Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 7

Dario Trevisan

14/10/2024

Section 1

Indicatori caratteristici

Come riassumere la legge di una variabile?

Indicatori di *posizione*, di *dispersione* e di *correlazione*.

- Funzione di ripartizione (CDF), funzione di sopravvivenza

Come riassumere la legge di una variabile?

Indicatori di *posizione*, di *dispersione* e di *correlazione*.

- Funzione di ripartizione (CDF), funzione di sopravvivenza
- Funzione quantile, mediana (quartili, decili, ecc.)

Come riassumere la legge di una variabile?

Indicatori di *posizione*, di *dispersione* e di *correlazione*.

- Funzione di ripartizione (CDF), funzione di sopravvivenza
- Funzione quantile, mediana (quartili, decili, ecc.)
- Valor medio

Come riassumere la legge di una variabile?

Indicatori di *posizione*, di *dispersione* e di *correlazione*.

- Funzione di ripartizione (CDF), funzione di sopravvivenza
- Funzione quantile, mediana (quartili, decili, ecc.)
- Valor medio
- Varianza e deviazione standard

Come riassumere la legge di una variabile?

Indicatori di *posizione*, di *dispersione* e di *correlazione*.

- Funzione di ripartizione (CDF), funzione di sopravvivenza
- Funzione quantile, mediana (quartili, decili, ecc.)
- Valor medio
- Varianza e deviazione standard
- Covarianza e correlazione.

Come riassumere la legge di una variabile?

Indicatori di *posizione*, di *dispersione* e di *correlazione*.

- Funzione di ripartizione (CDF), funzione di sopravvivenza
- Funzione quantile, mediana (quartili, decili, ecc.)
- Valor medio
- Varianza e deviazione standard
- Covarianza e correlazione.
- Momenti e funzione generatrice dei momenti

Come riassumere la legge di una variabile?

Indicatori di *posizione*, di *dispersione* e di *correlazione*.

- Funzione di ripartizione (CDF), funzione di sopravvivenza
- Funzione quantile, mediana (quartili, decili, ecc.)
- Valor medio
- Varianza e deviazione standard
- Covarianza e correlazione.
- Momenti e funzione generatrice dei momenti
- Funzione caratteristica

Come riassumere la legge di una variabile?

Indicatori di *posizione*, di *dispersione* e di *correlazione*.

- Funzione di ripartizione (CDF), funzione di sopravvivenza
- Funzione quantile, mediana (quartili, decili, ecc.)
- Valor medio
- Varianza e deviazione standard
- Covarianza e correlazione.
- Momenti e funzione generatrice dei momenti
- Funzione caratteristica
- Cenni all'entropia

Funzione di ripartizione e di sopravvivenza

Data X a valori in $\mathbb{R}$, si è spesso interessati a conoscere la probabilità che X assuma valori "grandi".

- Esempio: la quantità di denaro che un investitore potrebbe guadagnare (se positiva) o perdere (se negativa) in una fissata data futura, a seconda dell'andamento del mercato

Definiamo

Funzione di ripartizione e di sopravvivenza

Data X a valori in $\mathbb{R}$, si è spesso interessati a conoscere la probabilità che X assuma valori "grandi".

- Esempio: la quantità di denaro che un investitore potrebbe guadagnare (se positiva) o perdere (se negativa) in una fissata data futura, a seconda dell'andamento del mercato

Definiamo

1. la **funzione di ripartizione** (o funzione cumulativa, in inglese *cumulative distribution function*, CDF,) di X

$$\underline{\mathbb{R} \ni x} \mapsto \mathrm{CDF}_X(x) = P(X \leq x) \in [0,1]$$

$$\mathrm{CDF}_X(t) = P(X \leq t)$$

Funzione di ripartizione e di sopravvivenza

Data X a valori in $\mathbb{R}$, si è spesso interessati a conoscere la probabilità che X assuma valori “grandi”.

- Esempio: la quantità di denaro che un investitore potrebbe guadagnare (se positiva) o perdere (se negativa) in una fissata data futura, a seconda dell’andamento del mercato

Definiamo

1. la **funzione di ripartizione** (o funzione cumulativa, in inglese *cumulative distribution function*, CDF,) di X

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{CDF}_X(x) = P(X \leq x).$$

2. la **funzione di sopravvivenza** (in inglese *survival function*) di X,

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathrm{SUR}_X(x) = P(X > x).$$

Come calcolarle

- Essendo $\{X \leq x\}$ e $\{X > x\}$ un sistema di alternative,

$$\mathrm{CDF}_X(x) + \mathrm{SUR}_X(x) = 1.$$

Come calcolarle

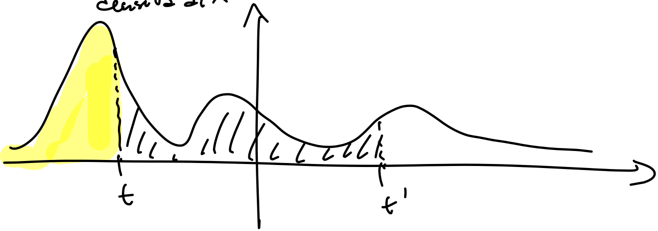
- Essendo $\{X \leq x\}$ e $\{X > x\}$ un sistema di alternative,

$$\mathrm{CDF}_X(x) + \mathrm{SUR}_X(x) = 1.$$

- Se la densità (discreta o continua) di X è nota, siccome $P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x])$, si trova

$$\mathrm{CDF}_X(x) = \begin{cases} \sum_{z \leq x} P(X = z) & \text{se } X \text{ ha densità discreta,} \\ \int_{-\infty}^{x} f(z)dz & \text{se } X \text{ ha densità continua.} \end{cases}$$

densità di X



Come calcolarle

- Essendo $\{X \leq x\}$ e $\{X > x\}$ un sistema di alternative,
$$\mathrm{CDF}_X(x) + \mathrm{SUR}_X(x) = 1.$$

- Se la densità (discreta o continua) di X è nota, siccome $P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x])$, si trova
$$\mathrm{CDF}_X(x) = \begin{cases} \sum_{z \leq x} P(X = z) & \text{se } X \text{ ha densità discreta,} \\ \int_{-\infty}^{x} f(z)dz & \text{se } X \text{ ha densità continua.} \end{cases}$$

- Possiamo quindi intepretare (almeno nel caso continuo) la $\mathrm{CDF}_X(x)$ come l'area del sottografico della densità da $-\infty$ fino ad x.

