

La durata della prova è di **due** ore. Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

**Problema 1**

Una intelligenza artificiale è stata “istruita” a riconoscere le cifre  $\{0, 1, 2\}$  scritte a mano da un utente. Se introduciamo le variabili aleatorie  $I \in \{0, 1, 2\}$  per la cifra inserita ed  $R \in \{0, 1, 2\}$  per quella riconosciuta (output), i programmatori ritengono che

$$P(R = 0|I = 0) = P(R = 1|I = 1) = \frac{2}{3}, \quad P(R = 2|I = 2) = \frac{1}{3},$$

e per le rimanenti impongono  $P(R = j|I = i) = P(R = k|I = i)$ , per  $j \neq i, k \neq i$ . Supponendo che  $I \in \{0, 1, 2\}$  abbia legge uniforme (rispetto all’informazione iniziale  $\Omega$ ),

1. calcolare la densità discreta di  $R$  (rispetto ad  $\Omega$ ),  $\mathbb{E}[R|\Omega]$  e  $\text{Var}(R|\Omega)$ ;
2. sapendo che  $\{R = 0\}$ , calcolare la densità discreta di  $I$ , il valore atteso  $\mathbb{E}[I|R = 0]$  e  $\text{Var}(I|R = 0)$ ;
3. dire se gli eventi  $\{R = 0\}$ ,  $\{I \neq 0\}$  sono indipendenti (rispetto ad  $\Omega$ );
4. è più probabile che sia  $\{R = I\}$  o  $\{R \neq I\}$  (rispetto ad  $\Omega$ )?

**Una soluzione:**

Notiamo intanto che

$$P(R = 1|I = 0) = P(R = 2|I = 0) = \frac{1}{6}, \quad P(R = 0|I = 1) = P(R = 2|I = 1) = \frac{1}{6}$$

e infine

$$P(R = 0|I = 2) = P(R = 1|I = 2) = \frac{1}{3}.$$

1. Per ogni  $k \in \{0, 1, 2\}$  decomponiamo secondo le alternative  $\{I = i\}$  ottenendo

$$P(R = k|\Omega) = \sum_{i=0}^2 P(R = k|I = i)P(I = i|\Omega) = \frac{1}{3} \left( \sum_{i=0}^2 P(R = k|I = i) \right).$$

Precisamente troviamo

$$P(R = 0|\Omega) = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{18}$$

$$P(R = 1|\Omega) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{18}$$

$$P(R = 2|\Omega) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{18}.$$

Per il valore atteso, usiamo la definizione

$$\mathbb{E}[R|\Omega] = \sum_{k=0}^2 kP(R = k|\Omega) = P(R = 1|\Omega) + 2P(R = 2|\Omega) = \frac{7 + 2 \cdot 4}{18} = \frac{15}{18} \approx 0,83.$$

Per la varianza, calcoliamo prima

$$\mathbb{E} [R^2|\Omega] = \sum_{k=0}^2 k^2 P(R = k|\Omega) = P(R = 1|\Omega) + 4P(R = 2|\Omega) = \frac{7 + 4 \cdot 4}{18} = \frac{23}{18} \approx 1,28,$$

da cui  $\text{Var} (R|\Omega) = \frac{23}{18} - \left(\frac{15}{18}\right)^2 = \frac{189}{18^2} \approx 0,58$ .

2. Calcoliamo per ogni  $i \in \{0, 1, 2\}$ , usando la formula di Bayes

$$P(I = i|R = 0) = \frac{P(R = 0|I = i) \cdot P(I = i|\Omega)}{P(R = 0|\Omega)} = P(R = 0|I = i) \cdot \frac{6}{7}.$$

Si trova

$$P(I = 0|R = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4}{7},$$

$$P(I = 1|R = 0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{7},$$

$$P(I = 2|R = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{7}.$$

Per il valore atteso, usiamo la definizione

$$\mathbb{E} [I|R = 0] = \sum_{i=0}^2 iP(I = i|R = 0) = P(I = 1|R = 0) + 2P(I = 2|R = 0) = \frac{5}{7},$$

per la varianza calcoliamo prima

$$\mathbb{E} [I^2|R = 0] = \sum_{i=0}^2 i^2 P(I = i|R = 0) = P(I = 1|R = 0) + 4P(I = 2|R = 0) = \frac{9}{7},$$

e infine  $\text{Var} (I|R = 0) = \frac{9}{7} - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{38}{49} \approx 0,78$ .

