Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 4

Dario Trevisan

5/10/2023

Section 1

Variabili aleatorie generali

Contenuti

- le variabili aleatorie dal punto di vista elementare (accenniamo all'assiomatizzazione di Kolmogorov)

Contenuti

- le variabili aleatorie dal punto di vista elementare (accenniamo all'assiomatizzazione di Kolmogorov)
- il concetto di legge (o distribuzione) nei due casi più rilevanti (densità discreta e continua)

Contenuti

- le variabili aleatorie dal punto di vista elementare (accenniamo all'assiomatizzazione di Kolmogorov)
- il concetto di legge (o distribuzione) nei due casi più rilevanti (densità discreta e continua)
- composizione di variabili tramite una funzione e trasformazione della densità.

Contenuti

- le variabili aleatorie dal punto di vista elementare (accenniamo all'assiomatizzazione di Kolmogorov)
- il concetto di legge (o distribuzione) nei due casi più rilevanti (densità discreta e continua)
- composizione di variabili tramite una funzione e trasformazione della densità.
- variabile aleatoria congiunta e marginali

Contenuti

- le variabili aleatorie dal punto di vista elementare (accenniamo all'assiomatizzazione di Kolmogorov)
- il concetto di legge (o distribuzione) nei due casi più rilevanti (densità discreta e continua)
- composizione di variabili tramite una funzione e trasformazione della densità.
- variabile aleatoria congiunta e marginali
- formula di Bayes nel linguaggio delle variabili aleatorie

Contenuti

- le variabili aleatorie dal punto di vista elementare (accenniamo all'assiomatizzazione di Kolmogorov)
- il concetto di legge (o distribuzione) nei due casi più rilevanti (densità discreta e continua)
- composizione di variabili tramite una funzione e trasformazione della densità.
- variabile aleatoria congiunta e marginali
- formula di Bayes nel linguaggio delle variabili aleatorie
- indipendenza tra variabili aleatorie

Contenuti

- le variabili aleatorie dal punto di vista elementare (accenniamo all'assiomatizzazione di Kolmogorov)
- il concetto di legge (o distribuzione) nei due casi più rilevanti (densità discreta e continua)
- composizione di variabili tramite una funzione e trasformazione della densità.
- variabile aleatoria congiunta e marginali
- formula di Bayes nel linguaggio delle variabili aleatorie
- indipendenza tra variabili aleatorie
- metodo "grafico" delle reti bayesiane per rappresentare le dipendenze (o l'indipendenza)

Sistemi di alternative e variabili

Una *variabile aleatoria* può essere pensata come una *notazione efficace* per un *sistema di alternative* associato ad una grandezza su cui vi sia incertezza.

- In molti problemi, è richiesto il grado di fiducia che una grandezza X (quantitativa ossia numerica o anche qualitative, come ad esempio colori o sequenze) assuma un determinato valore.

Sistemi di alternative e variabili

Una *variabile aleatoria* può essere pensata come una *notazione efficace* per un *sistema di alternative* associato ad una grandezza su cui vi sia incertezza.

- In molti problemi, è richiesto il grado di fiducia che una grandezza X (quantitativa ossia numerica o anche qualitative, come ad esempio colori o sequenze) assuma un determinato valore.
- Anche se vi è incertezza, si sa che assume uno e un solo valore $x \in E$.

Sistemi di alternative e variabili

Una *variabile aleatoria* può essere pensata come una *notazione efficace* per un *sistema di alternative* associato ad una grandezza su cui vi sia incertezza.

- In molti problemi, è richiesto il grado di fiducia che una grandezza X (quantitativa ossia numerica o anche qualitative, come ad esempio colori o sequenze) assuma un determinato valore.
- Anche se vi è incertezza, si sa che assume uno e un solo valore $x \in E$.
- Possiamo introdurre una alternativa $A_x =$ "X assume il valore x". $(A_x)_{x \in E}$ è un sistema di alternative.

Diciamo che X *è una variabile aleatoria a valori in* E, e usiamo la notazione

$$\{X = x\} = A_x.$$

- La variabile X è identificata con il sistema di alternative $(\{X = x\})_{x \in E}$.