Come calcolarle

- Essendo $\{X \leq x\}$ e $\{X > x\}$ un sistema di alternative,

$$\mathrm{CDF}_X(x) + \mathrm{SUR}_X(x) = 1.$$

- Se la densità (discreta o continua) di X è nota, siccome $P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x])$, si trova

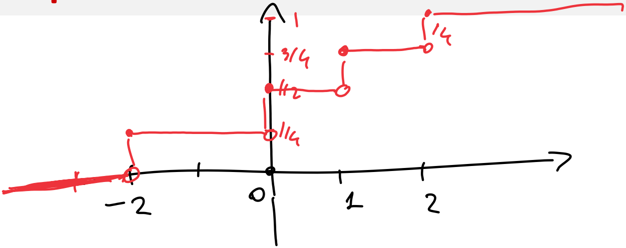
$$\mathrm{CDF}_X(x) = \begin{cases} \sum_{z \leq x} P(X = z) & \text{se } X \text{ ha densità discreta,} \\ \int_{-\infty}^{x} f(z) dz & \text{se } X \text{ ha densità continua.} \end{cases}$$

- Possiamo quindi intepretare (almeno nel caso continuo) la $\mathrm{CDF}_X(x)$ come l'area del sottografico della densità da $-\infty$ fino ad x.

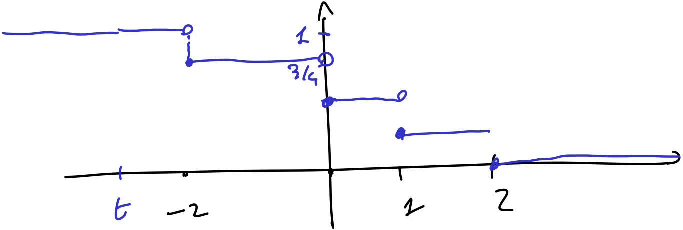
- Per la funzione di sopravvivenza,

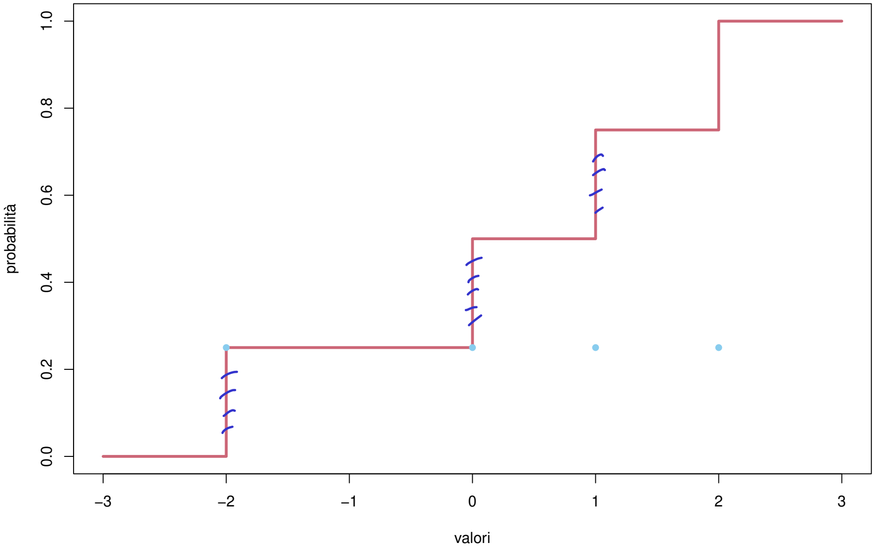
$$\mathrm{SUR}_X(x) = \begin{cases} \sum_{z > x} P(X = z) & \text{se } X \text{ ha densità discreta,} \\ \int_{x}^{+\infty} f(z) dz & \text{se } X \text{ ha densità continua,} \end{cases}$$

Esempio nel caso discreto:



- Sia X uniforme discreta sui valori $E = \{-2, 1, 0, 2\}$.




probabilità
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−3
−2
−1
0
1
2
3
valori

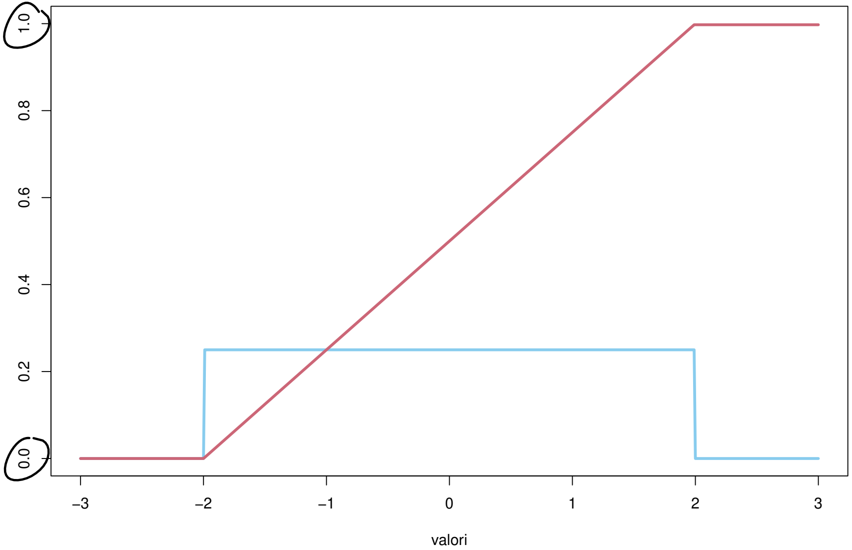
Esempio nel caso continuo

Si consideri una variabile aleatoria X avente densità uniforme continua nell'intervallo $[-2, 2]$, ossia per $x \in [-2, 2]$,

$$p(X = x) = 1/4.$$

Dato $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$CDF_X(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ \frac{(t+2)}{4} & t \in [-2, 2] \\ 1 & \text{se } t > 2 \end{cases}$$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−3
−2
−1
0
1
2
3
valori

Proprietà

1. vale $\mathrm{CDF}_X(x) \in [0, 1]$, essendo una probabilità.