3. Non sono indipendenti: avendo calcolato la legge di  $I$  sapendo  $R = 0$ , basta notare che

$$P(I \neq 0|R = 0) = P(I = 1|R = 0) + P(I = 2|R = 0) = \frac{5}{7},$$

mentre  $P(I \neq 0|\Omega) = P(I = 1|\Omega) + P(I = 2|\Omega) = \frac{2}{3}$ .

4. Possiamo decomporre secondo le alternative  $\{I = i\}$ ,

$$\begin{aligned} P(R = I|\Omega) &= \sum_{i=0}^2 P(R = I | \{I = i\} \cap \Omega) P(I = i|\Omega) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 P(R = i | \{I = i\} \cap \Omega) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Siccome gli eventi  $\{R = I\}$ ,  $\{R \neq I\}$  sono un sistema di alternative, si ha

$$P(R \neq I|\Omega) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} < \frac{5}{9} = P(R = I|\Omega).$$

## Problema 2

Un cellulare può comunicare con l'antenna ripetitrice più vicina usando una tra due possibili frequenze, inviando un singolo "pacchetto" di dati al secondo, se almeno una delle due frequenze è libera. Tuttavia, ad ogni secondo, la prima frequenza risulta occupata con probabilità 40%, mentre la seconda con probabilità 10%, indipendentemente dalla prima. Inoltre possiamo ritenere che lo stato di ciascuna delle due frequenze (occupata o libera) in ciascun secondo sia indipendente dagli stati passati o futuri di queste. Fissato un intervallo temporale di 100 secondi, sia  $X_1$  il numero di secondi (totali) in cui la prima frequenza è libera e  $X$  il numero di secondi (totali) in cui è possibile trasmettere.

1. Calcolare la probabilità che in un dato secondo il cellulare possa trasmettere.
2. Descrivere la densità discreta, il valore atteso e la varianza delle variabili  $X_1$  ed  $X$  rispetto all'informazione  $\Omega$  sopra descritta.
3. Calcolare il valore atteso e la varianza di  $X - X_1$  (rispetto ad  $\Omega$ ). (*Sugg: tale variabile conta un numero di "successi"...*)
4. Per valutare la performance del sistema, si introduce un "costo" per secondo pari a 10 se non è possibile comunicare, 6 se solo la seconda frequenza è libera, e 2 altrimenti. Il costo totale  $C$  sui 100 secondi è quindi la variabile aleatoria data dalla somma dei costi per ciascun secondo. Esprimere la variabile  $C$  come funzione di  $X_1$  ed  $X$ , calcolarne il valore atteso (rispetto ad  $\Omega$ ).

### Una soluzione:

1. Introduciamo gli eventi  $F_1 =$  "la prima frequenza è libera",  $F_2 =$  "la seconda frequenza è libera". Calcoliamo

$$\begin{aligned} P(F_1 \text{ oppure } F_2 | \Omega) &= P(F_1 \text{ oppure } F_2 | F_1)60\% + P(F_1 \text{ oppure } F_2 | F_1^c)40\% \\ &= 60\% + P(F_2 | F_1^c)40\% = 60\% + 90\% \cdot 40\% = 96\%. \end{aligned}$$

Possiamo usare anche la formula per la probabilità dell'unione di due eventi generali:

$$P(F_1 \text{ oppure } F_2 | \Omega) = P(F_1 | \Omega) + P(F_2 | \Omega) - P(F_1 \cap F_2 | \Omega) = 60\% + 90\% - 60\% \cdot 90\% = 96\%.$$

