DENSITÀ NOTEVOLI DI PROBABILITÀ (455AA)

DARIO TREVISAN

1. Leggi di variabili aleatorie discrete

Ricordiamo prima le funzioni dalla "combinatoria", definite per k, n numeri naturali:

Fattoriale $k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$ (con la convenzione $0! = 1$)

Coeff. binomiale $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1}.$

Osserviamo che $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{0}{0} = 1$. Introduciamo anche la seguente "generalizzazione" della funzione fattoriale, detta

Funzione Gamma di Eulero $\displaystyle \Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} \mathrm{d}x.$

definita per $r > 0$. Il legame tra funzione gamma e fattoriale è la seguente identità (che si può mostrare integrando per parti)

$$\Gamma(k+1) = k! \quad \text{per } k \text{ numero naturale}$$

Uniforme (su un "intervallo discreto".)

Parametro	$n \in \{1, 2, \ldots\}$
Valori	$X \in \{1, 2, \ldots, n\}$
Densità	$P(X = k) = 1/n$, $\quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$
Media	$\mathbb{E}[X] = (n+1)/2$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = (n^2 - 1)/12$
MGF	$\mathbb{E}[\exp(tX)] = (e^t - e^{(n+1)t})/(n(1 - e^t))$

Bernoulli (una variabile a valori in $\{0, 1\}$).

Parametro	$p \in [0, 1]$
Valori	$X \in \{0, 1\}$
Densità	$P(X = 1) = p$, $\quad P(X = 0) = 1 - p$
Media	$\mathbb{E}[X] = p$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$
MGF	$\mathbb{E}[\exp(tX)] = 1 + p(e^t - 1)$

Binomiale $B(n,p)$ (numero di successi in n esperimenti indipendenti, ciascuno con probabilità di successo p; somma di n variabili Bernoulli di parametro p indipendenti).

Parametri	$n \in \{1,2,\ldots\} \quad p \in [0,1]$
Valori	$X \in \{0,1,\ldots,n\}$
Densità	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$
Media	$\mathbb{E}[X] = np$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$
MGF	$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \big(1 + p(e^t - 1)\big)^n$

Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. (approssima $B(n,p)$ con $p \to 0$, $n \to \infty$ e $np \to \lambda$)

Parametro	$\lambda > 0$
Valori	$X \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$
Densità	$P(X=k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$
Media	$\mathbb{E}[X] = \lambda$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = \lambda$
MGF	$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \exp\big(\lambda(e^t - 1)\big)$

Geometrica. (numero dei tentativi prima di ottenere un successo in una successione di esperimenti indipendenti, ciascuno con probabilità p di successo, es. lanci di moneta). La geometrica "modificata" invece indica i tentativi totali (incluso quindi quello di successo). Se X è geometrica modificata, $X-1$ è geometrica.

Parametro	$p \in (0,1)$
Valori	$X \in \{0,1,2,\ldots\}$
Densità	$P(X=k) = p(1-p)^k$
Media	$\mathbb{E}[X] = (1-p)/p$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$
MGF	$\mathbb{E}[\exp(tX)] = 1/\big(1-(1-p)e^t\big) \quad$ per $t < -\log(1-p)$
Ass. mem.	$P((X-k_0) = k \mid X \geq k_0) = p(1-p)^k$

2. Leggi di variabili aleatorie continue (con densità)

Uniforme. (in un intervallo $[a, b]$)

Parametri	$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$
Valori	$X \in [a, b]$
Densità	$\varrho(X = x) = 1/(b - a)$
Media	$\mathbb{E}[X] = (a + b)/2$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
MGF	$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \left(e^{tb} - e^{ta}\right)/t$
CDF	$P(X \leq t) = (t - a)/(b - a)$ per $t \in [a, b]$.

Esponenziale $\mathcal{E}(\lambda)$ (indica il tempo di vita di un dispositivo, un tempo di attesa, ecc.)