Proprietà

1. vale $\mathrm{CDF}_X(x) \in [0,1]$, essendo una probabilità.
2. la funzione $x \mapsto \mathrm{CDF}_X(x)$ è crescente (ma non strettamente): se $x < z$, per la monotonia della probabilità,

$$\mathrm{CDF}_X(x) \leq \mathrm{CDF}_X(z)$$

Proprietà

1. vale $\mathrm{CDF}_X(x) \in [0,1]$, essendo una probabilità.
2. la funzione $x \mapsto \mathrm{CDF}_X(x)$ è crescente (ma non strettamente): se $x < z$, per la monotonia della probabilità,

$$\mathrm{CDF}_X(x) \leq \mathrm{CDF}_X(z)$$

3. vale $\mathrm{CDF}_X(-\infty) = 0$ e $\mathrm{CDF}_X(+\infty) = 1$ (nel senso di limiti opportuni):

Proprietà

1. vale $\mathrm{CDF}_X(x) \in [0,1]$, essendo una probabilità.
2. la funzione $x \mapsto \mathrm{CDF}_X(x)$ è crescente (ma non strettamente): se $x < z$, per la monotonia della probabilità,

$$\mathrm{CDF}_X(x) \leq \mathrm{CDF}_X(z)$$

3. vale $\mathrm{CDF}_X(-\infty) = 0$ e $\mathrm{CDF}_X(+\infty) = 1$ (nel senso di limiti opportuni):
4. Nel caso di densità discreta, la CDF_X è una funzione costante a tratti, mentre nel caso di variabili con densità continua, la CDF_X è una funzione continua.

Proprietà

1. vale $\mathrm{CDF}_X(x) \in [0,1]$, essendo una probabilità.
2. la funzione $x \mapsto \mathrm{CDF}_X(x)$ è crescente (ma non strettamente): se $x < z$, per la monotonia della probabilità,

$$\mathrm{CDF}_X(x) \leq \mathrm{CDF}_X(z)$$

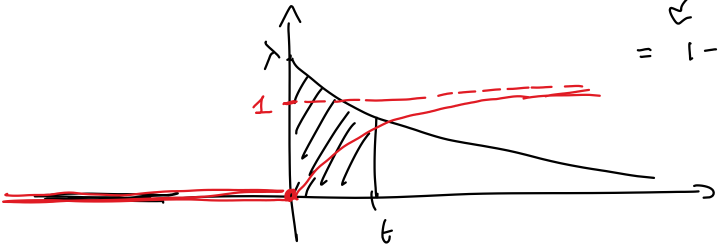
3. vale $\mathrm{CDF}_X(-\infty) = 0$ e $\mathrm{CDF}_X(+\infty) = 1$ (nel senso di limiti opportuni):
4. Nel caso di densità discreta, la CDF_X è una funzione costante a tratti, mentre nel caso di variabili con densità continua, la CDF_X è una funzione continua.
5. Per la funzione SUR, valgono proprietà analoghe: la funzione è decrescente e vale $\mathrm{SUR}_X(-\infty) = 1$ mentre $\mathrm{SUR}_X(+\infty) = 0$.

Un ulteriore esempio

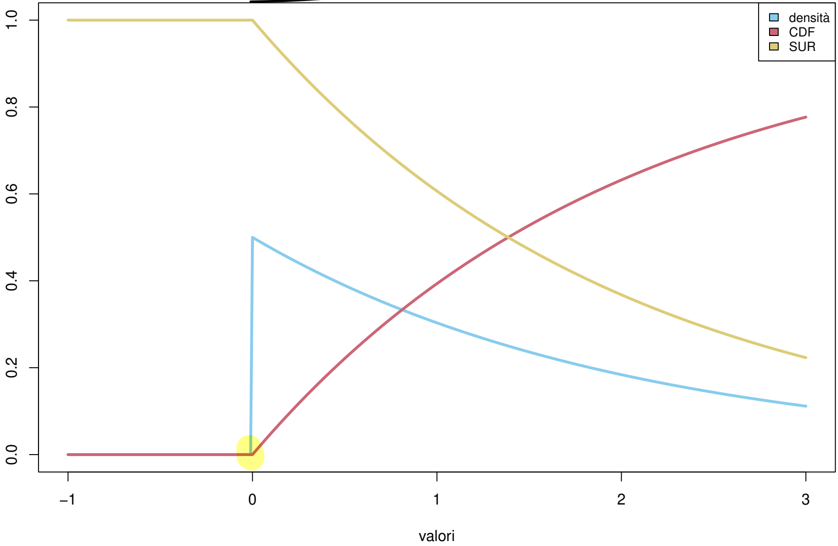
$$p(X=x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$CDF_X(t) = \int_{-\infty}^{t} p(X=u)\,du = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \int_0^{\lambda t} e^{-y}\,dy = -e^{-y}\Big|_0^{\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t} \end{cases}$$

Si consideri una variabile aleatoria X con densità esponenziale di parametro $\lambda > 0$.



$$\boxed{SUR_{Exp(\lambda)}(t) = \underline{e^{-\lambda t}} \quad \text{se } t \geq 0}$$



Dalla CDF alla densità

- Nel caso discreto, la densità è non nulla solo nei valori $x \in \mathbb{R}$ in cui la $\mathrm{CDF}_X(x)$ ha un salto, e il valore della densità in quel punto è proprio *l'ampiezza del salto*.

Dalla CDF alla densità

- Nel caso discreto, la densità è non nulla solo nei valori $x \in \mathbb{R}$ in cui la $\mathrm{CDF}_X(x)$ ha un salto, e il valore della densità in quel punto è proprio *l'ampiezza del salto*.

- Nel caso di densità continua, per invertire la formula

$$\int_{-\infty}^{x} p(X = z)dz = \mathrm{CDF}_X(x)$$

è sufficiente applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale, e quindi derivare la CDF_X:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{CDF}_X(x) = p(X = x).$$

(nei punti in cui CDF_X è derivabile)

Dalla CDF alla densità

- Nel caso discreto, la densità è non nulla solo nei valori $x \in \mathbb{R}$ in cui la $\mathrm{CDF}_X(x)$ ha un salto, e il valore della densità in quel punto è proprio *l'ampiezza del salto*.

