Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 5

Dario Trevisan

.

7/10/2024

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{”}$$

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{''}$$

- Notazione generale $\{X \in U\}$, $U \subseteq E$.

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{"la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{"}$$

- Notazione generale $\{X \in U\}$, $U \subseteq E$.
- Legge di una variabile $U \mapsto P(X \in U|I)$

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{”}$$

- Notazione generale $\{X \in U\}$, $U \subseteq E$.
- Legge di una variabile $U \mapsto P(X \in U|I)$
- Densità discreta $(P(X = x|I))_{x \in E} \Rightarrow P(X \in U) = \sum_{x \in U} P(X = x)$

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{”}$$

- Notazione generale $\{X \in U\}$, $U \subseteq E$.
- Legge di una variabile $U \mapsto P(X \in U|I)$
- Densità discreta $(P(X = x|I))_{x \in E} \Rightarrow P(X \in U) = \sum_{x \in U} P(X = x)$
- Densità continua $(p(X = x|I))_{x \in E} \Rightarrow P(X \in U) = \int_U p(X = x) dx$

Caso vettoriale $P(X \in U) = \int_U p(X = x)\, dx_1 \dots dx_d$

Riepilogo

- Una variabile aleatoria X a valori in E indentifica un sistema di alternative

$$\{X = x\} = \text{“la quantità } X \text{ assume il valore } x\text{”}$$

- Notazione generale $\{X \in U\}$, $U \subseteq E$.
- Legge di una variabile $U \mapsto P(X \in U|I)$
- Densità discreta $(P(X = x|I))_{x \in E} \Rightarrow P(X \in U) = \sum_{x \in U} P(X = x)$
- Densità continua $(p(X = x|I))_{x \in E} \Rightarrow P(X \in U) = \int_U P(X = x) dx$
- ATTENZIONE: esistono variabili X né discrete né continue!

Section 1

Trasformazioni di variabili aleatorie

Composizione tramite funzione

$X \in E$

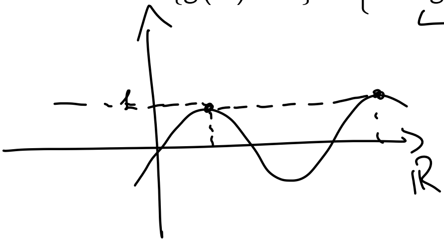
$X : \Omega \to E$

Sia X a valori in E e $g : E \to F$ una funzione.

- Definiamo la **variabile composta** $g(X)$ tramite il sistema di alternative, per $z \in F$,

$$\{g(X) = z\} = \left\{ X \in \underbrace{g^{-1}(z)} \right\}.$$

è un sistema di alternative al variare di $z \in F$



Esempi

OSS Nella teoria di Kolmogorov

$X : \Omega \to E$

$g : E \to F$

$g(X) = g \circ X$

X a valori in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (lancio di un dado)

$$g(x) = \begin{cases} 100\,€ & \text{se } x \text{ è pari} \\ -100\,€ & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$g(X) = \begin{cases} 100\,€ & \text{se } X \in \{2, 4, 6\} \\ -100\,€ & \text{se } X \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

Densità di $g(X)$ $\quad P(g(X) = 100\,€) = \frac{1}{2}$

Trasformazione della densità: caso discreto

Se X è discreta (e quindi $g(X)$ è discreta)

$$P(g(X) = z|I) = \sum_{x \in g^{-1}(z)} P(X = x|I).$$

$$\shortparallel$$

$$P(X \in g^{-1}(z)|I) =$$

Se X ha densità continua e $g(X)$ è discreta,

$$P(g(X) = z|I) = \int_{g^{-1}(z)} p(X = x|I)dx.$$

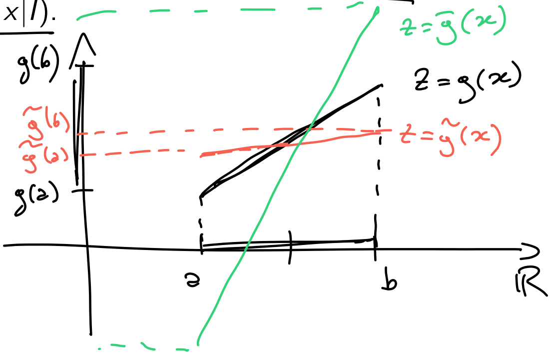
$$\shortparallel$$

$$P(X \in \underbrace{g^{-1}(z)}_{U}|I) =$$

Trasformazione della densità: caso continuo

Segue da un cambio di variabile il seguente risultato:

- Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$, con densità continua $p(X = x|I)$.



Trasformazione della densità: caso continuo

Segue da un cambio di variabile il seguente risultato:

- Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$, con densità continua $p(X = x|I)$.
- Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile, derivabile, con derivata continua e mai nulla $g'(x) \neq 0$.

