CdL in Ing. Robotica e dell'Automazione, Prob. e Proc. Stoc. (455AA)
A.A. 2023/24 - Prova in itinere 2024-01-29

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Il numero di email che arrivano in una casella di posta in un dato giorno è modellizzato mediante una variabile aleatoria avente legge Poisson di parametro $\lambda > 0$. Si supponga inoltre che in giorni diversi il numero di email in arrivo siano variabili indipendenti, tutte con lo stesso parametro λ.

1. Calcolare il momento secondo (in funzione di λ) della variabile che indica il numero totale di email ricevute in cinque giorni diversi.
2. Si contano le email ricevute in cinque giorni diversi, e si registrano i risultati: 30, 15, 20, 13 e 2 email rispettivamente. Fornire una stima di massima verosimiglianza per λ.
3. Supponendo invece di osservare che il numero totale di email ricevute in cinque giorni diversi è pari a 80, dire se la stima di massima verosimiglianza per λ è diversa rispetto a quella del punto precedente.

Una soluzione:

1. Le variabili dei numeri nei cinque giorni diverse (X_1, X_2, ..., X_5) sono tra loro indipendenti. Ricordiamo inoltre che il valor medio di una Poisson di parametro λ è appunto λ, e pure la varianza è λ. Per linearità del valor medio e indipendenza tra le variabili, si avrà quindi che il numero totale nei cinque giorni ha valor medio 5λ e varianza 5λ. Il momento secondo si ottiene sommando alla varianza il quadrato del valor medio, e quindi vale $5\lambda(5\lambda + 1)$.

2. Scriviamo la verosimiglianza per λ:

$$L(\lambda; X_1 = 30, X_2 = 15, X_3 = 20, X_4 = 13, X_5 = 2) \propto \lambda^{30+15+30+13+2} e^{-5\lambda} = \lambda^{80} e^{-5\lambda}. \tag{1}$$

Con i soliti passaggi troviamo che $\lambda_{MLE} = 80/5 = 16$.

3. Stavolta l'informazione è che nei cinque giorni il numero totale è ≥ 80. Usando il fatto che la somma di Poisson indipendenti ha legge Poisson, la variabile somma delle X_i è Poisson con parametro 5λ, perciò

$$L(\lambda; \text{somma} = 80) = (5\lambda)^{80} \frac{e^{-5\lambda}}{80!}. \tag{2}$$

Sappiamo però dal conto del punto precedente che il massimo della funzione $\lambda \mapsto \lambda^{80} e^{-5\lambda}$ è per $\lambda_{MLE} = 16$, quindi il massimo della nuova verosimiglianza è lo stesso.

Problema 2

Siano X, Y variabili gaussiane reali standard e indipendenti e si ponga $Z = X + Y$.

1. Calcolare la densità di $\log |Z|$.
2. Calcolare la densità congiunta del vettore aleatorio (X, Z) e determinare se le due marginali sono tra di loro indipendenti.
3. Si osserva che $Z = 1$. Fornire una stima per il valore di X.

Una soluzione:

1. È una applicazione del cambio di variabile. Però dobbiamo prima osservare che Z ha densità gaussiana $\mathcal{N}(0, 2)$ e trasformare di conseguenza la densità di Z con la funzione $g(z) = \log |z|$. L'inversa (generalizzata) è $u \mapsto g^{-1}(u) = \{e^u, e^{-u}\}$. La derivata è $g'(z) = sgn(z)/|z| = 1/z$, per cui troviamo $|g'(g^{-1}(u))| = e^{-u}$ (in entrambi i casi) e di conseguenza

$$p(g(Z) = u) = p(Z = e^u) \frac{1}{|g'(g^{-1}(u))|} = 2 \exp\left(-e^{2u}/4\right) \frac{e^u}{\sqrt{2\pi \cdot 2}}. \tag{3}$$

2. Le due variabili non sono indipendenti, poiché $\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, X) = 0 + 1 = 1$ sono positvamente correlate. D'altra parte $(X, Y) \mapsto (X, X + Y)$ è una trasformazione lineare affine di un vettore gaussiano, quindi (X, Z) è un vettore gaussiano. La media è il vettore nullo $(0, 0)$ mentre la matrice di covarianza è

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

3. Possiamo applicare la formula di Bayes:

$$\begin{aligned} p(X = x|X + Y = 1) &\propto p(X + Y = 1|X = x)p(X = x) \propto p(x + Y = 1|X = x)e^{-x^2/2} \\ &\propto p(Y = 1 - x)e^{-x^2/2} = e^{-\frac{1}{2}\left((1-x)^2+x^2\right)}. \end{aligned} \tag{5}$$

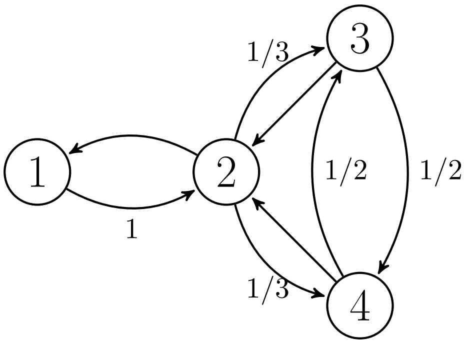
Vediamo che la densità di X condizionale a $X + Y = 1$ è ancora gaussiana. Per stimare il valore di x determiniamo ad esempio la sua moda (che comunque coinciderebbe con la media o la mediana, essendo gaussiana) e dopo i soliti passaggi (logaritmo e cambio di segno), vediamo che dobbiamo minimizzare

$$x \mapsto (1 - x)^2 + x^2 \tag{6}$$

che è chiaramente minima per $x = 1/2$. Ne segue che possiamo fornire la stima puntuale di X con il valore $1/2$.

Problema 3

Si consideri la catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con matrice di transizione Q rappresentata graficamente in figura.



1. Classificare gli stati della catena e calcolare tutte le distribuzioni invarianti.
2. Dire se la catena è regolare. In caso affermativo determinare il più piccolo $n \geq 1$ per cui tutte le componenti della matrice Q^n sono strettamente positive.
3. Supponendo la catena sia stazionaria, si osserva che $X_2 = 1$. Determinare lo stato (o gli stati) da cui è più probabile che la catena sia partita al tempo 0.

Una soluzione:

1. La catena è irriducibile. Esiste un'unica distribuzione invariante π. Per evidente simmetria possiamo già dire che $\pi_3 = \pi_4$. Impostando il bilancio di flusso otteniamo

$$\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2 \quad \pi_2 = \pi_1 + \pi_3/2 + \pi_4/2 = \pi_2/3 + \pi_3 \tag{7}$$

da cui

$$\pi = c\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \tag{8}$$

e quindi $c = 3/8$.

2. Sì la catena è regolare (anche se non soddisfa il criterio). Si trova $n = 4$ ($n = 3$ non è sufficiente perché non è possibile ritornare in 1 partendo da 1)

3. Usiamo la formula di Bayes,

$$P(X_0 = i|X_2 = 1) = \frac{P(X_0 = i)P(X_2 = 1|X_0 = i)}{P(X_2 = 1)}. \tag{9}$$

Dovendo determinare il valore i più probabile basterà confrontare i numeratori. Osserviamo che

$$(P(X_2 = i|X_0 = 1))_{i=1,\ldots,4} = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \tag{10}$$

Ricordando l'espressione trovata per π, calcoliamo quindi

$$(P(X_0 = i|X_2 = 1))_{i=1,\ldots,4} = c\left(\frac{1}{9}, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right). \tag{11}$$

Troviamo che tutti gli stati 1, 3 e 4 hanno probabilità massima.