2. La variabile  $X_1$  indica il numero di "successi" in 100 tentativi indipendenti, in cui la probabilità di ciascun successo (ossia la prima frequenza è libera) è 60%. Di conseguenza, ha legge  $\text{Bin}(100, 60\%)$ . In modo simile, la variabile  $X$  indica numero di "successi" in 100 tentativi indipendenti, in cui la probabilità di ciascun successo è la probabilità che almeno una delle due frequenze sia libera, che abbiamo calcolato essere 96%, quindi  $X$  ha legge  $\text{Bin}(100, 96\%)$ . Ricordando i risultati generali troviamo quindi

$$\mathbb{E}[X_1 | \Omega] = 100 \cdot 60\% = 60 \quad \text{Var}(X_1 | \Omega) = 100 \cdot 60\% \cdot 40\% = 24,$$

$$\mathbb{E}[X | \Omega] = 100 \cdot 96\% = 96 \quad \text{Var}(X | \Omega) = 100 \cdot 96\% \cdot 4\% = 3,84.$$

3. Viste le definizioni di  $X$  ed  $X_1$ , ne segue che  $X - X_1$  conta il numero di secondi in cui seconda frequenza è libera e la prima sequenza non lo è. La probabilità di questo evento (in ciascun secondo) è  $P(F_1^c \cap F_2 | \Omega) = P(F_1^c | \Omega)P(F_2 | \Omega) = 40\% \cdot 90\% = 36\%$ . Dall'ipotesi di indipendenza tra i vari secondi, segue che la legge di  $X - X_1$  è  $\text{Bin}(100, 36\%)$  e quindi

$$\mathbb{E}[X - X_1 | \Omega] = 100 \cdot 36\% = 36 \quad \text{Var}(X - X_1 | \Omega) = 100 \cdot 36\% \cdot 64\% = 23,04.$$

4. Il numero di secondi in cui non è possibile comunicare è dato da  $100 - X$ , il numero di secondi in cui è libera solo la seconda frequenza è  $X - X_1$ , mentre il numero di secondi rimanente è  $100 - (100 - X + X - X_1) = X_1$ . Ne segue che il costo totale è

$$C = 10 \cdot (100 - X) + 6 \cdot (X - X_1) + 2 \cdot X_1 = 1000 - 4 \cdot X - 4 \cdot X_1.$$

Per calcolarne il valore atteso, usiamo la linearità e otteniamo

$$\mathbb{E}[C | \Omega] = \mathbb{E}[1000 - 4 \cdot X - 4 \cdot X_1 | \Omega] = 1000 - 4 \cdot 96 - 4 \cdot 60 = 376.$$

La durata della prova è di DUE ore. Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

### Problema 1

Un cellulare può comunicare con l'antenna ripetitrice più vicina usando una tra due possibili frequenze, inviando un singolo "pacchetto" di dati al secondo, se almeno una delle due frequenze è libera. Tuttavia, ad ogni secondo, la prima frequenza risulta occupata con probabilità 40%, mentre la seconda con probabilità 10%, indipendentemente dalla prima. Inoltre possiamo ritenere che lo stato di ciascuna delle due frequenze (occupata o libera) in ciascun secondo sia indipendente dagli stati passati o futuri di queste. Fissato un intervallo temporale di 100 secondi, sia  $X_1$  il numero di secondi (totali) in cui la prima frequenza è libera e  $X$  il numero di secondi (totali) in cui è possibile trasmettere.

1. Calcolare la probabilità che in un dato secondo il cellulare possa trasmettere.
2. Descrivere la densità discreta, il valore atteso e la varianza delle variabili  $X_1$  ed  $X$  rispetto all'informazione  $\Omega$  sopra descritta.
3. Calcolare il valore atteso e la varianza di  $X - X_1$  (rispetto ad  $\Omega$ ). (*Sugg: tale variabile conta un numero di "successi"...*)
4. Per valutare la performance del sistema, si introduce un "costo" per secondo pari a 10 se non è possibile comunicare, 6 se solo la seconda frequenza è libera, e 2 altrimenti. Il costo totale  $C$  sui 100 secondi è quindi la variabile aleatoria data dalla somma dei costi per ciascun secondo. Esprimere la variabile  $C$  come funzione di  $X_1$  ed  $X$ , calcolarne il valore atteso (rispetto ad  $\Omega$ ).

