci consecutivi, ottenendo come esiti due numeri X_1, X_2 (a noi non noti).

1. Calcolare media e varianza della variabile X_1.

Eventi e variabili aleatorie discrete

Un nostro amico appassionato di dadi ci propone il seguente gioco: egli ha con sé un dado a 4 facce (tetraedro) numerate da 1 a 4 e uno a sei facce, numerate da 1 a 6. Sceglie uno dei due dadi (senza mostrarci quale) ed esegue con esso 2 lanci consecutivi, ottenendo come esiti due numeri X_1, X_2 (a noi non noti).

1. Calcolare media e varianza della variabile X_1.
2. Supponendo che l'esito del primo lancio sia 3, determinare la densità di X_2.

Eventi e variabili aleatorie discrete

Un nostro amico appassionato di dadi ci propone il seguente gioco: egli ha con sé un dado a 4 facce (tetraedro) numerate da 1 a 4 e uno a sei facce, numerate da 1 a 6. Sceglie uno dei due dadi (senza mostrarci quale) ed esegue con esso 2 lanci consecutivi, ottenendo come esiti due numeri X_1, X_2 (a noi non noti).

1. Calcolare media e varianza della variabile X_1.
2. Supponendo che l'esito del primo lancio sia 3, determinare la densità di X_2.
3. Le variabili X_1, X_2 sono indipendenti? sono correlate?

Due amici, Andrea e Bruno, vanno a pesca. La probabilità che Andrea prenda almeno un pesce in un dato giorno è $1/2$ e anche la probabilità che Bruno ne prenda almeno uno è $1/2$. Tuttavia Bruno sospetta che se Andrea pesca qualcosa in un dato giorno le sue possibilità diminuiscano. Poniamo $p \in (0, 1)$ la probabilità che Bruno prenda almeno un pesce, sapendo che Andrea ne ha pescato almeno uno.

1. Supponendo p noto, e sapendo che uno solo tra Andrea e Bruno è riuscito a prendere qualcosa in un dato giorno, calcolare la probabilità che si tratti di Andrea.

Due amici, Andrea e Bruno, vanno a pesca. La probabilità che Andrea prenda almeno un pesce in un dato giorno è $1/2$ e anche la probabilità che Bruno ne prenda almeno uno è $1/2$. Tuttavia Bruno sospetta che se Andrea pesca qualcosa in un dato giorno le sue possibilità diminuiscano. Poniamo $p \in (0, 1)$ la probabilità che Bruno prenda almeno un pesce, sapendo che Andrea ne ha pescato almeno uno.

1. Supponendo p noto, e sapendo che uno solo tra Andrea e Bruno è riuscito a prendere qualcosa in un dato giorno, calcolare la probabilità che si tratti di Andrea.
2. Gli amici hanno riportato in tabella i pesci pescati in 5 giorni di attività.

Giorno	1	2	3	4	5
Andrea	1	0	2	1	4
Bruno	0	0	2	0	0

Supponendo che gli eventi relativi ai diversi giorni siano indipendenti determinare la stima di massima verosimiglianza per p.

Variabili aleatorie continue

Un supermercato ha acquistato un nuovo frigorifero per l'esposizione dei surgelati in vendita. La durata di funzionamento dell'apparecchio è descritta da una variabile aleatoria T con distribuzione esponenziale di media 120 mesi.

1. Si calcoli la funzione di sopravvivenza del tempo di funzionamento.

Variabili aleatorie continue

Un supermercato ha acquistato un nuovo frigorifero per l'esposizione dei surgelati in vendita. La durata di funzionamento dell'apparecchio è descritta da una variabile aleatoria T con distribuzione esponenziale di media 120 mesi.

1. Si calcoli la funzione di sopravvivenza del tempo di funzionamento.
2. Sapendo che sono passati 60 mesi di funzionamento e il frigorifero funziona correttamente, si calcoli la densità del tempo di funzionamento rimanente (ossia $T - 60$).

Variabili aleatorie continue

Un supermercato ha acquistato un nuovo frigorifero per l'esposizione dei surgelati in vendita. La durata di funzionamento dell'apparecchio è descritta da una variabile aleatoria T con distribuzione esponenziale di media 120 mesi.

1. Si calcoli la funzione di sopravvivenza del tempo di funzionamento.
2. Sapendo che sono passati 60 mesi di funzionamento e il frigorifero funziona correttamente, si calcoli la densità del tempo di funzionamento rimanente (ossia $T - 60$).
3. Mentre i primi 5 anni di funzionamento sono coperti da garanzia, il costo della riparazione del frigorifero è per contratto $\exp(T/10)$ se una rottura avviene in un tempo T tra i 60 e i 120 mesi dall'installazione. Confrontare il valore atteso del costo di una riparazione nei due casi: appena il frigorifero è installato; sapendo che non si è rotto nei primi 5 anni di funzionamento.

