Probabilità e Processi Stocastici (455AA)

Lezione 3

Dario Trevisan

2/10/2023

Section 1

Indipendenza probabilistica

Regole principali

- $0 \leq P(A|I) \leq 1$

Regole principali

- $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- **Somma** $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$ purché A, B *incompatibili*,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

Regole principali

- $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- **Somma** $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$ purché A, B *incompatibili*,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

- Negazione $P(\text{ non } A) = 1 - P(A)$

Regole principali

- $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- **Somma** $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$ purché A, B *incompatibili*,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

- Negazione $P(\text{ non } A) = 1 - P(A)$
- **Prodotto** $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$.

Regole principali

- $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- **Somma** $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$ purché A, B *incompatibili*,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

- Negazione $P(\text{ non } A) = 1 - P(A)$
- **Prodotto** $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$.
- Sistema di alternative $(A_i)_{i=1}^n$ se *esattamente una* delle A_i si realizza (ma non si sa quale)

Regole principali

- $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- **Somma** $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$ purché A, B *incompatibili*,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

- Negazione $P(\text{ non } A) = 1 - P(A)$
- **Prodotto** $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$.
- Sistema di alternative $(A_i)_{i=1}^n$ se *esattamente una* delle A_i si realizza (ma non si sa quale)
- Formula di **Bayes**

$$P(A_i|B) \propto P(A_i)L(A_i; B)$$

Regole principali

- $0 \leq P(A|I) \leq 1$
- **Somma** $P(A \text{ oppure } B) = P(A) + P(B)$ purché A, B *incompatibili*,

$$P(A \text{ e } B) = 0.$$

- Negazione $P(\text{ non } A) = 1 - P(A)$
- **Prodotto** $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$.
- Sistema di alternative $(A_i)_{i=1}^n$ se *esattamente una* delle A_i si realizza (ma non si sa quale)
- Formula di **Bayes**

$$P(A_i|B) \propto P(A_i)L(A_i; B)$$

- **Verosimiglianza** $L(A; B) = P(B|A)$

Definizione di indipendenza

- Ricordiamo la regola del prodotto $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$.

Definizione di indipendenza

- Ricordiamo la regola del prodotto $P(A \text{ e } B) = P(A)P(B|A)$.
- Due affermazioni A, B si dicono **indipendenti** (condizionatamente all'informazione nota I) se

$$P(A|B, I) = P(A|I) \quad \text{oppure} \quad P(B|A, I) = P(B|I),$$

oppure ancora

$$P(A, B|I) = P(A|I)P(B|I).$$

Estrazioni con rimpiazzo: seconda estrazione

Estrazioni con rimpiazzo: terza estrazione

Sistemi di alternative indipendenti

Dati $k \geq 2$ sistemi di alternative $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ... $\mathcal{S}_k$, essi si dicono indipendenti tra loro (rispetto all'informazione I) se

$$P(A^1, A^2, \ldots, A^k | I) = \prod_{i=1}^{n} P(A^i),$$

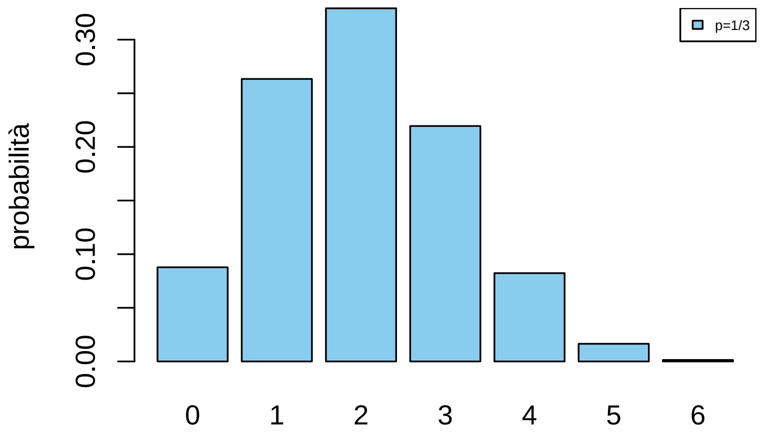
per ogni scelta di $A^1 \in \mathcal{S}_1$, $A^2 \in \mathcal{S}_2$, ... $A^k \in \mathcal{S}_k$.

Densità binomiale

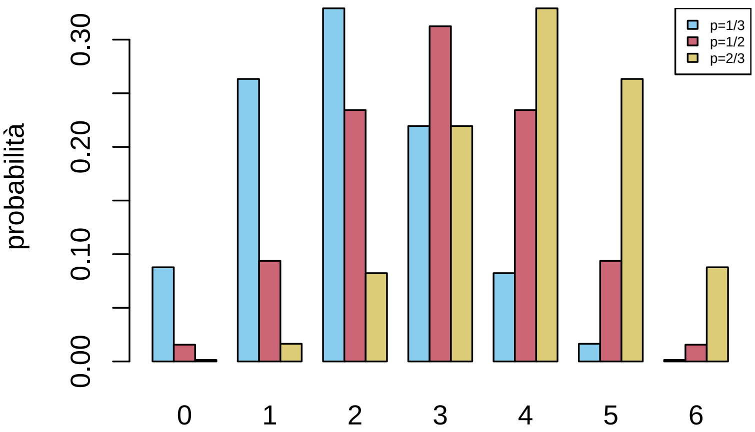
$$P(\text{estrarre con ripiazzo una specifica sequenza lunga } n \text{ con } r \text{ rosse})$$
$$= p^r(1-p)^{n-r}.$$

$$P(\text{estrarre con ripiazzo una qualsiasi sequenza lunga } n \text{ con } r \text{ rosse})$$
$$= \binom{n}{r} p^r(1-p)^{n-r}.$$

Densità binomiale $p = 1/3$, $n = 6$



Densità binomiali a confronto



Section 2

Problemi

Problema 1

Supponiamo che il 70% degli studenti di una scuola abbia superato un esame di matematica. Se selezioniamo casualmente 8 studenti di questa scuola, qual è la probabilità che esattamente 5 di essi abbiano superato l'esame?