#### Una soluzione:

1. Introduciamo gli eventi  $F_1 =$  "la prima frequenza è libera",  $F_2 =$  "la seconda frequenza è libera". Calcoliamo

$$\begin{aligned} P(F_1 \text{ oppure } F_2 | \Omega) &= P(F_1 \text{ oppure } F_2 | F_1)60\% + P(F_1 \text{ oppure } F_2 | F_1^c)40\% \\ &= 60\% + P(F_2 | F_1^c)40\% = 60\% + 90\% \cdot 40\% = 96\%. \end{aligned}$$

Possiamo usare anche la formula per la probabilità dell'unione di due eventi generali:

$$P(F_1 \text{ oppure } F_2 | \Omega) = P(F_1 | \Omega) + P(F_2 | \Omega) - P(F_1 \cap F_2 | \Omega) = 60\% + 90\% - 60\% \cdot 90\% = 96\%.$$

2. La variabile  $X_1$  indica il numero di "successi" in 100 tentativi indipendenti, in cui la probabilità di ciascun successo (ossia la prima frequenza è libera) è 60%. Di conseguenza, ha legge Bin(100, 60%). In modo simile, la variabile  $X$  indica numero di "successi" in 100 tentativi indipendenti, in cui la probabilità di ciascun successo è la probabilità che almeno una delle due frequenze sia libera, che abbiamo calcolato essere 96%, quindi  $X$  ha legge Bin(100, 96%). Ricordando i risultati generali troviamo quindi

$$\mathbb{E}[X_1 | \Omega] = 100 \cdot 60\% = 60 \quad \text{Var}(X_1 | \Omega) = 100 \cdot 60\% \cdot 40\% = 24,$$

$$\mathbb{E}[X|\Omega] = 100 \cdot 96\% = 96 \quad \text{Var}(X_1|\Omega) = 100 \cdot 96\% \cdot 4\% = 3,84.$$

3. Viste le definizioni di  $X$  ed  $X_1$ , ne segue che  $X - X_1$  conta il numero di secondi in cui seconda frequenza è libera e la prima sequenza non lo è. La probabilità di questo evento (in ciascun secondo) è  $P(F_1^c \cap F_2|\Omega) = P(F_1^c|\Omega)P(F_2|\Omega) = 40\% \cdot 90\% = 36\%$ . Dall'ipotesi di indipendenza tra i vari secondi, segue che la legge di  $X - X_1$  è  $\text{Bin}(100, 36\%)$  e quindi

$$\mathbb{E}[X - X_1|\Omega] = 100 \cdot 36\% = 36 \quad \text{Var}(X - X_1|\Omega) = 100 \cdot 36\% \cdot 64\% = 23,04.$$

4. Il numero di secondi in cui non è possibile comunicare è dato da  $100 - X$ , il numero di secondi in cui è libera solo la seconda frequenza è  $X - X_1$ , mentre il numero di secondi rimanente è  $100 - (100 - X + X - X_1) = X_1$ . Ne segue che il costo totale è

$$C = 10 \cdot (100 - X) + 6 \cdot (X - X_1) + 2 \cdot X_1 = 1000 - 4 \cdot X - 4 \cdot X_1.$$

Per calcolarne il valore atteso, usiamo la linearità e otteniamo

$$\mathbb{E}[C|\Omega] = \mathbb{E}[1000 - 4 \cdot X - 4 \cdot X_1|\Omega] = 1000 - 4 \cdot 96 - 4 \cdot 60 = 376.$$