- Nel caso di densità continua, per invertire la formula

$$\int_{-\infty}^{x} p(X = z) dz = \mathrm{CDF}_X(x)$$

  è sufficiente applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale, e quindi derivare la CDF_X:

$$\frac{d}{dx} \mathrm{CDF}_X(x) = p(X = x).$$

  (nei punti in cui CDF_X è derivabile)

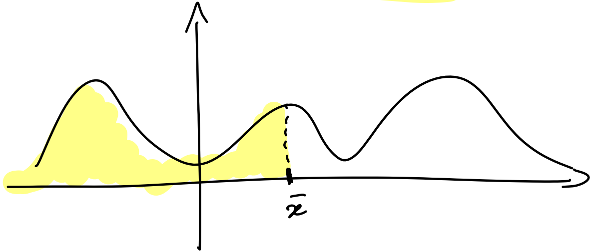
- Per la SUR_X basta cambiare di segno: ad esempio (caso continuo)

$$-\frac{d}{dx} \mathrm{SUR}_X(x) = f(x).$$

Mediana (definizione intuitiva)

- La *mediana* di X è definita come un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$, se esiste, tale che

$$\boxed{\mathrm{CDF}_X(\bar{x}) = \frac{1}{2}.}$$



Mediana (definizione intuitiva)

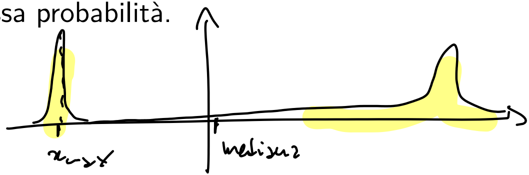
- La *mediana* di X è definita come un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$, se esiste, tale che

$$\mathrm{CDF}_X(\bar{x}) = \frac{1}{2}.$$

- Significa che

$$P(X \leq \bar{x}) = P(X > \bar{x}) = \frac{1}{2},$$

ossia $\bar{x}$ è scelta in modo che le due alternative $\{X \leq \bar{x}\}$ e $\{X > \bar{x}\}$ abbiano la stessa probabilità.

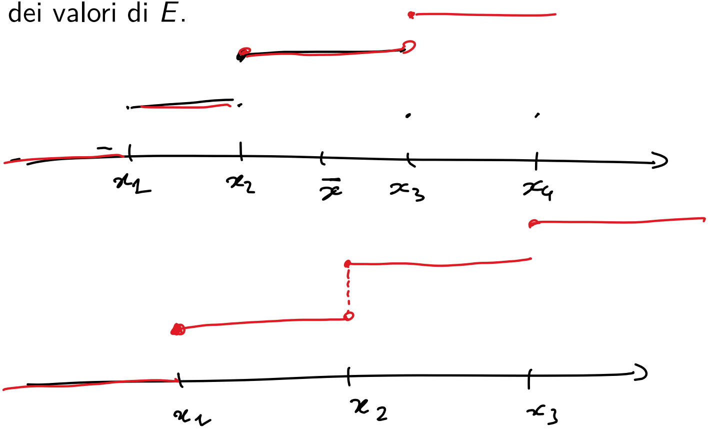


Mediana (definizione intuitiva)

- La *mediana* di X è definita come un valore $\bar{x} \in \mathbb{R}$, se esiste, tale che
$$\mathrm{CDF}_X(\bar{x}) = \frac{1}{2}.$$
- Significa che
$$P(X \leq \bar{x}) = P(X > \bar{x}) = \frac{1}{2},$$
ossia $\bar{x}$ è scelta in modo che le due alternative $\{X \leq \bar{x}\}$ e $\{X > \bar{x}\}$ abbiano la stessa probabilità.
- La mediana è quindi un indicatore di "centralità" per X, alternativo alla moda.

Esempi

- se la densità di X è uniforme (diciamo su un insieme E con un numero pari di valori), significa che metà dei valori possibili di X sono $\leq \bar{x}$, mentre i rimanenti sono $> \bar{x}$. In questo caso invece una moda è uno qualsiasi dei valori di E.



Esempi

- se la densità di X è uniforme (diciamo su un insieme E con un numero pari di valori), significa che metà dei valori possibili di X sono $\leq \bar{x}$, mentre i rimanenti sono $> \bar{x}$. In questo caso invece una moda è uno qualsiasi dei valori di E.

- Sia X uniforme su

$$E = \{0, 0.1, 0.15, 0.3, 0.4, 0.7, 0.73, 0.9, 0.95, 1.1\}$$

Una mediana per X è $\bar{x} = 0.4$, ma anche un qualsiasi valore compreso tra 0.4 e 0.7 (escluso)

- Nel caso continuo NON si pone il problema perché $x \mapsto \mathrm{CDF}_X(x)$ è funzione continua.

$$1 - e^{-\lambda \bar{x}} = \frac{1}{2} \qquad e^{-\lambda \bar{x}} = \frac{1}{2} \qquad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda \bar{x} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$$

Esempi

- se la densità di X è uniforme (diciamo su un insieme E con un numero pari di valori), significa che metà dei valori possibili di X sono $\leq \bar{x}$, mentre i rimanenti sono $> \bar{x}$. In questo caso invece una moda è uno qualsiasi dei valori di E.

- Sia X uniforme su

$$E = \{0, 0.1, 0.15, 0.3, 0.4, 0.7, 0.73, 0.9, 0.95, 1.1\}$$

Una mediana per X è $\bar{x} = 0.4$, ma anche un qualsiasi valore compreso tra 0.4 e 0.7 (escluso)

- Nel caso di una variabile esponenziale di parametro λ,

$$1 - e^{-\lambda \bar{x}} = \frac{1}{2} \quad \leftrightarrow \quad \lambda \bar{x} = \log(2),$$

ossia

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\log(2)}{\lambda}.}$$

Funzione quantile

- Problemi della mediana (così definita)

Funzione quantile

- Problemi della mediana (così definita)
  1. non necessariamente la mediana esiste sempre

Funzione quantile

- Problemi della mediana (così definita)
  1. non necessariamente la mediana esiste sempre
  2. non è unicamente determinata

Funzione quantile

- Problemi della mediana (così definita)
  1. non necessariamente la mediana esiste sempre
  2. non è unicamente determinata
  3. non è facile calcolarla

Funzione quantile

- Problemi della mediana (così definita)
  1. non necessariamente la mediana esiste sempre
  2. non è unicamente determinata
  3. non è facile calcolarla
- Per risolvere i primi due, si introduce una inversa generalizzata CDF_X, detta funzione *quantile* di X

$$q_X : (0,1) \to \mathbb{R}$$

che ad ogni *livello* $\alpha \in (0,1)$ associa

$$q_X(\alpha) = \min\{x \in \mathbb{R} : \mathrm{CDF}_X(x) \geq \alpha\}.$$

$$\mathrm{CDF}_X(q_X(\alpha)) \geq \alpha$$

Funzione quantile

- Problemi della mediana (così definita)
  1. non necessariamente la mediana esiste sempre
  2. non è unicamente determinata
  3. non è facile calcolarla
- Per risolvere i primi due, si introduce una inversa generalizzata CDF_X, detta funzione *quantile* di X

$$q_X : (0,1) \to \mathbb{R}$$

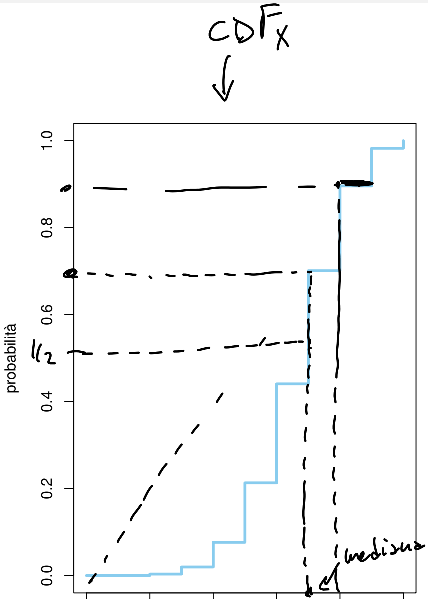
che ad ogni *livello* $\alpha \in (0,1)$ associa

