CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Appello 2024-06-05

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Un gruppo di studenti e studentesse deve determinare una tra tre candidate (Alice, Bruna e Carla) per la rappresentanza in un'assemblea straordinaria del corpo universitario. Ogni voto si esprime dichiarando un ordine (strettamente) decrescente di preferenza tra le tre candidate (ad esempio un voto "ACB" indica che Alice è la preferita, poi segue Carla e infine Bruna). Prima di procedere al voto, si stima che, per ciascun voto espresso:

- la probabilità che Alice preceda Bruna in ordine di preferenza è $3/4$,
- la probabilità che Alice sia la prima in ordine di preferenza è $2/3$,
- la probabilità che il voto espresso sia ABC è $1/2$,
- la probabilità che Carla sia l'ultima in ordine di preferenza è $3/4$

e ciascun voto sia espresso indipedentemente dagli altri.

1. Per ciascun possibile ordine di preferenza tra le tre candidate, calcolare la probabilità che esso venga espresso.
2. Calcolare la probabilità che Bruna risulti la seconda in ordine di preferenza.
3. Si osserva che in un voto espresso Alice è la prima in ordine di preferenza. È più probabile che sia Bruna o Carla la seconda in ordine di preferenza?

Una soluzione:

1. I possibili ordini sono 6: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Le probabilità date sono

$$\begin{aligned} P(ABC \text{ o } ACB \text{ o } CAB) &= \frac{3}{4} \\ P(ABC \text{ o } ACB) &= \frac{2}{3} \\ P(ABC) &= \frac{1}{2} \\ P(ABC \text{ o } BAC) &= \frac{3}{4} \end{aligned} \tag{1}$$

Usando la regola della somma (additività), poiché gli ordini sono tra loro un sistema di alternative, si trova

$$P(ACB) = P(ABC \text{ o } ACB) - P(ABC) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \tag{2}$$

$$P(BAC) = P(ABC \text{ o } BAC) - P(ABC) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \tag{3}$$

$$P(CAB) = P(ABC \text{ o } ACB \text{ o } CAB) - P(ABC \text{ o } ACB) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}. \tag{4}$$

Osserviamo infine che

$$P(ABC \text{ o } ACB \text{ o } CAB \text{o} BAC) = P(ABC \text{ o } ACB \text{ o } CAB) + P(BAC) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \tag{5}$$

Da questo deduciamo che le ultime due alternative rimaste, BCA e CBA hanno entrambe probabilità zero.

2. È richiesta la probabilità

$$P(ABC \text{ o } CBA) = P(ABC) + P(CBA) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

3. Dobbiamo confrontare $P(ABC|ABC \text{ o } ACB)$ con $P(ACB|ABC \text{ o } ACB)$. Per la formula della probabilità condizionata, basta confrontare (i numeratori) $P(ABC) = 1/2$ con $P(ACB) = 1/6$ e quindi otteniamo che è più probabile che la seconda sia Bruna.

Problema 2

Siano θ_1, θ_2 due variabili aleatorie indipendenti uniformi continue a valori in $[-\pi, \pi]$ e si definiscano le due variabili aleatorie

$$X = 2\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2), \quad Y = 2\,\mathrm{sen}(\theta_1) + \mathrm{sen}(\theta_2).$$

1. Calcolare valore atteso e varianza di X.
2. Calcolare la covarianza tra X e Y.
3. Dire se X e Y sono indipendenti.

Una soluzione:

1. Conviene osservare/ricordare gli integrali definiti

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) d\theta = 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Per il valore atteso, grazie alla proprietà di linearità troviamo

$$\mathbb{E}[X] = 2\mathbb{E}[\cos(\theta_1)] + \mathbb{E}[\cos(\theta_2)] = 2 \cdot 0 + 0 = 0 \tag{7}$$

avendo usato il primo dei due integrali notati sopra. Per la varianza, usando l'indipendenza tra θ_1 e θ_2, che implica l'indipendenza tra $\cos(\theta_1)$ e $\cos(\theta_2)$, troviamo

$$\mathrm{Var}\, X = 4\,\mathrm{Var}(\cos(\theta_1)) + \mathrm{Var}(\cos(\theta_2)) = 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \tag{8}$$

avendo usato il secondo integrale definito (la varianza coincide con il momento secondo essendo il valore atteso nullo).

2. Per calcolare la covarianza, usiamo le proprietà di bilinearità

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(2\cos(\theta_1), 2\sin(\theta_1)) + \mathrm{Cov}(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) \tag{9}$$

dove gli altri termini si sono cancellati per indipendenza. A questo punto ricordando che il valore atteso di $\cos(\theta_1)$ e $\cos(\theta_2)$ sono nulli, per concludere basta notare che

$$\mathbb{E}[\cos(\theta_1)\sin(\theta_1)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta = 0 \tag{10}$$

essendo l'integranda dispari e l'intervallo di integrazione centrato sull'origine.