### Problema 2

Sia  $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$  una variabile aleatoria con legge uniforme (rispetto ad una informazione iniziale  $\Omega$ ) e, sapendo  $\{\theta = p\}$ , sia  $(X_n)_{n \geq 1}$  una catena di Markov *stazionaria* sull'insieme degli stati  $\{1, 2, 3\}$  e probabilità di transizione data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 - 2p & p & p \\ p & 1 - 2p & p \\ p & p & 1 - 2p \end{pmatrix}.$$

1. Per ogni  $n \geq 1$  e per ogni  $p \in (0, \frac{1}{2}]$ , si calcoli la legge di  $X_n$  sia rispetto all'informazione  $\{\theta = p\}$  sia rispetto ad  $\Omega$ . I due eventi  $\{X_n = 1\}$ ,  $\{\theta > \frac{1}{4}\}$  sono indipendenti (rispetto ad  $\Omega$ )?
2. Calcolare le probabilità degli eventi

$$A = \{X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 2 \text{ e } X_3 = 3 \text{ e } X_4 = 1\}, \quad B = \{X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 1 \text{ e } X_3 = 1 \text{ e } X_4 = 1\}$$

sia rispetto all'informazione  $\{\theta = p\}$  (per ogni  $p \in (0, \frac{1}{2}]$ ) sia rispetto a  $\Omega$ .

3. Avendo osservato l'evento  $A$  (definito sopra) come cambia la legge di  $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ ? e avendo invece osservato l'evento  $B$ ? Calcolarne in ambo i casi valore atteso.
4. Avendo osservato l'evento  $A$ , qual è la probabilità che sia  $X_5 = 1$ ? e avendo invece osservato l'evento  $B$ ?

**Una soluzione:**

Calcoliamo le distribuzioni invarianti per la matrice con  $p \in (0, 1]$  fissato. Si trova, poiché  $p \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} Q^T - \text{Id} &= \begin{pmatrix} -2p & p & p \\ p & -2p & p \\ p & p & -2p \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui l'unica soluzione  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  compatibile con le condizione  $\sum_{i=1}^3 \mu_i = 1$  è  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Di conseguenza abbiamo  $P(X_n = i | \Omega \cap \{\theta = p\}) = \frac{1}{3}$ , per ogni  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,  $p \in (0, \frac{1}{2}]$ . Troviamo quindi che

$$P(X_n = i | \Omega) = \int_0^{\frac{1}{2}} P(X_n = i | \Omega \cap \{\theta = p\}) \varrho(\theta = p | \Omega) dp = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \cdot 2 dp = \frac{1}{3}.$$

Poiché  $P(X_n = i | \Omega \cap \{\theta = p\}) = \frac{1}{3} = P(X_n = i | \Omega)$  per ogni  $p \in (0, \frac{1}{2}]$  ciascuna variabile aleatoria  $X_n$  è indipendente da  $\theta$ , in particolare abbiamo che gli eventi  $\{X_n = 1\}$ ,  $\{\theta > \frac{1}{4}\}$  sono indipendenti. Si può calcolare anche esplicitamente

$$\begin{aligned} P(X_n = i | \theta > \frac{1}{4}) &= \int_0^{1/2} P(X_n = i | \{\theta > \frac{1}{2}\} \cap \{\theta = p\}) \varrho(\theta = p | \theta > \frac{1}{4}) \\ &= \int_{1/4}^{1/2} P(X_n = i | \theta = p) \varrho(\theta = p | \theta > \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{3} \int_{1/4}^{1/2} \varrho(\theta = p | \theta > \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} P(\theta > \frac{1}{4} | \theta > \frac{1}{4}) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. Rispetto all'informazione  $\{\theta = p\}$ , troviamo, usando la proprietà di Markov e la matrice di transizione

$$\begin{aligned} P(A | \theta = p) &= P(X_1 = 1 | \theta = p) \cdot P(X_2 = 2 | \{X_1 = 1\} \cap \theta = p) \\ &\quad \cdot P(X_3 = 3 | \{X_2 = 2\} \cap \theta = p) \cdot P(X_4 = 1 | \{X_3 = 3\} \cap \theta = p) \\ &= \frac{1}{3} \cdot p \cdot p \cdot p = \frac{p^3}{3}. \end{aligned}$$