Trasformazione della densità: caso continuo

Segue da un cambio di variabile il seguente risultato:

- Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{R}$, con densità continua $p(X = x|I)$.
- Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile, derivabile, con derivata continua e mai nulla $g'(x) \neq 0$.
- Allora $g(X)$ ammmette densità continua e vale

$$p(g(X) = z|I) = p(X = g^{-1}(z)|I) \cdot \frac{1}{|g'(g^{-1}(z))|}$$

Supponiamo che $E = \mathbb{R}$ prendiamo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$

g crescente $g' > 0$ g invertibile

$$P(g(X) \in (a,b)) \overset{?}{=} \int_a^b f(z)\,dz$$

$$= \int_a^b p(X = g^{-1}(z)) \frac{1}{g'(g^{-1}(z))}\,dz$$

$$dz = g'(x)\,dx \qquad z = g(x)$$

$$P(g(X) \in (a,b)) = P(a < g(X) < b)$$

$$= P(g(g^{-1}(a)) < g(X) < g(g^{-1}(b)))$$

$$= \quad (g^{-1} \text{ è crescente})$$

$$P(g^{-1}(a) < X < g^{-1}(b)) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} p(X = x)\,dx$$

Esempio $\quad X$ sia esponenziale di parametro $\lambda > 0$

$$p(X=x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$g(x) = \ln(x) \quad : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ invertibile

$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad g^{-1}(z) = e^{z} \qquad \underline{\underline{z \in \mathbb{R}}}$

$$p(\log(X) = z) = p(X = e^{z})\, e^{z}$$

$$= \lambda e^{-\lambda e^{z}} e^{z} \qquad z \in \mathbb{R}$$

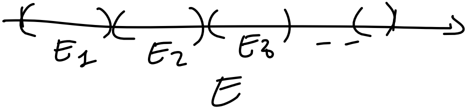
(densità Gumbel)

Una estensione (utile nei problemi):

- se X assume con probabilità 1 valori in un intervallo $E \subseteq \mathbb{R}$

Una estensione (utile nei problemi):

- se X assume con probabilità 1 valori in un intervallo $E \subseteq \mathbb{R}$
- $g : E \to \mathbb{R}$ è tale che si può decomporre E in una unione finita di intervalli a due a due disgiunti in cui, all'interno di ciascun intervallo, g sia invertibile, derivabile con derivata continua e mai nulla $g'(x) \neq 0$.



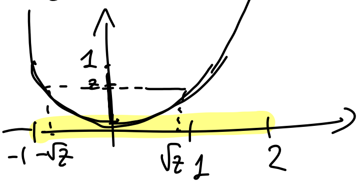
Una estensione (utile nei problemi):

- se X assume con probabilità 1 valori in un intervallo $E \subseteq \mathbb{R}$
- $g : E \to \mathbb{R}$ è tale che si può decomporre E in una unione finita di intervalli a due a due disgiunti in cui, all'interno di ciascun intervallo, g sia invertibile, derivabile con derivata continua e mai nulla $g'(x) \neq 0$.
- Allora $g(X)$ ammette densità continua

$$p(g(X) = z|I) = \sum_{x \in g^{-1}(z)} p(X = x|I) \cdot \frac{1}{|g'(x)|}.$$

Esempio X uniforme a valori $(-1, 2) \subseteq \mathbb{R}$

$g(x) = x^2$



$E_1 = (-1, 0)$ $\quad E_2 = (0, 2)$ $\quad g'(x) = 2x \neq 0$ in $E_1 \cup E_2$

$g^{-1}(z) = \{-\sqrt{z}, \sqrt{z}\}$ se $z \geq 0$

Dato $z \geq 0$ $\quad (z \in [0,4])$ $\quad p(X^2 = z) = \sum_{x \in g^{-1}(z)} p(X = x) \frac{1}{|2x|} =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{1}{|2\sqrt{z}|} + \frac{1}{3} \frac{1}{2\sqrt{z}} & \text{se } z \in [0,1] \\ \frac{1}{3} \frac{1}{2\sqrt{z}} & \text{se } z \in [1,4] \end{cases}$$

Trasformazione della densità: caso vettoriale

- Sia X una variabile aleatoria vettoriale, a valori in $\mathbb{R}^d$, con densità continua $p(X = x|I)$.

Trasformazione della densità: caso vettoriale

- Sia X una variabile aleatoria vettoriale, a valori in $\mathbb{R}^d$, con densità continua $p(X = x|I)$.
- Sia $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione invertibile, derivabile con derivata continua e invertibile in ogni punto, ossia

$$\det \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right) \neq 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

Trasformazione della densità: caso vettoriale

- Sia X una variabile aleatoria vettoriale, a valori in $\mathbb{R}^d$, con densità continua $p(X = x|I)$.
- Sia $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ una funzione invertibile, derivabile con derivata continua e invertibile in ogni punto, ossia

$g = (g^1 --- g^d)$

$$\det \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \right) \neq 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

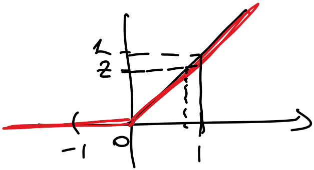
- Allora $g(X)$ ammmette densità continua e vale

$$p(g(X) = z|I) = p(X = g^{-1}(z)|I) \cdot \frac{1}{|\det(Dg)(g^{-1}(z))|}$$

Esempio Se $g(x) = Ax + b$ $\quad Dg(x) = A$

Esempi V.a. "senza" densità

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Se X è uniforme su $(-1, 1)$

$g(X)$ non è né discreta né continua

- $P(g(X) = 0) = P(X \leq 0) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ NON è continua
- per $z \neq 0$, $z > 0$: $P(g(X) = z) = P(X = z) = 0 \Rightarrow$ NON discreta

Problema

Sia X una variabile con densità uniforme continua su $(-1, 3)$.