3. Le variabili X e Y non sono indipendenti. Intuitivamente questo segue dal fatto che seno e coseno soddisfano la relazione trigonometrica $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$, quindi se consideriamo l'evento $Y = 3$, in cui necessariamente deve valere $\sin(\theta_1) = 1$, $\sin(\theta_2) = 1$ troviamo che $\cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) = 0$, quindi necessariamente $X = 0$, mentre senza sapere nulla su Y la variabile X non è sempre nulla (abbiamo visto che ha una varianza non nulla). Più rigorosamente, possiamo considerare un piccolo valore $\varepsilon \in (0,1)$ e notare che nell'evento $Y \geq 3-\varepsilon$ si ha necessariamente $\sin(\theta_1) \geq 1-\varepsilon$ e $\sin(\theta_2) \geq 1-\varepsilon$. Di conseguenza si ha $|\cos(\theta_1)| \leq \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} = \sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)} \leq \sqrt{\varepsilon}$ e similmente $|\cos(\theta_2)| \leq \sqrt{\varepsilon}$ e pertanto $|X| \leq 3\sqrt{\varepsilon}$. Ma allora $\mathrm{Var}(X|Y \geq 3-\varepsilon) \leq 9\varepsilon$, mentre $\mathrm{Var}(X) = 5/2$, che è necessariamente diverso se ε è abbastanza piccolo. D'altra parte la varianza dipende solamente dalla legge, e se fossero indipendenti la legge di X non cambia qualsiasi informazione si venga a conoscere su Y.

Problema 3

Il bambino Aldo deve effettuare delle estrazioni da un'urna contenente 2 palline rosse (R), 2 blu (B) e 2 verdi (V). Ogni volta che estrae una pallina, Aldo la rimette nell'urna, ma con certezza non la ripesca nell'estrazione immediatamente successiva, scegliendo quindi a caso una pallina tra le altre 5. La prima estrazione è invece con probabilità uniforme sulle 6 palline.

1. Dire se gli esiti delle estrazioni effettuate da Aldo sono rappresentabili da variabili aleatorie indipendenti.
2. Rappresentare la sequenza dei colori delle palline estratte da Aldo come una catena di Markov sull'insieme degli stati $\{R, B, V\}$, e determinarne tutte le distribuzioni invarianti.
3. Si osserva che la terza pallina estratta da Aldo è rossa. Come cambia la probabilità che la prima pallina estratta da Aldo sia rossa? è maggiore o minore di 1/3?

Una soluzione:

1. No, le estrazioni successive non sono indipendenti, perché mentre alla prima estrazione si ha $P(X_1 = R) = 1/3$ (essendo uniforme sulle 6 palline) e pure alle estrazioni successive, ad esempio $P(X_2 = R) = 1/3$ per simmetria tra i tre colori (il problema non cambia se si scambiano tra loro le etichette dei tre colori), mentre abbiamo $P(X_2 = R|X_1 = R) = 1/5$ per la regola di estrazione descritta. (Osserviamo che si può rispondere più facilmente a questa domanda anche dopo aver costruito la catena del punto seguente.)

2. È possibile rappresentare gli esiti come una catena di Markov perché Aldo comunque 'dimentica' gli esiti delle estrazioni passate (quindi vale la proprietà di Markov) e inoltre la probabilità di transizione da un'estrazione alla successiva è omogenea nel tempo. Se l'insieme degli stati è $\{R, V, B\}$ (nell'ordine) troviamo la matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} \tag{11}$$

È una matrice irriducibile (regolare) e bistocastica, quindi l'unica distribuzione invariante è quella uniforme sui tre colori.

3. Osserviamo che la catena è stazionaria, quindi $P(X_i = \cdot) = 1/3$ per ogni colore e per ogni estrazione i. Per Bayes si ha

$$P(X_1 = R|X_3 = R) = P(X_3 = R|X_1 = R)P(X_1 = R)/P(X_3 = R) = P(X_3 = R|X_1 = R). \tag{12}$$

Sommando i pesi dei cammini $R \to R \to R$ $(1/5 \cdot 1/5)$, $R \to B \to R$ $(2/5 \cdot 2/5)$ e $R \to V \to R$ $(2/5 \cdot 2/5)$ troviamo

$$P(X_3 = R|X_1 = R) = \frac{9}{25} > \frac{1}{3}. \tag{13}$$