Diciamo che X *è una variabile aleatoria a valori in* E, e usiamo la notazione

$$\{X = x\} = A_x.$$

- La variabile X è identificata con il sistema di alternative $(\{X = x\})_{x \in E}$.
- La grandezza X si comporta come una *variabile* matematica. Dato un sottoinsieme di valori $U \subseteq E$, possiamo scrivere

$$\{X \in U\},$$

Diciamo che X *è una variabile aleatoria a valori in* E, e usiamo la notazione

$$\{X = x\} = A_x.$$

- La variabile X è identificata con il sistema di alternative $(\{X = x\})_{x \in E}$.
- La grandezza X si comporta come una *variabile* matematica. Dato un sottoinsieme di valori $U \subseteq E$, possiamo scrivere

$$\{X \in U\},$$

- Una scrittura compatta è $X \in E$ oppure, seguendo l'assiomatizzazione di Kolmogorov, $X : \Omega \to E$ (questa notazione sarà chiarita tra poco).

Il vantaggio di disporre di una variabile X è che possiamo effettuare determinate operazioni naturali, che corrispondono in pratica ad operazioni, magari meno evidenti, sul sistema di alternative.

- Ad esempio, dato $U \subseteq E$, possiamo scrivere

$$\{X \in U\} = \text{"}X \text{ assume un qualsiasi valore tra quelli di } U\text{"}.$$

Il vantaggio di disporre di una variabile X è che possiamo effettuare determinate operazioni naturali, che corrispondono in pratica ad operazioni, magari meno evidenti, sul sistema di alternative.

- Ad esempio, dato $U \subseteq E$, possiamo scrivere

$$\{X \in U\} = \text{"}X \text{ assume un qualsiasi valore tra quelli di } U\text{"}.$$

- Più formalmente è la disgiunzione inclusiva (o unione tra insiemi)

$$\{X \in U\} = \bigcup_{x \in U} \{X = x\}$$

.

Variabili aleatorie secondo Kolmogorov

Dato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ una variabile aleatoria X, a valori in E è una funzione

$$X : \Omega \to E$$

tale l'immagine inversa

$$X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega \, : \, X(\omega) = x\}$$

sia un evento in $\mathcal{A}$ per ogni $x \in E$.

- La teoria è un po' più complicata in realtà, per trattare E infiniti.

Legge (o distribuzione) di una variabile

Data X a valori in E, si vuole spesso determinare

$$P(X = x|I)$$

o più in generale

$$P(X \in U|I).$$

Questo si traduce nel concetto di *legge* (o distribuzione), ossia la funzione

$$E \supseteq U \mapsto P(X \in U|I).$$

- **Osservazione**: la legge dipende dall'informazione nota I.

Legge (o distribuzione) di una variabile

Data X a valori in E, si vuole spesso determinare

$$P(X = x|I)$$

o più in generale

$$P(X \in U|I).$$

Questo si traduce nel concetto di *legge* (o distribuzione), ossia la funzione

$$E \supseteq U \mapsto P(X \in U|I).$$

- **Osservazione**: la legge dipende dall'informazione nota I.
- **Problema**: come determinare la legge di X?

Legge (o distribuzione) di una variabile

Data X a valori in E, si vuole spesso determinare

$$P(X = x|I)$$

o più in generale

$$P(X \in U|I).$$

Questo si traduce nel concetto di *legge* (o distribuzione), ossia la funzione

$$E \supseteq U \mapsto P(X \in U|I).$$

- **Osservazione**: la legge dipende dall'informazione nota I.
- **Problema**: come determinare la legge di X?
- **Soluzione**: densità discreta (o continua), definita su $x \in E$ (non su $U \subseteq E$).

Densità discreta

Ad ogni sistema di alternative (finito) $(A_i)_{i=1}^n$ è associata una densità discreta $P(A_i|I)$.

Per variabili aleatorie X a valori in E finito (o infinito ma discreto), si definisce *densità discreta* (rispetto ad I) la funzione

$$E \ni x \mapsto P(X = x|I).$$

- Assume valori in $[0, 1]$ e

$$\sum_{x \in E} P(X = x|I) = 1,$$

Densità discreta

Ad ogni sistema di alternative (finito) $(A_i)_{i=1}^n$ è associata una densità discreta $P(A_i|I)$.