1. Scrivere la densità di X

Problema

Sia X una variabile con densità uniforme continua su $(-1, 3)$.

1. Scrivere la densità di X
2. Scrivere la densità di X^2.

Problema

Sia X una variabile con densità uniforme continua su $(-1, 3)$.

1. Scrivere la densità di X
2. Scrivere la densità di X^2.
3. Scrivere la densità di X^4, verificare che il risultato ottenendo applicando la formula di cambio di variabile direttamente da X è lo stesso che applicando in sequenza due volte la formula per $x \mapsto x^2$, ossia $X^4 = (X^2)^2$.

Problema

Sia X una variabile con densità uniforme continua su $(-1, 3)$.

1. Scrivere la densità di X
2. Scrivere la densità di X^2.
3. Scrivere la densità di X^4, verificare che il risultato ottenendo applicando la formula di cambio di variabile direttamente da X è lo stesso che applicando in sequenza due volte la formula per $x \mapsto x^2$, ossia $X^4 = (X^2)^2$.
4. La variabile $\max\{0, X\}$ è continua?

Variabile congiunta

Date due variabili aleatorie $X \in E$, $Y \in F$, come definire la variabile *congiunta* (X, Y) a valori nelle coppie ordinate $(x, y) \in E \times F$?

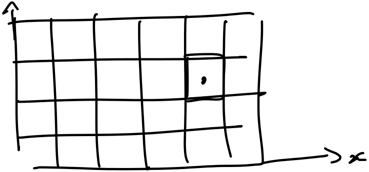
- *Esempio*: si vuole applicare una funzione $g(x, y)$.

Variabile congiunta

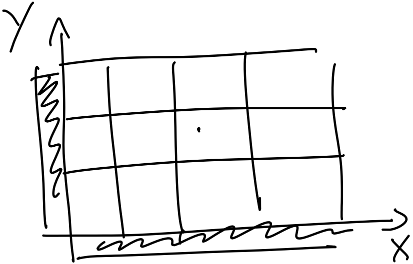
Date due variabili aleatorie $X \in E$, $Y \in F$, come definire la variabile *congiunta* (X, Y) a valori nelle coppie ordinate $(x, y) \in E \times F$?

- *Esempio*: si vuole applicare una funzione $g(x, y)$.
- Dai sistemi di alternative $(\{X = x\})_{x \in E}$, $(\{Y = y\})_{y \in F}$, si definisce la variabile aleatoria *congiunta* (X, Y) a valori in $E \times F$ tramite il sistema di alternative

$$\{(X, Y) = (x, y)\} = \{X = x, Y = y\} = \{X = x\} \text{ e } \{Y = y\}.$$



Le variabili X, Y (considerate separatamente) sono le *marginali* della variabile congiunta (X, Y).

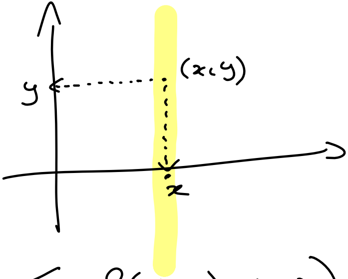


Dalla legge congiunta alle leggi marginali

- Dalla legge congiunta è sempre possibile ottenere le leggi delle marginali, tramite composizione di opportune funzioni.

$$(X,Y) \longmapsto X$$

$$g(x,y) = x$$



$$P(X=x) = \sum_{y \in F} P\big((X,Y)=(x,y)\big)$$

Dalla legge congiunta alle leggi marginali

- Dalla legge congiunta è sempre possibile ottenere le leggi delle marginali, tramite composizione di opportune funzioni.
- La variabile X è ottenibile dalla (X, Y) tramite la funzione

$$g : E \times F \to E, \quad (x, y) \mapsto x.$$

Dalla legge congiunta alle leggi marginali

- Dalla legge congiunta è sempre possibile ottenere le leggi delle marginali, tramite composizione di opportune funzioni.
- La variabile X è ottenibile dalla (X, Y) tramite la funzione
$$g : E \times F \to E, \quad (x, y) \mapsto x.$$
- La variabile Y è ottenibile dalla (X, Y) tramite la funzione
$$g : E \times F \to E, \quad (x, y) \mapsto y.$$

- Troviamo quindi, nel caso discreto,

$$P(X = x|I) = \sum_{y \in F} P(X = x, Y = y|I) = \sum_{y \in F} P((X, Y) = (x, y)|I),$$

$$P(Y = y|I) = \sum_{x \in E} P((X, Y) = (x, y)|I).$$

Nel caso continuo $E = \mathbb{R}^d$, $F = \mathbb{R}^k$,

$$p(X = x|I) = \int_{\mathbb{R}^k} p((X, Y) = (x, y)|I) dy.$$

$$p(Y = y|I) = \int_{\mathbb{R}^d} p((X, Y) = (x, y)|I) dx.$$

Dalle leggi marginali alla legge congiunta?

- La conoscenza delle leggi di X, Y (separatamente) **non** determina la legge di (X, Y).