In modo simile, troviamo

$$\begin{aligned} P(B | \theta = p) &= P(X_1 = 1 | \theta = p) \cdot P(X_2 = 1 | \{X_1 = 1\} \cap \theta = p) \\ &\quad \cdot P(X_3 = 1 | \{X_2 = 1\} \cap \theta = p) \cdot P(X_4 = 1 | \{X_3 = 1\} \cap \theta = p) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (1 - 2p) \cdot (1 - 2p) \cdot (1 - 2p) = \frac{(1 - 2p)^3}{3}. \end{aligned}$$

Per trovare le probabilità rispetto ad  $\Omega$ , integriamo

$$\begin{aligned} P(A | \Omega) &= \int_0^{1/2} P(A | \{\theta = p\} \cap \Omega) \varrho(\theta = p | \Omega) dp \\ &= \int_0^{1/2} \frac{p^3}{3} \cdot 2 dp = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{3 \cdot 2^5}. \end{aligned}$$

Similmente,

$$\begin{aligned} P(B|\Omega) &= \int_0^{1/2} P(B|\{\theta = p\} \cap \Omega) \varrho(\theta = p|\Omega) dp \\ &= \int_0^{1/2} \frac{(1-2p)^3}{3} \cdot 2 dp \quad \text{cambio variabile } t = 1 - 2p \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{3 \cdot 4}. \end{aligned}$$

3. Usiamo la formula di Bayes, caso discreto/continuo. Per ogni  $p \in (0, \frac{1}{2}]$ ,

$$\varrho(\theta = p|A) = \frac{P(A|\theta = p)\varrho(\theta = p|\Omega)}{P(A|\Omega)}.$$

Abbiamo già calcolato tutte le quantità nel punto precedente:

$$\varrho(\theta = p|A) = \frac{\frac{p^3}{3} \cdot 2}{\frac{1}{3 \cdot 2^5}} = 2^6 p^3.$$

Similmente, troviamo

$$\varrho(\theta = p|B) = \frac{P(B|\theta = p)\varrho(\theta = p|\Omega)}{P(B|\Omega)} = \frac{\frac{(1-2p)^3}{3} \cdot 2}{\frac{1}{3 \cdot 4}} = 8(1-2p)^3.$$

Nel primo caso, calcoliamo

$$\mathbb{E}[\theta|A] = \int_0^{1/2} p \cdot 2^6 p^3 dp = 2^6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{2}{5},$$

nel secondo caso invece

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\theta|A] &= \int_0^{1/2} p \cdot 8(1-2p)^3 dp \quad \text{cambio di variabile } t = 1 - 2p \leftrightarrow p = (1-t)/2, \\ &= 8 \int_0^1 \frac{1-t}{2} t^3 \frac{1}{2} dt \\ &= 2 \int_0^1 (t^3 - t^4) dt = 2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

4. Per calcolare  $P(X_5 = 1|A)$ , decomponiamo secondo il sistema di alternative  $\{\theta = p\}$ ,

$$\begin{aligned} P(X_5 = 1|A) &= \int_0^{1/2} P(X_5 = 1|\{\theta = p\} \cap A) \varrho(\theta = p|A) dp \\ &= \int_0^{1/2} (1-2p) \varrho(\theta = p|A) dp \quad \text{usando la proprietà di Markov} \\ &= \int_0^{1/2} (1-2p) 2^6 p^3 dp \quad \text{usando la densità di } \theta \text{ trovata al punto sopra} \\ &= \int_0^{1/2} (1-2p) 2^6 p^3 dp = 2^6 \int_0^{1/2} (p^3 - 2p^4) dp \\ &= 2^6 \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} - 2 \cdot \frac{1}{5} \right) \frac{1}{2^5} \\ &= 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$