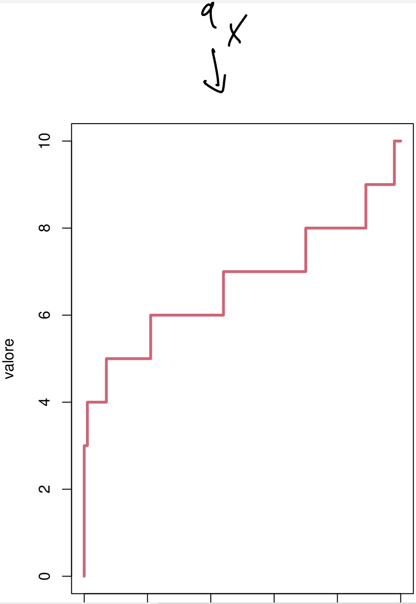
$$q_X(\alpha) = \min \{ x \in \mathbb{R} : \mathrm{CDF}_X(x) \geq \alpha \} .$$

- se X ha densità continua, allora

$$\mathrm{CDF}_X(q_X(\alpha)) = \alpha.$$

Un esempio discreto



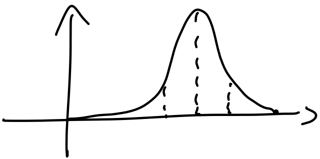


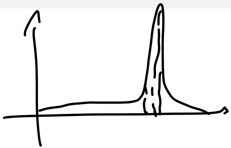
Mediana, quartili, decili ecc.

Si definiscono quindi

- la mediana di X come il valore $\bar{x} = q_X(1/2)$.

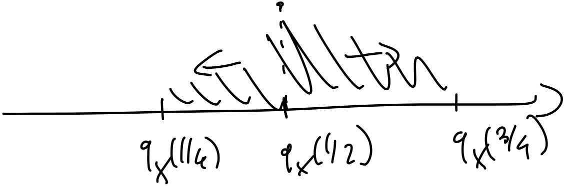
Mediana, quartili, decili ecc.





Si definiscono quindi

- la mediana di X come il valore $\bar{x} = q_X(1/2)$.
- i *quartili*, $q_X(\alpha)$ corrispondenti ad $\alpha \in \{1/4, 2/4, 3/4\}$ (detti il primo, secondo e terzo quartile),



Mediana, quartili, decili ecc.

Si definiscono quindi

- la mediana di X come il valore $\bar{x} = q_X(1/2)$.
- i *quartili*, $q_X(\alpha)$ corrispondenti ad $\alpha \in \{1/4, 2/4, 3/4\}$ (detti il primo, secondo e terzo quartile),
- i *decili* $q_X(\alpha)$ per $\alpha = k/10$,

Mediana, quartili, decili ecc.

Si definiscono quindi

- la mediana di X come il valore $\bar{x} = q_X(1/2)$.
- i *quartili*, $q_X(\alpha)$ corrispondenti ad $\alpha \in \{1/4, 2/4, 3/4\}$ (detti il primo, secondo e terzo quartile),
- i *decili* $q_X(\alpha)$ per $\alpha = k/10$,
- i *percentili* $q_X(\alpha)$ per $\alpha = k/100$.

Section 2

Valor medio

Definizione

- La mediana, i quartili, decili ecc., sono efficaci ma difficili da calcolare.

Definizione

- La mediana, i quartili, decili ecc., sono efficaci ma difficili da calcolare.
- il valor medio (media, valore atteso o speranza matematica) di X a valori in $\mathbb{R}$, è una *media* dei valori di X *ponderata* tramite la densità (discreta o continua):

$$\mathbb{E}[X|I] = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} xP(X = x|I) & \text{se } X \text{ ha densità discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xp(X = x|I)dx & \text{se } X \text{ ha densità continua.} \end{cases}$$

$$\langle X \rangle = \bar{X}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(X=x|I)\,dx \longrightarrow \text{"centro di probabilità"}$$

Definizione

- La mediana, i quartili, decili ecc., sono efficaci ma difficili da calcolare.
- il valor medio (media, valore atteso o speranza matematica) di X a valori in $\mathbb{R}$, è una *media* dei valori di X *ponderata* tramite la densità (discreta o continua):

$$\mathbb{E}[X|I] = \begin{cases} \sum_{x\in\mathbb{R}} xP(X=x|I) & \text{se } X \text{ ha densità discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xp(X=x|I)dx & \text{se } X \text{ ha densità continua.} \end{cases}$$

- La notazione $\mathbb{E}[X|I]$ ricorda $P(X=x|I)$ (si sottointende a volte I).

$\mathbb{E}[X]$

Definizione

- La mediana, i quartili, decili ecc., sono efficaci ma difficili da calcolare.
- il valor medio (media, valore atteso o speranza matematica) di X a valori in $\mathbb{R}$, è una *media* dei valori di X *ponderata* tramite la densità (discreta o continua):

$$\mathbb{E}[X|I] = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} xP(X = x|I) & \text{se } X \text{ ha densità discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xp(X = x|I) dx & \text{se } X \text{ ha densità continua.} \end{cases}$$

- La notazione $\mathbb{E}[X|I]$ ricorda $P(X = x|I)$ (si sottointende a volte I).
- Si richiede che serie o integrali convergano assolutamente, ossia

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| P(X = x|I) < \infty \text{ oppure } \int_{-\infty}^{\infty} |x| p(X = x|I) dx < \infty.$$

altrimenti il valor medio *non esiste* (può accadere).

Esempi

Sia $X \in \{0,1\}$ la variabile indicatrice di un evento A, ossia $\{X=1\} = A$.