Il prezzo in una data futura delle azioni di un'azienda quotata in borsa è rappresentabile, secondo alcuni studiosi dei mercati, da una variabile della forma

$$C = exp(X)$$

dove X è una variabile aleatoria reale con densità $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Calcolate la densità di C, il valore atteso e la varianza.

Il prezzo in una data futura delle azioni di un'azienda quotata in borsa è rappresentabile, secondo alcuni studiosi dei mercati, da una variabile della forma

$$C = exp(X)$$

dove X è una variabile aleatoria reale con densità $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Calcolate la densità di C, il valore atteso e la varianza.
2. Gli studiosi hanno stimato che $\sigma^2 = 1$, mentre sono indecisi sul parametro m. Supponendo di osservare nella data futura che $C = 3$, determinare la stima di massima verosimiglianza per m.

Section 5

Processi a stati discreti

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- Vediamo la teoria di base delle catene di Markov

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- e poi dei processi di Markov a salti.

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- e poi dei processi di Markov a salti.
- Studiamo esistenza e unicità delle distribuzioni invarianti associate ad un processo di Markov

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- e poi dei processi di Markov a salti.
- Studiamo esistenza e unicità delle distribuzioni invarianti associate ad un processo di Markov
- Accenniamo al problema della stima dei parametri di un processo a partire dalle osservazioni.

Presentazione

- Introduciamo il linguaggio di base della teoria dei processi con alcune definizioni generali.
- Vediamo la teoria di base delle catene di Markov
- e poi dei processi di Markov a salti.
- Studiamo esistenza e unicità delle distribuzioni invarianti associate ad un processo di Markov
- Accenniamo al problema della stima dei parametri di un processo a partire dalle osservazioni.
- Concludiamo con degli esempi fondamentali dalla teoria delle code.

Definizioni generali

Un **processo stocastico** è una collezione di variabili aleatorie $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$,

- tutte a valori nello stesso insieme E, detto insieme degli **stati** del processo,

Definizioni generali

Un **processo stocastico** è una collezione di variabili aleatorie $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$,

- tutte a valori nello stesso insieme E, detto insieme degli **stati** del processo,
- indicizzate da un insieme $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ detto insieme dei **tempi** del processo.

Il calcolo delle probabilità fornisce strumenti utili per affrontare problemi circa

- il *futuro* di un processo (questo è il problema della *previsione*)

Il calcolo delle probabilità fornisce strumenti utili per affrontare problemi circa

- il *futuro* di un processo (questo è il problema della *previsione*)
- il *passato*,

Il calcolo delle probabilità fornisce strumenti utili per affrontare problemi circa

- il *futuro* di un processo (questo è il problema della *previsione*)
- il *passato*,
- oppure anche il *presente* (se non è esattamente osservato, è il *filtraggio*).

Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- a **stati discreti** se E discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio $E = \mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{N}$)

In base all'insieme $\mathcal{T}$ dei tempi:

Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- a **stati discreti** se E discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio $E = \mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{N}$)
- a **stati continui** se E è infinito continuo, $E = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^k$ (e di solito ciascuna X_t ammetta densità continua)

In base all'insieme $\mathcal{T}$ dei tempi:

Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- a **stati discreti** se E discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio $E = \mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{N}$)
- a **stati continui** se E è infinito continuo, $E = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^k$ (e di solito ciascuna X_t ammetta densità continua)

In base all'insieme $\mathcal{T}$ dei tempi:

- a **tempi discreti** se $\mathcal{T}$ è discreto (ad esempio finito, oppure $\mathcal{T} = \mathbb{N}$),

Classificazione generale

Analogamente alle singole variabili aleatorie, si classificano i processi stocastici in base all'insieme degli stati:

- a **stati discreti** se E discreto (quindi finito oppure infinito numerabile, ad esempio $E = \mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{N}$)
- a **stati continui** se E è infinito continuo, $E = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^k$ (e di solito ciascuna X_t ammetta densità continua)

In base all'insieme $\mathcal{T}$ dei tempi:

- a **tempi discreti** se $\mathcal{T}$ è discreto (ad esempio finito, oppure $\mathcal{T} = \mathbb{N}$),
- a **tempi continui** se $\mathcal{T} = [0, T]$ è un intervallo (anche illimitato, ad esempio $\mathcal{T} = [0, \infty)$).

Traiettorie e marginali

È utile pensare a $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ come ad una variabile aleatoria vettoriale a valori in uno spazio di **traiettorie**,

$$E^{\mathcal{T}} = \{(x_t)_{t\in\mathcal{T}}\}\,.$$

- Ad esempio, se $\mathcal{T} = \{1,\dots,d\}$, allora un processo $(X_i)_{i=1}^d$ può essere pensato come una variabile aleatoria congiunta X, a valori in E^d.