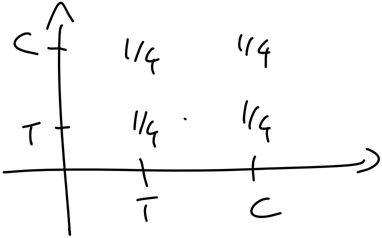
Esempio Lancio di moneta $X \in \{T, C\}$

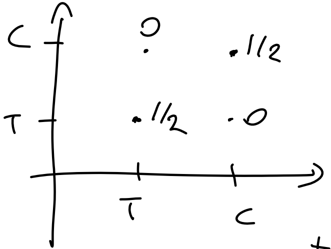
$$P(X=T) = P(X=C) = \frac{1}{2}$$

$$Y \in \{T, C\}$$

$$P(X=T) = P(Y=C) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(X=C, Y=T) = P(X=C)P(Y=T) = \frac{1}{4}$$





Esercizio ci sono infinite congiunte con queste marginali

Estensione al caso di k variabili aleatorie $X_1 \in E_1$, ..., $X_k \in E_k$.

- La variabile congiunta $X = (X_1, \ldots, X_k)$ a valori nelle k-uple ordinate

$$x = (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \ldots \times E_k$$

è definita tramite il sistema di alternative

$$\begin{aligned} \{X = x\} &= \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k\} \\ &= \{X_1 = x_1\} \text{ e } \ldots \{X_k = x_k\}. \end{aligned}$$

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali
- Dalla regola del prodotto si ha

$$\begin{aligned} P((X,Y)=(x,y)) &= P(X=x \text{ e } Y=y) \\ &= P(X=x)\underbrace{P(Y=y|X=x)}_{\text{densità di } Y \text{ condizionata ad } X}. \end{aligned}$$

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali
- Dalla regola del prodotto si ha

$$\begin{aligned} P((X,Y)=(x,y)) &= P(X=x \text{ e } Y=y) \\ &= P(X=x)P(Y=y|X=x). \end{aligned}$$

- Nel caso di variabili discrete, la densità della variabile congiunta è determinata da

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali
- Dalla regola del prodotto si ha

$$\begin{aligned} P((X,Y)=(x,y)) &= P(X=x \text{ e } Y=y) \\ &= P(X=x)P(Y=y|X=x). \end{aligned}$$

- Nel caso di variabili discrete, la densità della variabile congiunta è determinata da
  1. La densità della marginale X

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali
- Dalla regola del prodotto si ha

$$\begin{aligned} P((X, Y) = (x, y)) &= P(X = x \text{ e } Y = y) \\ &= P(X = x) P(Y = y | X = x). \end{aligned}$$

- Nel caso di variabili discrete, la densità della variabile congiunta è determinata da
  1. La densità della marginale X
  2. La densità della marginale Y, condizionata all'informazione $X = x$ per ciascun $x \in E$ (condizionata ad X).

Densità congiunta e regola del prodotto

- La densità di una variabile congiunta non è esprimibile in termini delle densità marginali
- Dalla regola del prodotto si ha

$$\begin{aligned} P((X,Y)=(x,y)) &= P(X=x \text{ e } Y=y) \\ &= P(X=x)P(Y=y|X=x). \end{aligned}$$

- Nel caso di variabili discrete, la densità della variabile congiunta è determinata da
  1. La densità della marginale X
  2. La densità della marginale Y, condizionata all'informazione $X=x$ per ciascun $x \in E$ (condizionata ad X).
- In pratica in molti casi la legge congiunta è proprio definita tramite queste due quantità.

Section 2

Formula di Bayes

Formula di Bayes per variabili: caso discreto

La formula di Bayes si può quindi riscrivere

$$\begin{aligned} P(X = x|Y = y) &= P(X = x) \cdot \frac{P(Y = y|X = x)}{P(Y = y)} \\ &\propto P(X = x)L(X = x; Y = y) \end{aligned}$$

- Il denominatore $P(Y = y)$ si calcola imponendo che la somma su x sia 1:

$$\boxed{P(Y = y) = \sum_{x \in E} P(X = x)L(X = x; Y = y).}$$

Stime MAP e MLE: caso discreto

Spesso interessa solo il valore più probabile della X, avendo osservato $Y = y$.

Si definisce la stima per X:

- di massimo a posteriori

$$x_{\text{MAP}} \in \arg\max \{P(X = x) \cdot L(X = x; Y = y) : x \in E\}$$

Stime MAP e MLE: caso discreto

Spesso interessa solo il valore più probabile della X, avendo osservato $Y = y$.

Si definisce la stima per X:

- di massimo a posteriori

$$x_{\text{MAP}} \in \arg\max \left\{ P(X = x) \cdot L(X = x; Y = y) : x \in E \right\}$$

- di massima verosimiglianza (a priori uniforme)

$$x_{\text{MLE}} \in \arg\max \left\{ L(X = x; Y = y) : x \in E \right\}.$$

Stime MAP e MLE: caso discreto

Spesso interessa solo il valore più probabile della X, avendo osservato $Y = y$.

Si definisce la stima per X:

- di massimo a posteriori

$$x_{\mathrm{MAP}} \in \arg\max \{P(X = x) \cdot L(X = x; Y = y) : x \in E\}$$

E infinito

- di massima verosimiglianza (a priori uniforme)

$$x_{\mathrm{MLE}} \in \arg\max \{L(X = x; Y = y) : x \in E\}.$$

- Anche se E è infinito la stima x_{MLE} ha senso (anche ne non c'è densità a priori uniforme)

Esempio

- un'urna contiene metà palline rosse e metà palline blu, da cui si effettuano un certo numero di estrazioni con rimpiazzo.