Parametro	$\lambda > 0$
Valori	$X \in (0, \infty)$
Densità	$\varrho(X = x) = \lambda e^{-\lambda x}$
Media	$\mathbb{E}[X] = \lambda^{-1}$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = \lambda^{-2}$
MGF	$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \lambda/(\lambda - t)$ per $t < \lambda$
CDF	$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ per $t \in [0, \infty)$.
Ass. mem.	$\varrho((X - x_0) = x \mid X > x_0) = \lambda e^{-\lambda x}$
Min. ind.	$\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ è $\mathcal{E}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$ se X_i è $\mathcal{E}(\lambda_i)$ e tutte indipendenti

Gaussiana (unidimensionale) $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Parametri	$m \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 > 0$
Valori	$X \in \mathbb{R}$
Densità	$\varrho(X = x) = e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}/\sqrt{2\pi\sigma^2}$
Media	$\mathbb{E}[X] = m$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
MGF	$\mathbb{E}[\exp(tX)] = \exp\left(tm + t^2\sigma^2/2\right)$
CDF	non ha espressione analitica, usare tavole o comando *pnorm()* in R.
Affinità	Se X è $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\lambda X + c$ è $\mathcal{N}(\lambda m + c, \lambda^2\sigma^2)$
Somma	Se X, Y sono gaussiane indipendenti, $X + Y$ è gaussiana

Weibull Weibull(α, r)

Parametri	$\alpha > 0$ (forma), $s > 0$ (scala)
Valori	$X \in (0, \infty)$
Densità	$\varrho(X = x) = (x/s)^{\alpha-1} e^{-(x/s)^\alpha} \alpha/s$
Media	$\mathbb{E}[X] = s\Gamma(1 + 1/\alpha)$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = s^2 \left(\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma(1 + 1/\alpha)^2\right)$
Momenti	$\mathbb{E}[X^n] = s^n \Gamma(1 + n/\alpha)$
CDF	$P(X \leq t) = 1 - e^{-(t/s)^\alpha}$ per $t \geq 0$.
Oss	Se X è esponenziale $\mathcal{E}(\lambda)$, $X^{1/\alpha}$ è Weibull$(\alpha, 1/\lambda)$

Gamma $\Gamma(\alpha, s)$

Parametri	$\alpha > 0$ (forma), $s > 0$ (scala)
Valori	$X \in (0, \infty)$
Densità	$\varrho(X = x) = (x/s)^{\alpha-1} e^{-x/s} 1/(s\Gamma(\alpha))$
Media	$\mathbb{E}[X] = s\alpha$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = s^2\alpha$
MGF	$\mathbb{E}[\exp(tX)] = (1 - st)^{-\alpha}$ per $t < 1/s$
CDF	non ha espressione analitica, usare tavole o comando *pgamma()* in R.
$\chi^2(n)$	Se $X_1, \ldots, X_n$ sono gaussiane standard $\mathcal{N}(0,1)$ indipendenti, la variabile $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ ha densità $\Gamma(n/2, 2)$, detta $\chi^2(n)$(chi-quadrato con n gradi di libertà)

Beta $B(\alpha_0, \alpha_1)$ Si usa per indicare la probabilità di un parametro $p \in (0,1)$ incerto (esempi: frazione di palline rosse su palline totali in una scatola non osservata; probabilità che esca testa in una moneta truccata ecc.)

Parametri	$\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ (parametri di forma)
Valori	$X \in (0, 1)$
Densità	$\varrho(X = x) = x^{\alpha_0 - 1}(1 - x)^{\alpha_1 - 1} B(\alpha_0, \alpha_1)$ con $B(\alpha_0, \alpha_1) = \Gamma(\alpha_0)\Gamma(\alpha_1)/\Gamma(\alpha_0 + \alpha_1)$
Media	$\mathbb{E}[X] = \alpha_0(\alpha_0 + \alpha_1)$
Varianza	$\mathrm{Var}(X) = \alpha_0\alpha_1 / \left[(\alpha_0 + \alpha_1)^2(\alpha_0 + \alpha_1 + 1)\right]$
CDF	non ha espressione analitica, usare tavole o comando *pbeta()* in R.
OSS	se X è $B(\alpha_0, \alpha_1)$, $1 - X$ è $B(\alpha_1, \alpha_0)$.