Problema 2

Si sa che una malattia rara colpisce circa l'1Ğ della popolazione di una regione. Si prendono a caso rispettivamente un campione di a. 10 persone, b. 100 persone, c. 1000 persone. Calcolare le probabilità nei tre casi che nessuno del campione sia affetto dalla malattia.

Problema 3

Si sa che una malattia rara colpisce una piccola frazione della popolazione di una regione. Si suppongono inizialmente tre possibili scenari, ciascuno con probabilità uniforme: essa colpisce una persona ogni a. 10 b. 100 c. 1000.

1. Si considera un campione di 70 persone e si osserva che nessuno è affetto dalla malattia. Dire quale delle tre ipotesi è più probabile.

Problema 3

Si sa che una malattia rara colpisce una piccola frazione della popolazione di una regione. Si suppongono inizialmente tre possibili scenari, ciascuno con probabilità uniforme: essa colpisce una persona ogni a. 10 b. 100 c. 1000.

1. Si considera un campione di 70 persone e si osserva che nessuno è affetto dalla malattia. Dire quale delle tre ipotesi è più probabile.
2. Si completa successivamente la ricerca analizzando altre 30 persone e si osserva che una persona è affatta dalla malattia. Dire quale delle tre ipotesi è più probabile.

Problema 4

Un'urna contenente palline di due colori: rosse e blu. L'urna è stata preparata da un amico in uno dei due modi seguenti:

a. L'urna contiene esclusivamente 5 palline rosse.

con probabilità 10% per la prima opzione, 90% per la seconda. Cominci ad estrarre casualmente dall'urna una pallina alla volta (con rimpiazzo) osservandone il colore.

Problema 4

Un'urna contenente palline di due colori: rosse e blu. L'urna è stata preparata da un amico in uno dei due modi seguenti:

a. L'urna contiene esclusivamente 5 palline rosse.
b. L'urna contiene 5 palline rosse e 5 palline blu.

con probabilità 10% per la prima opzione, 90% per la seconda. Cominci ad estrarre casualmente dall'urna una pallina alla volta (con rimpiazzo) osservandone il colore.

Problema 4

Un'urna contenente palline di due colori: rosse e blu. L'urna è stata preparata da un amico in uno dei due modi seguenti:

a. L'urna contiene esclusivamente 5 palline rosse.
b. L'urna contiene 5 palline rosse e 5 palline blu.

con probabilità 10% per la prima opzione, 90% per la seconda. Cominci ad estrarre casualmente dall'urna una pallina alla volta (con rimpiazzo) osservandone il colore.

1. Dire se le alternative relative alle varie estrazioni sono tra loro indipendenti.

Problema 4

Un'urna contenente palline di due colori: rosse e blu. L'urna è stata preparata da un amico in uno dei due modi seguenti:

a. L'urna contiene esclusivamente 5 palline rosse.
b. L'urna contiene 5 palline rosse e 5 palline blu.

con probabilità 10% per la prima opzione, 90% per la seconda. Cominci ad estrarre casualmente dall'urna una pallina alla volta (con rimpiazzo) osservandone il colore.

1. Dire se le alternative relative alle varie estrazioni sono tra loro indipendenti.
2. Supponendo di avere estratto $k \geq 1$ palline e di avere osservato solo palline rosse, dire qual è il più probabile contenuto dell'urna (come funzione di k)

Problema 4

Un'urna contenente palline di due colori: rosse e blu. L'urna è stata preparata da un amico in uno dei due modi seguenti:

a. L'urna contiene esclusivamente 5 palline rosse.
b. L'urna contiene 5 palline rosse e 5 palline blu.

con probabilità 10% per la prima opzione, 90% per la seconda. Cominci ad estrarre casualmente dall'urna una pallina alla volta (con rimpiazzo) osservandone il colore.

1. Dire se le alternative relative alle varie estrazioni sono tra loro indipendenti.
2. Supponendo di avere estratto $k \geq 1$ palline e di avere osservato solo palline rosse, dire qual è il più probabile contenuto dell'urna (come funzione di k)
3. Come cambiano le risposte se le estrazioni sono senza rimpiazzo?

Problema 5

Un'urna da cui un amico effettua estrazioni contiene inizialmente 40 palline di cui 10 rosse e 30 blu. Un amico ci informa che ha estratto la sequenza, nell'ordine

rosso, rosso, blu, rosso.

Sappiamo inoltre sicuramente che l'amico ha effettuato tutte estrazioni o con rimpiazzo o senza rimpiazzo, ma non sappiamo esattamente come (supponiamo a priori probabilità uniforme).

1. Dire se è più probabile che le estrazioni siano state effettuate con rimpiazzo o senza.

Problema 5

Un'urna da cui un amico effettua estrazioni contiene inizialmente 40 palline di cui 10 rosse e 30 blu. Un amico ci informa che ha estratto la sequenza, nell'ordine

rosso, rosso, blu, rosso.

Sappiamo inoltre sicuramente che l'amico ha effettuato tutte estrazioni o con rimpiazzo o senza rimpiazzo, ma non sappiamo esattamente come (supponiamo a priori probabilità uniforme).

1. Dire se è più probabile che le estrazioni siano state effettuate con rimpiazzo o senza.
2. Calcolare la probabilità che la pallina successiva estratta dall'amico sia rossa.