Per variabili aleatorie X a valori in E finito (o infinito ma discreto), si definisce *densità discreta* (rispetto ad I) la funzione

$$E \ni x \mapsto P(X = x|I).$$

- Assume valori in $[0,1]$ e
$$\sum_{x \in E} P(X = x|I) = 1,$$
- Utile la notazione $P(X = x|I) \propto f(x)$ per indicare costanti moltiplicative non espresse: si ha esplicitamente
$$P(X = x|I) = f(x) / \sum_{y \in E} f(y).$$

Esempi

Densità Poisson. Dato $\lambda > 0$, si dice che X a valori in $\mathbb{N}$ ha densità Poisson (di parametro λ) se vale, per ogni $k = 0, 1, \ldots$,

$$P(X = k|I) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \propto \frac{\lambda^k}{k!}$$

Dalla densità discreta alla legge

Se X assume valori in un insieme E finito oppure infinito discreto, vale per ogni $U \subseteq E$,

$$P(X \in U|I) = \sum_{x \in U} P(X = x|I).$$

Densità continua

Problema possibili valori E sono un infinito "continuo", es. $E = \mathbb{R}$, $E = [a, b]$.

- Esempio: X "uniforme" su tutti i valori dell'intervallo $[0, 1]$ *non* possiamo definire

$$P(X = x|I) = c > 0$$

Densità continua

Problema possibili valori E sono un infinito "continuo", es. $E = \mathbb{R}$, $E = [a, b]$.

- Esempio: X "uniforme" su tutti i valori dell'intervallo $[0, 1]$ *non* possiamo definire

$$P(X = x|I) = c > 0$$

- Idea: definire una probabilità "inifinitesima" in x.

Funzione di *densità continua* di probabilità della variabile X,

$$E \ni x \mapsto f(x)$$

tale che per ogni intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$,

$$P(a < X < b|I) = \int_a^b f(x)dx.$$

- Deve valere $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Funzione di *densità continua* di probabilità della variabile X,

$$E \ni x \mapsto f(x)$$

tale che per ogni intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$,

$$P(a < X < b|I) = \int_a^b f(x)dx.$$

- Deve valere $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
- Non è necessario $f(x) \leq 1$.

Funzione di *densità continua* di probabilità della variabile X,

$$E \ni x \mapsto f(x)$$

tale che per ogni intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$,

$$P(a < X < b|I) = \int_a^b f(x)dx.$$

- Deve valere $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
- Non è necessario $f(x) \leq 1$.
- Non è richiesto che f sia continua.

Funzione di *densità continua* di probabilità della variabile X,

$$E \ni x \mapsto f(x)$$

tale che per ogni intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$,

$$P(a < X < b|I) = \int_a^b f(x)dx.$$

- Deve valere $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
- Non è necessario $f(x) \leq 1$.
- Non è richiesto che f sia continua.
- Notazione più espressiva: $f(x) = p(X = x|I)$.

Probabilità = area del sottografico

Esempi

Caso vettoriale

Estendiamo al caso vettoriale (richiede integrali in più variabili, ma non li chiederò negli esercizi).

- X a valori in $\mathbb{R}^d$ ha densità continua f (rispetto all'informazione I) se vale, per ogni "rettangolo"

$$U = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d) \subseteq \mathbb{R}^d,$$

$$P(X \in U|I) = \int_U f = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int_{a_d}^{b_d} dx_d \, f(x_1, \ldots, x_d).$$

Caso vettoriale

Estendiamo al caso vettoriale (richiede integrali in più variabili, ma non li chiederò negli esercizi).

- X a valori in $\mathbb{R}^d$ ha densità continua f (rispetto all'informazione I) se vale, per ogni "rettangolo"

$$U = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d) \subseteq \mathbb{R}^d,$$

$$P(X \in U|I) = \int_U f = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \ldots \int_{a_d}^{b_d} dx_d \, f(x_1, \ldots, x_d).$$

- notazione $f(x) = p(X = x|I)$.