Esempio

- un'urna contiene metà palline rosse e metà palline blu, da cui si effettuano un certo numero di estrazioni con rimpiazzo.
- Il numero esatto delle estrazioni non è noto, ma solo che il numero di palline rosse estratte è 10.

Esempio

- un'urna contiene metà palline rosse e metà palline blu, da cui si effettuano un certo numero di estrazioni con rimpiazzo.
- Il numero esatto delle estrazioni non è noto, ma solo che il numero di palline rosse estratte è 10.
- Possiamo stimare il numero M di estrazione effettuate?

- A priori uniforme su $\{0, 1, \ldots, \bar{m}\}$:

$$P(M = m|\Omega) = \frac{1}{\bar{m}}$$

- A priori uniforme su $\{0, 1, \ldots, \bar{m}\}$:

$$P(M = m|\Omega) = \frac{1}{\bar{m}}$$

- Verosimiglianza

$k=10$

$$L(M = m; N_R = k) = P(N_R = k|M = m) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}$$

$$= \binom{m}{k}\frac{1}{2^m}.$$

- A priori uniforme su $\{0, 1, \ldots, \bar{m}\}$:

$$P(M = m|\Omega) = \frac{1}{\bar{m}}$$

- Verosimiglianza

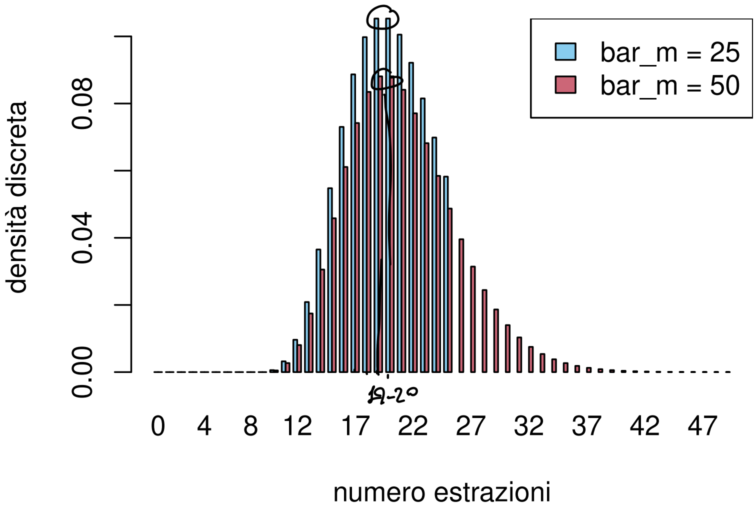
$$L(M = m; N_R = k) = P(N_R = k|M = m) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}$$

$$= \binom{m}{k}\frac{1}{2^m}.$$

- Formula di Bayes (per $m \leq \bar{m}$)

$$P(M = m|N_R = k) \propto \binom{m}{k}\frac{1}{2^m}.$$

$m \leq \bar{m}$



densità discreta
0.00
0.04
0.08
bar_m = 25
bar_m = 50
19-20
0
4
8
12
17
22
27
32
37
42
47
numero estrazioni

Caso variabile congiunta continua

Si introduce una “regola del prodotto” nel caso in cui vi sia la densità congiunta:

$$p((X,Y)=(x,y)) = p(X=x, Y=y)$$
$$= p(X=x)p(Y=y|X=x),$$

- il termine $p(Y=y|X=x)$ è la *densità condizionale di* Y *rispetto ad* X

$$\boxed{\underline{\text{Def}} \qquad p(Y=y|X=x) = \frac{p(X=x, Y=y)}{p(X=x)}}$$

Caso variabile congiunta continua

Si introduce una "regola del prodotto" nel caso in cui vi sia la densità congiunta:

$$\begin{aligned} p((X,Y)=(x,y)) &= p(X=x, Y=y) \\ &= p(X=x)p(Y=y|X=x), \end{aligned}$$

- il termine $p(Y=y|X=x)$ è la *densità condizionale di* Y *rispetto ad* X
- formula di Kolmogorov nel caso continuo:

$$p(Y=y|X=x) = \frac{p(X=x, Y=y)}{p(X=x)}.$$

- formula di Bayes per densità continue:

$$p(X = x|Y = y) = p(X = x) \cdot \frac{p(Y = y|X = x)}{p(Y = y)}$$
$$\propto p(X = x)L(X = x; Y = y)$$

dove

$$p(Y = y) = \int_{\mathbb{R}^d} p(Y = y|X = x)p(X = x)dx.$$

$$p(X=x, Y=y) = p(Y=y, X=x)$$

$$\boxed{p(X=x)p(Y=y|X=x) = p(Y=y)p(X=x|Y=y)}$$

- formula di Bayes per densità continue:

$$p(X = x | Y = y) = p(X = x) \cdot \frac{p(Y = y | X = x)}{p(Y = y)}$$
$$\propto p(X = x) L(X = x; Y = y)$$

dove

$$p(Y = y) = \int_{\mathbb{R}^d} p(Y = y | X = x) p(X = x) dx.$$

- Stima del massimo a posteriori

$$x_{\mathrm{MAP}} \in \arg\max \{ p(X = x) L(X = x; Y = y), x \in E \}$$

- formula di Bayes per densità continue:

$$p(X=x|Y=y) = p(X=x)\cdot\frac{p(Y=y|X=x)}{p(Y=y)}$$
$$\propto p(X=x)L(X=x;Y=y)$$

dove

$$p(Y=y) = \int_{\mathbb{R}^d} p(Y=y|X=x)p(X=x)dx.$$

- Stima del massimo a posteriori

$$x_{\mathrm{MAP}} \in \arg\max\{p(X=x)L(X=x;Y=y), x \in E\}$$

- Stima di massima verosimiglianza

$$x_{\mathrm{MLE}} \in \arg\{\max p(Y=y|X=x) : x \in [a,b]\}$$

possiamo usare il calcolo

Un esempio

La durata della carica di un dispositivo (ad esempio, uno smartphone, o un drone) è modellizzata da una variabile aleatoria T avente densità continua *esponenziale* di un certo parametro λ, ossia

$$p(T=t|\Lambda=\lambda) = p(T = t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{per } t \geq 0,$$

mentre $p(T = t) = 0$ altrimenti.

Per stimare Λ si suppone che sia a priori uniformemente distribuito su $[0, 1]$, ossia, per $\lambda \in [0, 1]$, $p(\Lambda = \lambda) = 1$, mentre la verosimiglianza vale

$$\boxed{L(\Lambda = \lambda; T = t) = \lambda e^{-\lambda t}.} \quad t \geq 0$$

Supponendo di osservare $T = 10$, formula di Bayes implica

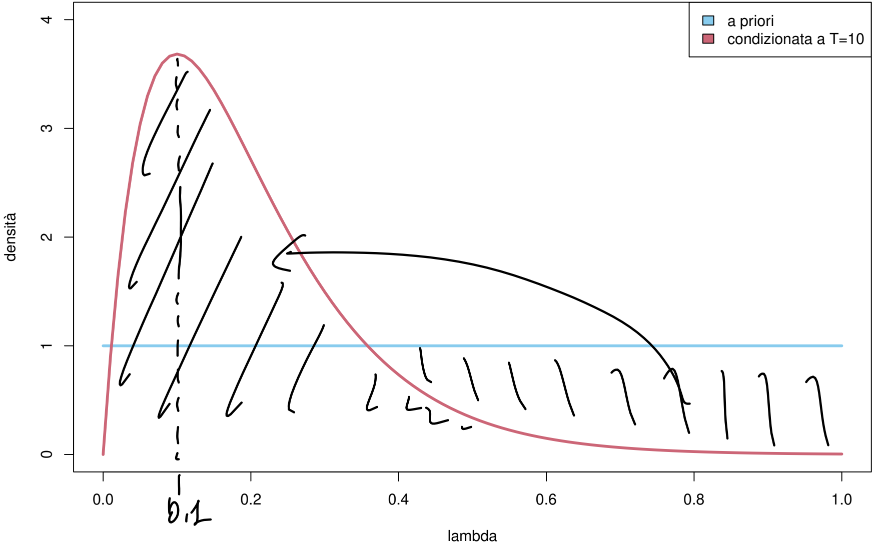
$$\begin{aligned} p(\Lambda = \lambda | T = 10) &\propto p(\Lambda = \lambda) L(\Lambda = \lambda; T = 10) \\ &\propto \lambda e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

$\to t = 10$ $\quad \lambda \in [0, 1]$

Imponendo che sia una densità (per $\lambda \in [0, 1]$), troviamo il denominatore

$$p(T = 10) = \int_0^1 \lambda e^{-10\lambda} d\lambda.$$

$p(T=t) = \lambda \exp(-\underbrace{\lambda t}_{})$



Per la stima di massima verosimiglianza, si deve determinare

$$\lambda_{\mathsf{MLE}} \in \arg\max \left\{ \lambda e^{-10\lambda} : \lambda \in [0,1] \right\},$$

- Basta derivare e imporre che la derivata sia nulla, trovando

$$e^{-10\lambda} - 10\lambda e^{-10\lambda} = 0 \quad \text{ossia} \quad \lambda = 1/10.$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda e^{-10\lambda}\right) = \cancel{e^{-10\lambda}} + \lambda\, \cancel{e^{-10\lambda}}(-10) = 0 \qquad \boxed{\lambda = \frac{1}{10}}$$

Per la stima di massima verosimiglianza, si deve determinare

$$\lambda_{\mathsf{MLE}} \in \arg\max \left\{ \lambda e^{-10\lambda} : \lambda \in [0,1] \right\},$$

- Basta derivare e imporre che la derivata sia nulla, trovando

$$e^{-10\lambda} - 10\lambda e^{-10\lambda} = 0 \quad \text{ossia} \quad \lambda = 1/10.$$

- (andrebbe anche verificato che il massimo non sia raggiunto agli estremi dell'intervallo, ma dal grafico sopra è evidente).

Formula di Bayes: casi misti

Menzioniamo anche il caso misto, in cui $X \in E$ ha densità discreta mentre Y, condizionata ad $\{X = x\}$, ha densità continua continua, per ogni $x \in E$.

- Il problema è che in generale la variabile congiunta non ha densità né continua né discreta (bisogna usare un approccio più flessibile)

Formula di Bayes: casi misti

Menzioniamo anche il caso misto, in cui $X \in E$ ha densità discreta mentre Y, condizionata ad $\{X = x\}$, ha densità continua continua, per ogni $x \in E$.