- La legge di X è Bernoulli di parametro $p = P(X=1|I) = P(A|I)$

Oss Legge Bernoulli p = legge binomiale di parametri $n=1$, p

Esempi

Sia $X \in \{0,1\}$ la variabile indicatrice di un evento A, ossia $\{X=1\}=A$.

- La legge di X è Bernoulli di parametro $p = P(X=1|I) = P(A|I)$
- Per definizione

$$\mathbb{E}[X|I] = 0 \cdot P(X=0|I) + 1 \cdot P(X=1|I) = P(X=1|I) = P(A|I) = p,$$

Esempi

Sia $X \in \{0, 1\}$ la variabile indicatrice di un evento A, ossia $\{X = 1\} = A$.

- La legge di X è Bernoulli di parametro $p = P(X = 1|I) = P(A|I)$
- Per definizione

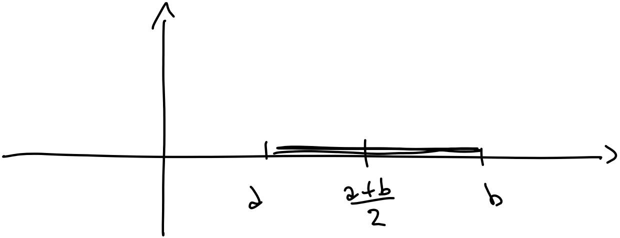
$$\mathbb{E}[X|I] = 0 \cdot P(X = 0|I) + 1 \cdot P(X = 1|I) = P(X = 1|I) = P(A|I) = p,$$

- Eccetto i casi limite $p = 0$, oppure $p = 1$, il valor medio non è uno dei possibili valori di X.

Sia X una variabile aleatoria uniforme continua sull'intervallo (a, b).

- Il valor medio di X è

$$\int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b^2 - a^2)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$



Sia X una variabile aleatoria uniforme continua sull'intervallo (a, b).

- Il valor medio di X è

$$\int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b^2 - a^2)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

- Notiamo che in questo caso il valor medio è uno dei possibili valori e coincide con la mediana.

Sia X una variabile aleatoria con densità binomiale di parametri $n = 10$, $p = 1/3$. Allora

$$\boxed{\sum_{k=0}^{10} k \underbrace{\binom{10}{k} \frac{1}{3^k} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}}_{P(X=k)}} = \mathbb{E}[X \mid \mathrm{Bin}(10, 1/3)]$$

- Si può calcolarlo numericamente:

```
## [1] 3.333333
```

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \frac{10}{3} = n \cdot p}$$

Definizione generale

- ci limiteremo al calcolo (esplicito) del valor medio nei casi in cui X ammetta densità discreta o continua.

Definizione generale

- ci limiteremo al calcolo (esplicito) del valor medio nei casi in cui X ammetta densità discreta o continua.
- è possibile dare una definizione generale, che non usa la densità:

$$\mathbb{E}[X|I] = \int_0^\infty P(X > x|I)dx - \int_{-\infty}^0 P(X < x)dx,$$

La formula di disintegrazione per il valor medio

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i)}$$

La proprietà fondamentale è l'analoga della *formula di disintegrazione* per la probabilità, che possiamo scrivere in termini di sistemi di alternative o variabili aleatorie (discrete o continue).

- Sia X una variabile aleatoria reale e sia $Y \in E$ una variabile aleatoria:

La formula di disintegrazione per il valor medio

La proprietà fondamentale è l'analoga della *formula di disintegrazione* per la probabilità, che possiamo scrivere in termini di sistemi di alternative o variabili aleatorie (discrete o continue).

- Sia X una variabile aleatoria reale e sia $Y \in E$ una variabile aleatoria:
  1. Se Y ha densità discreta, vale

$$\mathbb{E}[X|I] = \sum_{y \in E} \mathbb{E}[X|I, Y = y] \, P(Y = y|I),$$

La formula di disintegrazione per il valor medio

La proprietà fondamentale è l'analoga della *formula di disintegrazione* per la probabilità, che possiamo scrivere in termini di sistemi di alternative o variabili aleatorie (discrete o continue).

- Sia X una variabile aleatoria reale e sia $Y \in E$ una variabile aleatoria:
  1. Se Y ha densità discreta, vale
  $$\mathbb{E}[X|I] = \sum_{y \in E} \mathbb{E}[X|I, Y = y] P(Y = y|I),$$
  2. Se $E = \mathbb{R}^d$ e Y ha densità continua, vale
  $$\mathbb{E}[X|I] = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}[X|I, Y = y] p(Y = y|I) dy.$$

Dimostrazione

Nel caso Y discreto X discreta (I non è scritto)

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x\, P(X=x)$$

$\downarrow$ disint.

$$= \sum_x x \left(\sum_y P(X=x \mid Y=y)\, P(Y=y) \right)$$

$$= \sum_y \left[\sum_x x\, P(X=x \mid Y=y) \right] P(Y=y)$$

$$= \sum_y \mathbb{E}[X \mid Y=y]\, P(Y=y)$$

Proprietà del valor medio

Siano X, Y variabili aleatorie reali, e siano a, b, $c \in \mathbb{R}$ (non aleatorie). Allora

1. (linearità) vale $\mathbb{E}[aX|I] = a\mathbb{E}[X|I]$ e $\mathbb{E}[X+Y|I] = \mathbb{E}[X|I] + \mathbb{E}[Y|I]$.

Proprietà del valor medio

Siano X, Y variabili aleatorie reali, e siano a, b, $c \in \mathbb{R}$ (non aleatorie). Allora

1. (linearità) vale $\mathbb{E}[aX|I] = a\mathbb{E}[X|I]$ e $\mathbb{E}[X+Y|I] = \mathbb{E}[X|I] + \mathbb{E}[Y|I]$.
2. (monotonia) se $P(X \geq Y|I) = 1$, allora $\mathbb{E}[X|I] \geq \mathbb{E}[Y|I]$. In particolare, se $P(X \in [a,b]|I) = 1$, allora $\mathbb{E}[X|I] \in [a,b]$.