Traiettorie e marginali

È utile pensare a $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ come ad una variabile aleatoria vettoriale a valori in uno spazio di **traiettorie**,

$$E^{\mathcal{T}} = \{(x_t)_{t\in\mathcal{T}}\}.$$

- Ad esempio, se $\mathcal{T} = \{1,\dots,d\}$, allora un processo $(X_i)_{i=1}^d$ può essere pensato come una variabile aleatoria congiunta X, a valori in E^d.
- Ricordiamo la differenza tra la legge delle marginali

  $$P(X_t \in U|I),$$

  al variare di $U \subseteq E$ e $t \in \mathcal{T}$, e la legge congiunta, in questo caso detta semplicemente **legge del processo** $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$, che è definita come tutte le probabilità del tipo

  $$P(X_{t_1} \in U_1, X_{t_2} \in U_2, \dots, X_{t_k} \in U_k|I),$$

Nel caso di processi a stati discreti, per ogni $t \in \mathcal{T}$ la densità discreta della marginale al tempo t è

$$P(X_t = x|I).$$

- La densità discreta del processo è la collezione di tutte le probabilità

$$P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_k} = x_k|I),$$

Nel caso di processi a stati discreti, per ogni $t \in \mathcal{T}$ la densità discreta della marginale al tempo t è

$$P(X_t = x|I).$$

- La densità discreta del processo è la collezione di tutte le probabilità

$$P(X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_k} = x_k|I),$$

- Nel caso di processi a stati continui (con densità continua), basta sostituire la "P" di probabilità con "p" della densità di probabilità.

Come parametrizzare un processo?

Determinare la legge di un processo tramite pochi parametri è un problema difficile, soprattutto se l'insieme dei tempi diventa grande.

- Se $E = \{0, 1\}$, la densità discreta di un processo su $\mathcal{T} = \{1, \dots, d\}$ è praticamente una qualsiasi funzione da $\{0, 1\}^d$ a valori in $[0, 1] \to$ circa 2^d "parametri".

Come parametrizzare un processo?

Determinare la legge di un processo tramite pochi parametri è un problema difficile, soprattutto se l'insieme dei tempi diventa grande.

- Se $E = \{0, 1\}$, la densità discreta di un processo su $\mathcal{T} = \{1, \dots, d\}$ è praticamente una qualsiasi funzione da $\{0, 1\}^d$ a valori in $[0, 1] \to$ circa 2^d "parametri".
- Le d densità marginali si ottengono descrivendo solo d "parametri" (la probabilità $P(X_t = 1|I)$), anche meno se le leggi sono tutte uguali.

Come parametrizzare un processo?

Determinare la legge di un processo tramite pochi parametri è un problema difficile, soprattutto se l'insieme dei tempi diventa grande.

- Se $E = \{0, 1\}$, la densità discreta di un processo su $\mathcal{T} = \{1, \dots, d\}$ è praticamente una qualsiasi funzione da $\{0, 1\}^d$ a valori in $[0, 1] \to$ circa 2^d "parametri".
- Le d densità marginali si ottengono descrivendo solo d "parametri" (la probabilità $P(X_t = 1|I)$), anche meno se le leggi sono tutte uguali.
- Non si può ricostruire la densità del processo a partire dalle densità marginali, senza ulteriori ipotesi.

Proprietà di Markov

La proprietà afferma che *il futuro e il passato sono condizionatamente indipendenti, noto esattamente il presente*.

- Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è *di Markov* (o markoviano) se, per ogni $x \in E$, $t \in \mathcal{T}$, le due variabili congiunte relative ai tempi "passati" $(X_s)_{s<t}$ e "futuri" $(X_r)_{r>t}$ sono indipendenti, rispetto all'informazione in cui si conosce esattamente il presente, ossia $\{X_t = x\}$.

Proprietà di Markov

La proprietà afferma che *il futuro e il passato sono condizionatamente indipendenti, noto esattamente il presente*.

- Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ è *di Markov* (o markoviano) se, per ogni $x \in E$, $t \in \mathcal{T}$, le due variabili congiunte relative ai tempi "passati" $(X_s)_{s<t}$ e "futuri" $(X_r)_{r>t}$ sono indipendenti, rispetto all'informazione in cui si conosce esattamente il presente, ossia $\{X_t = x\}$.
- Se A è una affermazione che che riguarda solo le variabili $(X_s)_{s<t}$, e B è una riguarda solamente le variabili $(X_r)_{r>t}$, allora A, B sono indipendenti rispetto all'informazione $\{X_t = x\}$:

$$P(A, B|X_t = x) = P(A|X_t = x)P(B|X_t = x),$$

oppure

$$P(A|X_t = x, B) = P(A|X_t = x),$$

o anche

$$P(B|X_t = x, A) = P(B|X_t = x).$$

In termini grafici, la proprietà di Markov si traduce in una rete bayesiana associata al processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ del seguente tipo:

Densità di un processo di Markov

Processi omogenei

Per procedere ulteriormente e sviluppare una teoria semplice:

1. consideriamo come insiemi di tempi $\mathcal{T}$ intervalli discreti $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ o continui $\mathcal{T} = [0, T]$.

Processi omogenei

Per procedere ulteriormente e sviluppare una teoria semplice:

1. consideriamo come insiemi di tempi $\mathcal{T}$ intervalli discreti $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ o continui $\mathcal{T} = [0, T]$.
2. consideriamo processi di Markov **omogenei**, ossia tali che le probabilità di transizione dal tempo s al tempo t dipendano solamente dalla differenza dei tempi $t - s$, o equivalentemente, per ogni $\Delta t \geq 0$ si abbia

$$P(X_t = y | X_s = x) = P(X_{t+\Delta t} = y | X_{s+\Delta t} = x)$$

per stati x, $y \in E$.

Processi stazionari

Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ si dice **stazionario** se, per ogni $\Delta t \geq 0$, la legge (congiunta) del processo coincide con quella del "traslato" $(X_{t+\Delta t})_{t\in\mathcal{T}}$ (purché i tempi $t + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$).

- Più precisamente, per ogni $k \geq 1$ e $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$ e $\Delta t \geq 0$, la legge congiunta di $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ coincide con quella di $(X_{t_1+\Delta t}, ..., X_{t_k+\Delta t})$, purché i tempi $t_i + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$.

Processi stazionari

Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ si dice **stazionario** se, per ogni $\Delta t \geq 0$, la legge (congiunta) del processo coincide con quella del "traslato" $(X_{t+\Delta t})_{t\in\mathcal{T}}$ (purché i tempi $t + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$).

- Più precisamente, per ogni $k \geq 1$ e $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$ e $\Delta t \geq 0$, la legge congiunta di $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ coincide con quella di $(X_{t_1+\Delta t}, ..., X_{t_k+\Delta t})$, purché i tempi $t_i + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$.
- In particolare, nel caso di stati discreti, vale

$$P(X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_k} = x_k) = P(X_{t_1+\Delta t} = x_1, \ldots, X_{t_k+\Delta t} = x_k),$$

per qualsiasi scelta di stati $x_1, \ldots, x_k \in E$.

Processi stazionari

Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ si dice **stazionario** se, per ogni $\Delta t \geq 0$, la legge (congiunta) del processo coincide con quella del "traslato" $(X_{t+\Delta t})_{t\in\mathcal{T}}$ (purché i tempi $t + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$).

- Più precisamente, per ogni $k \geq 1$ e $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$ e $\Delta t \geq 0$, la legge congiunta di $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ coincide con quella di $(X_{t_1+\Delta t}, ..., X_{t_k+\Delta t})$, purché i tempi $t_i + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$.
- In particolare, nel caso di stati discreti, vale

$$P(X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_k} = x_k) = P(X_{t_1+\Delta t} = x_1, \ldots, X_{t_k+\Delta t} = x_k),$$

  per qualsiasi scelta di stati $x_1, \ldots, x_k \in E$.
- Nel caso continuo l'identità sopra vale per le densita continue (scrivendo la densità p al posto della probabilità P).

Processi stazionari

Un processo $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ si dice **stazionario** se, per ogni $\Delta t \geq 0$, la legge (congiunta) del processo coincide con quella del "traslato" $(X_{t+\Delta t})_{t\in\mathcal{T}}$ (purché i tempi $t + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$).

- Più precisamente, per ogni $k \geq 1$ e $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathcal{T}$ e $\Delta t \geq 0$, la legge congiunta di $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ coincide con quella di $(X_{t_1+\Delta t}, ..., X_{t_k+\Delta t})$, purché i tempi $t_i + \Delta t$ appartengano a $\mathcal{T}$.
- In particolare, nel caso di stati discreti, vale

$$P(X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_k} = x_k) = P(X_{t_1+\Delta t} = x_1, \ldots, X_{t_k+\Delta t} = x_k),$$

  per qualsiasi scelta di stati $x_1, \ldots, x_k \in E$.
- Nel caso continuo l'identità sopra vale per le densita continue (scrivendo la densità p al posto della probabilità P).
- Se un processo X è stazionario, necessariamente tutte le leggi delle marginali X_t coincidono: basta usare $k = 1$ nella definizione sopra.