- Il problema è che in generale la variabile congiunta non ha densità né continua né discreta (bisogna usare un approccio più flessibile)
- La formula di Bayes rimane valida:

$$
\begin{aligned}
P(X = x|Y = y) &= P(X = x) \cdot \frac{\boxed{p(Y = y|X = x)}}{\boxed{p(Y = y)}} \\
&\propto P(X = x)L(X = x; Y = y).
\end{aligned}
$$

dove

$$
p(Y = y) = \sum_{x \in E} p(Y = y|X = x)P(X = x).
$$

Formula di Bayes: casi misti

Menzioniamo anche il caso misto, in cui $X \in E$ ha densità discreta mentre Y, condizionata ad $\{X = x\}$, ha densità continua continua, per ogni $x \in E$.

- Il problema è che in generale la variabile congiunta non ha densità né continua né discreta (bisogna usare un approccio più flessibile)
- La formula di Bayes rimane valida:

$$\begin{aligned} P(X = x|Y = y) &= P(X = x) \cdot \frac{p(Y = y|X = x)}{p(Y = y)} \\ &\propto P(X = x)L(X = x; Y = y). \end{aligned}$$

  dove

$$p(Y = y) = \sum_{x \in E} p(Y = y|X = x)P(X = x).$$

- Nel caso simmetrico, ossia X continua e Y discreta: $P(Y=y|X=x)$

$$p(X = x|Y = y) \propto p(X = x)L(X = x; Y = \underset{\parallel}{}y)$$

Un esempio

Un'urna contiene palline rosse oppure blu, ma non è noto né il numero totale né la frazione di palline rosse sul totale. $p \in [0,1]$

- Avendo effettuato 10 estrazioni con rimpiazzo, sono state osservate 3 palline rosse.

Un esempio

Un'urna contiene palline rosse oppure blu, ma non è noto né il numero totale né la frazione di palline rosse sul totale.

- Avendo effettuato 10 estrazioni con rimpiazzo, sono state osservate 3 palline rosse.
- Come stimare la frazione di palline rosse sul totale?

Un esempio

Un'urna contiene palline rosse oppure blu, ma non è noto né il numero totale né la frazione di palline rosse sul totale.

- Avendo effettuato 10 estrazioni con rimpiazzo, sono state osservate 3 palline rosse.
- Come stimare la frazione di palline rosse sul totale?
- Variabile aleatoria $F_R \in [0, 1]$ per indicare la frazione di palline rosse, con densità a priori uniforme.

$F_R \in [0,1]$

$$P(N_R = 3 \mid F_R = p, \text{ 10 estrazioni}) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7 = L(p)$$

$p(F_R = p) = 1$ su $[0,1]$

Un esempio

Un'urna contiene palline rosse oppure blu, ma non è noto né il numero totale né la frazione di palline rosse sul totale.

- Avendo effettuato 10 estrazioni con rimpiazzo, sono state osservate 3 palline rosse.
- Come stimare la frazione di palline rosse sul totale?
- Variabile aleatoria $F_R \in [0,1]$ per indicare la frazione di palline rosse, con densità a priori uniforme.
- Verosimiglianza (binomiale)

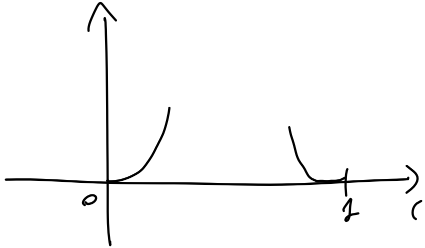
$$L(F_R = r; N_R = k) = P(N_R = k | F_R = r) = \binom{10}{k} r^k (1-r)^{10-k}.$$

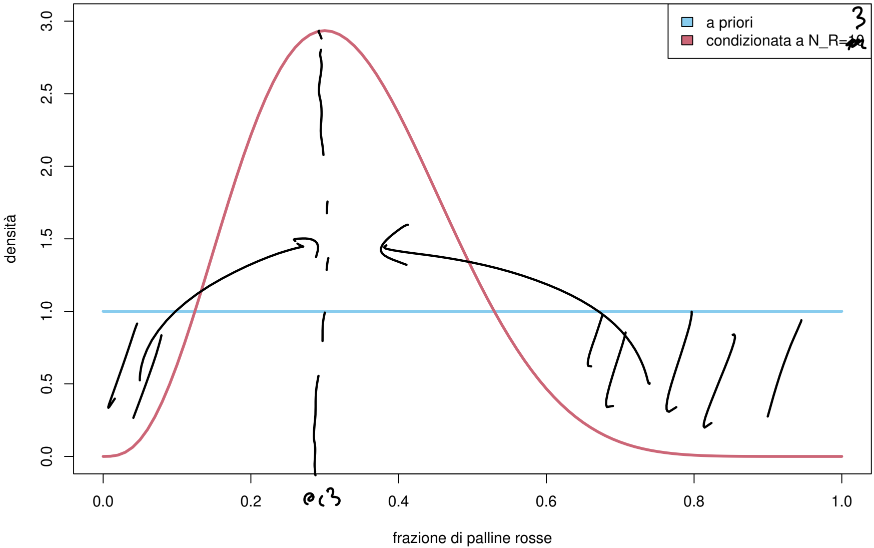
$$\frac{d}{dr}\left(r^3(1-r)^7\right) = 3\cancel{r^2}(1-r)^{\cancel{7}} - 7r^{\cancel{3}}\cancel{(1-r)^6} = 0$$

$$3(1-r) - 7r = 0 \implies 3 = 10r \implies \boxed{r = \frac{3}{10}}$$

La formula di Bayes (nel caso "misto") implica, per $r \in [0,1]$,

$$p(F_R = r | N_R = 3) = p(F_R = r|\Omega)\frac{L(F_R = r; N_R = 3)}{P(N_R = 3|\Omega)} \propto \binom{10}{3} r^3(1-r)^7,$$




a priori
condizionata a N_R=~~10~~ 3
densità
frazione di palline rosse
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0,3