Proprietà del valor medio

Siano X, Y variabili aleatorie reali, e siano a, b, $c \in \mathbb{R}$ (non aleatorie). Allora

1. (linearità) vale $\mathbb{E}[aX|I] = a\mathbb{E}[X|I]$ e $\mathbb{E}[X+Y|I] = \mathbb{E}[X|I] + \mathbb{E}[Y|I]$.
2. (monotonia) se $P(X \geq Y|I) = 1$, allora $\mathbb{E}[X|I] \geq \mathbb{E}[Y|I]$. In particolare, se $P(X \in [a,b]|I) = 1$, allora $\mathbb{E}[X|I] \in [a,b]$.
3. (diseguaglianza di Markov) se X è a valori non-negativi (rispetto all'informazione I), allora per ogni $c > 0$,

$$\boxed{P(X > c|I) \leq \frac{\mathbb{E}[X|I]}{c}.}$$

Dimostrazione 1. (linearità)

X a valori in E

OSS Se $X = c$ è costante (rispetto all'inf. I)

$$\mathbb{E}[X|I] = c \cdot P(X=c|I) = c$$

1) $\mathbb{E}[aX] \overset{?}{=} a\,\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[aX] = \sum_{x\in E} (ax) P(\cancel{a}X = \cancel{a}x) = a \sum_{x \in E} x\, P(X=x)$$

disint. con $Y = X$

$$= \sum_{x\in E} \mathbb{E}[\underbrace{aX}_{\text{è } = ax} \mid X = x] P(X=x) =$$

$$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_y \underbrace{\mathbb{E}[X+y \mid Y=y]}_{(\mathbb{E}[X|Y=y]+y)} P(Y=y) = \mathbb{E}[X] + \overbrace{\sum_y y\, P(Y=y)}^{= \mathbb{E}[Y]}$$

Dimostrazione 2. (monotonia)

$$P(X \geq Y \mid I) = 1 \qquad Z = X - Y \qquad P(Z \geq 0 \mid I) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z \mid I] = \sum_{z \geq 0} z \, P(Z = z \mid I) \geq 0$$

$$\underline{\underline{0 \leq}} \, \mathbb{E}[Z \mid I] = \mathbb{E}[X - Y \mid I] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y \mid I]$$

$$\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$$

Dimostrazione 3. (Markov)

$X \geq 0$

$$\mathbb{E}[X \mid I] = \underbrace{\mathbb{E}[X \mid X > c]}_{\geq c} P(X > c) + \underbrace{\mathbb{E}[X \mid X \leq c]}_{\geq 0} \underbrace{P(X \leq c)}_{\geq 0}$$

sist. di alternative $\{X > c\}$ $\{X \leq c\}$

$$\geq c P(X > c) + 0$$

Collegamento tra quantile e valor medio

- Scegliamo $c = q_X(\alpha)$ nella diseguaglianza di Markov.

$$P(X > c) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{c}$$

$$\left(P(X > q_X(\alpha)) = 1 - \alpha \right)$$

$$1 - \alpha \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{q_X(\alpha)}$$

Collegamento tra quantile e valor medio

- Scegliamo $c = q_X(\alpha)$ nella diseguaglianza di Markov.
- Supponendo che $X \geq 0$ e che abbia densità continua,

$$P(X \geq q_X(\alpha)) = 1 - \mathrm{CDF}_X(q_X(\alpha)) = 1 - \alpha,$$

Collegamento tra quantile e valor medio

- Scegliamo $c = q_X(\alpha)$ nella diseguaglianza di Markov.
- Supponendo che $X \geq 0$ e che abbia densità continua,

$$P(X \geq q_X(\alpha)) = 1 - \mathrm{CDF}_X(q_X(\alpha)) = 1 - \alpha,$$

- quindi la diseguaglianza implica che

$$1 - \alpha \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{q_X(\alpha)}.$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$$\boxed{q_X\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2\,\mathbb{E}[X]}$$

Collegamento tra quantile e valor medio

- Scegliamo $c = q_X(\alpha)$ nella diseguaglianza di Markov.
- Supponendo che $X \geq 0$ e che abbia densità continua,

$$P(X \geq q_X(\alpha)) = 1 - \mathrm{CDF}_X(q_X(\alpha)) = 1 - \alpha,$$

- quindi la diseguaglianza implica che

$$1 - \alpha \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{q_X(\alpha)}.$$

- Ad esempio, con $\alpha = 1/2$ si trova che

$$q_X(1/2) \leq 2\mathbb{E}[X].$$

Valor medio di $g(X)$

$g(X)$ potrebbe NON continua

Sia $X \in E$ una variabile aleatoria con densità discreta oppure continua (se $E = \mathbb{R}^d$).

- Data $g : E \to \mathbb{R}$, vale

$$\mathbb{E}[g(X)|I] = \begin{cases} \sum_{x \in E} g(x) P(X = x|I) & \text{se } X \text{ ha densità discreta,} \\ \int_E g(x) p(X = x|I) dx & \text{se } X \text{ ha densità continua.} \end{cases}$$

- Nel caso $E \subseteq \mathbb{R}$ e $g(x) = x$ abbiamo la definizione!
- NON serve la densità di $g(X)$

Valor medio di $g(X)$

Sia $X \in E$ una variabile aleatoria con densità discreta oppure continua (se $E = \mathbb{R}^d$).

- Data $g : E \to \mathbb{R}$, vale

$$\mathbb{E}\left[g(X)|I\right] = \begin{cases} \sum_{x \in E} g(x) P(X = x|I) & \text{se } X \text{ ha densità discreta,} \\ \int_E g(x) p(X = x|I) dx & \text{se } X \text{ ha densità continua.} \end{cases}$$

- Per calcolare il valor medio di una variabile composta $g(X)$, basta conoscere la densità di X (*non* serve calcolare quella di $g(X)$)!

Dimostrazione (X discreta)

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in E} \underbrace{\mathbb{E}[g(X) \mid \underline{\underline{X=x}}]}_{= g(x)} P(X=x)$$

$$= \sum_{x \in E} g(x) P(X=x)$$

Esempio

Sia X una variabile con densità discreta binomiale di parametri $n = 20$, $p = 1/4$. Si trova

$$\mathbb{E}\left[X^3\right] = \sum_{k=0}^{20} k^3 \binom{20}{k} \frac{1}{4^k} \left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}.$$

Possiamo calcolarlo numericamente.

```
## [1] 183.125
```

Caso continuo: Se $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$

$$\mathbb{E}[X^3] = \int_0^{+\infty} x^3 \left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx$$

Valor medio e indipendenza

Siano X, Y variabili aleatorie reali indipendenti (rispetto ad una informazione I). Allora

$$\mathbb{E}[XY|I] = \mathbb{E}[X|I]\,\mathbb{E}[Y|I].$$

- Ricordando che se X, Y sono indipendenti anche eventuali composizioni $g(X)$ e $h(Y)$ lo sono, segue che

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)|I] = \mathbb{E}[g(X)|I]\,\mathbb{E}[h(Y)|I].$$