Section 3

Indipendenza

Indipendenza: caso discreto

L'indipendenza tra sistemi di alternative si traduce per variabili discrete:

- Siano $X_1 \in E_1, \ldots X_k \in E_k$ variabili aleatorie con densità discreta (rispetto ad una informazione nota I). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad I) se vale

$$\boxed{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k | I) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i = x_i | I),}$$

per ogni $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., $x_k \in E_k$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned} &P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I, X_\ell = x_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J) \\ &= P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I). \end{aligned}$$

$k=2$ $\quad P((X,Y)=(x,y)) = P(X=x)P(Y=y)$

Indipendenza: caso discreto

L'indipendenza tra sistemi di alternative si traduce per variabili discrete:

- Siano $X_1 \in E_1, \ldots X_k \in E_k$ variabili aleatorie con densità discreta (rispetto ad una informazione nota I). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad I) se vale

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k | I) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i = x_i | I),$$

per ogni $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $\ldots$, $x_k \in E_k$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned} &P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I, X_\ell = x_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J) \\ &= P(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J | I). \end{aligned}$$

- Il membro a sinistra è la densità discreta della variabile congiunta $(X_1, \ldots, X_k)$, mentre a destra abbiamo il prodotto delle densità discrete delle marginali.

Indipendenza: caso continuo

- Siano $X_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, \ldots X_k \in \mathbb{R}^{d_k}$ variabili aleatorie con densità continua (rispetto ad una informazione nota I). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad I) se la variabile congiunta $X = (X_1, \ldots, X_k)$ ammette densità continua e vale

$$p(X = x|I) = p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k|I) = \prod_{i=1}^{k} p(X_i = x_i|I),$$

per ogni $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$, $\ldots$, $x_k \in \mathbb{R}^{d_k}$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned} &p(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J|I, X_\ell = x_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J) \\ &= p(X_j = x_j \text{ per ogni } j \in J|I). \end{aligned}$$

Indipendenza: caso generale

- Possiamo immaginare definizioni valide anche per i casi "misti", in cui alcune variabili sono discrete e altre continue. Ma è possibile dare una definizione generale (che include quelle sopra).

Indipendenza: caso generale

- Possiamo immaginare definizioni valide anche per i casi "misti", in cui alcune variabili sono discrete e altre continue. Ma è possibile dare una definizione generale (che include quelle sopra).

- Siano $X_1 \in E_1, \ldots X_k \in E_k$ variabili aleatorie (generali). Allora esse si dicono indipendenti (condizionatamente ad una informazione nota I) se vale

$$P(X_1 \in U_1, X_2 \in U_2, \ldots, X_k \in U_k | I) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i \in U_i | I),$$

per ogni $U_1 \subseteq E_1$, $U_2 \subseteq E_2$, ... $U_k \subseteq E_k$, o equivalentemente, per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned} & P(X_j \in U_j \text{ per ogni } j \in J | I, X_\ell \in U_\ell \text{ per ogni } \ell \notin J) \\ & = P(X_j \in U_j \text{ per ogni } j \in J | I). \end{aligned}$$

Indipendenza e composizione

Vale il seguente risultato:

- Siano $X_1 \in E_1, \dots X_k \in E_k$ variabili aleatorie (generali). Allora esse sono indipendenti (condizionatamente ad una informazione nota I) se e solo se, dato un qualsiasi sottoinsieme $J \subseteq \{1, \dots, k\}$, qualsiasi affermazione A associata alle variabili $\{X_j\}_{j \in J}$ è indipendente (sapendo I) da qualsiasi affermazione B associata alle rimanenti variabili $\{X_\ell\}_{\ell \in \{1,\dots,k\} \setminus J}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ h(X) & g(Y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \underbrace{X, Y} \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ g(X,Y) & Z \end{tikzcd}$$

Indipendenza e composizione

Vale il seguente risultato:

- Siano $X_1 \in E_1, \ldots X_k \in E_k$ variabili aleatorie (generali). Allora esse sono indipendenti (condizionatamente ad una informazione nota I) se e solo se, dato un qualsiasi sottoinsieme $J \subseteq \{1, \ldots, k\}$, qualsiasi affermazione A associata alle variabili $\{X_j\}_{j \in J}$ è indipendente (sapendo I) da qualsiasi affermazione B associata alle rimanenti variabili $\{X_\ell\}_{\ell \in \{1,\ldots,k\} \setminus J}$.
- Una conseguenza *fondamentale* è la seguente: ogni variabile ottenuta tramite funzione delle $(X_j)_{j \in J}$, è indipendente da ogni variabile ottenuta tramite funzione delle $(X_\ell)_{\ell \notin J}$.