(a volte, specie negli esercizi, si è appunto in questa situazione apparentemente più generale)

Dimostrazione

Valor medio e indipendenza

Siano X, Y variabili aleatorie reali indipendenti (rispetto ad una informazione I). Allora

$$\mathbb{E}\left[XY|I\right] = \mathbb{E}\left[X|I\right]\mathbb{E}\left[Y|I\right].$$

- Ricordando che se X, Y sono indipendenti anche eventuali composizioni $g(X)$ e $h(Y)$ lo sono, segue che

$$\mathbb{E}\left[g(X)h(Y)|I\right] = \mathbb{E}\left[g(X)|I\right]\mathbb{E}\left[h(Y)|I\right].$$

(a volte, specie negli esercizi, si è appunto in questa situazione apparentemente più generale)

Dimostrazione

X, Y discrete

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_y y\, \mathbb{E}[X \mid Y=y]\, P(Y=y)$$

$$= \sum_y y\, P(Y=y) \cdot \mathbb{E}[X \mid \cancel{Y=y}] = \mathbb{E}[Y]\,\mathbb{E}[X]$$

$$\sum_x x\, P(X=x \mid \cancel{Y=y}) = \sum_x x\, P(X=x)$$

$$\mathbb{E}[X \mid Y=y] = \mathbb{E}[X]$$

Il caso vettoriale

Data una variabile $X = (X_1, \ldots, X_d)$ a valori in $\mathbb{R}^d$, si definisce il *vettore dei valor medi* (o vettore delle medie) di X come il vettore in $\mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}\left[X|I\right] = (\mathbb{E}\left[X_1|I\right], \ldots, \mathbb{E}\left[X_d|I\right]).$$

Linearità (caso vettoriale)

- Additività:
$$\mathbb{E}[X + Y|I] = \mathbb{E}[X|I] + \mathbb{E}[Y|I]$$
per variabili aleatorie X, Y a valori in $\mathbb{R}^d$.

Linearità (caso vettoriale)

- Additività:
$$\mathbb{E}[X + Y | I] = \mathbb{E}[X|I] + \mathbb{E}[Y|I]$$
per variabili aleatorie X, Y a valori in $\mathbb{R}^d$.
- trasformazioni lineari affini del vettore dei valor medi: data una variabile aleatoria $X \in \mathbb{R}^d$ e posta
$$Y = AX + b \quad \text{ossia} \quad Y_i = \sum_{j=1}^{d} A_{ij} X_j + b_i,$$
dove $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$ è una matrice e $b \in \mathbb{R}^k$ è un vettore (noti, ossia costanti rispetto all'informazione I), vale
$$\mathbb{E}[Y|I] = A\mathbb{E}[X|I] + b, \quad \text{ossia} \quad \mathbb{E}[Y_i|I] = \sum_{j=1}^{d} A_{ij} \mathbb{E}[X_j|I] + b_i.$$

Section 3

Varianza e deviazione standard

Varianza

La moda, la mediana ed il valore medio sono tutti indicatori *puntuali*, riassumono tutta la legge con un singolo valore.

Per descrivere in modo più efficace una variabile X si affianca un indicatore della dispersione, ossia della "concentrazione" della sua legge intorno ad un indicatore puntuale.

- Un indicatore di dispersione molto usato è la *deviazione standard* (o scarto quadratico medio), definita come

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}\,(X)},$$

dove la *varianza* è

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\,[X])^2\right].$$

L'unità di misura di σ_X è la stessa di X, mentre $\mathrm{Var}(X)$ ha come unità di misura il quadrato dell'unità di X.

Operativamente:

1. si calcola il valor medio di X,

L'unità di misura di σ_X è la stessa di X, mentre $\mathrm{Var}(X)$ ha come unità di misura il quadrato dell'unità di X.

Operativamente:

1. si calcola il valor medio di X,
2. si considera lo scarto (variabile aleatoria centrata)

$$X - \mathbb{E}[X],$$

L'unità di misura di σ_X è la stessa di X, mentre $\mathrm{Var}(X)$ ha come unità di misura il quadrato dell'unità di X.

Operativamente:

1. si calcola il valor medio di X,
2. si considera lo scarto (variabile aleatoria centrata)
$$X - \mathbb{E}[X],$$
3. se ne prende il quadrato e il valor medio
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right].$$

L'unità di misura di σ_X è la stessa di X, mentre $\mathrm{Var}(X)$ ha come unità di misura il quadrato dell'unità di X.

Operativamente:

1. si calcola il valor medio di X,
2. si considera lo scarto (variabile aleatoria centrata)
$$X - \mathbb{E}[X],$$
3. se ne prende il quadrato e il valor medio
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right].$$
4. Per la deviazione standard si prende la radice quadrata
$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right].$$

Partendo dalla densità di X e usando $g(x) = (x - \mathbb{E}[X])^2$, si trova la formula

$$\mathrm{Var}(X) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[X])^2 P(X = x) & \text{se } X \text{ ha densità discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 p(X = x) dx & \text{se } X \text{ ha densità continua.} \end{cases}$$

Esempi

Espressione alternativa per la varianza

Vale l'indentità

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left(\mathbb{E}\,[X]\right)^2.$$

Dimostrazione

Un altro esempio

Diseguaglianza di Chebyshev

Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria. Allora per ogni costante $k > 0$, si ha

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| > k) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{k^2},$$

o, equivalentemente, per ogni $k \geq 1$,

$$P(\mathbb{E}[X] - k\sigma_X \leq X \leq \mathbb{E}[X] + k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

- Una conseguenza è che, se $\sigma_X = 0$ la variabile X è constante con probabilità 1

Diseguaglianza di Chebyshev

Sia $X \in \mathbb{R}$ una variabile aleatoria. Allora per ogni costante $k > 0$, si ha

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| > k) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{k^2},$$

o, equivalentemente, per ogni $k \geq 1$,

$$P(\mathbb{E}[X] - k\sigma_X \leq X \leq \mathbb{E}[X] + k\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

- Una conseguenza è che, se $\sigma_X = 0$ la variabile X è constante con probabilità 1
- Informalmente scriviamo

$$X \approx \mathbb{E}[X] \pm \sigma_X$$

Dimostrazione

Standardizzazione

Data X, la variabile $X - \mathbb{E}[X]$ è centrata, $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])] = 0$,

La *standardizzazione* X è la variabile

$$\hat{X} = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma_X},$$

che è centrata $\mathbb{E}\left[\hat{X}\right] = 0$ e ha deviazione standard $\sigma_{\hat{X}} = 1$.

Esempi