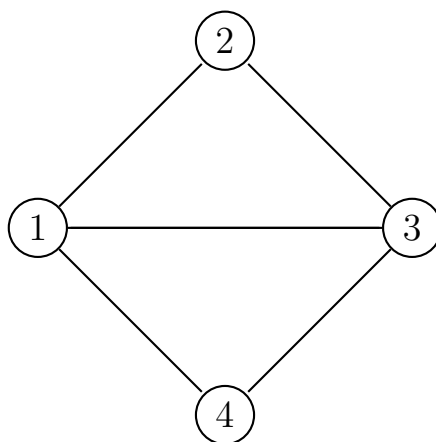
Similmente, per  $P(X_5 = 1|B)$ , abbiamo

$$\begin{aligned} P(X_5 = 1|B) &= \int_0^{1/2} P(X_5 = 1 | \{\theta = p\} \cap B) \varrho(\theta = p|B) dp \\ &= \int_0^{1/2} (1 - 2p) \varrho(\theta = p|B) dp \quad \text{usando la proprietà di Markov} \\ &= \int_0^{1/2} (1 - 2p) 8(1 - 2p)^3 dp \quad \text{usando la densità di } \theta \text{ trovata al punto sopra} \\ &= 4 \int_0^1 t^4 dt = \frac{4}{5} \quad \text{cambio di variabile } t = 1 - 2p. \end{aligned}$$

La durata della prova è di **due** ore. Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

**Problema 1**

Un software di spionaggio si è installato in uno dei 4 computer di una piccola rete, rappresentata in figura. Una caratteristica del software è che, ogni giorno, si “trasferisce” su un altro computer, scelto a caso uniformemente tra quelli direttamente collegati a quello in cui si trova (ad esempio, se si trova in 1, sceglie uno a caso tra 2, 3, 4; se si trova in 2, uno a caso tra 1 e 3, ecc.) indipendentemente dai computer che aveva già visitato in passato. Quindi, posto  $X_n \in \{1, 2, 3, 4\}$  il computer su cui è installato al giorno  $n$ , il processo  $(X_n)_{n \geq 1}$  è una catena di Markov omogenea.



1. Scrivere la matrice di transizione  $Q$  della catena e trovarne le distribuzioni invarianti. (Sugg: se la riduzione a gradini risultasse difficile, esibire almeno una distribuzione invariante  $\mu$  con  $\mu_1 = \mu_3$  e  $\mu_2 = \mu_4$ )
2. Sapendo che  $X_1 = 1$ , quale tra i due eventi

$$A := \{X_2 = 2, X_3 = 3 \text{ e } X_4 = 4\}, \quad B := \{X_2 = 3, X_3 = 1 \text{ e } X_4 = 3\},$$

è più probabile? e sapendo invece  $\{X_1 = 1 \text{ e } X_5 = 1\}$ ?

3. Si ponga  $\Theta := \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\theta := X_2$  e si introduca la funzione di perdita

$$L(\hat{\theta}, z) := \begin{cases} 0 & \text{se } \hat{\theta} = z, \\ 1 & \text{se } \hat{\theta} \neq z \text{ e } z \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } \hat{\theta} \neq z \text{ e } z \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Quali decisioni  $\hat{\theta}$  minimizzano  $\text{Risk}_L(\hat{\theta}| \text{la catena è stazionaria})$ ? Quali invece minimizzano  $\text{Risk}_L(\hat{\theta}|X_1 = 1)$ ?

**Una soluzione:**

1. Ricaviamo  $Q$  dal testo, ordinando gli stati secondo l'ordine naturale  $\{1, 2, 3, 4\}$ :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Per trovare le distribuzioni invarianti, scriviamo  $Q^T - I$  e riduciamo a gradini con operazioni di riga:

$$\begin{aligned} Q^T - I &= \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & -1 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/3 & -1/2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & -3 & 3/2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1/2 & -1/3 & -1/2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & -3 & 3/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1/2 & -4/3 & 5/2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3/2 & -4 & 9/2 \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -8/3 & 5 \\ 0 & 3 & -8 & 9 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -8/3 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 12 \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si trova quindi che tutti gli autovettori sono della forma  $t(3/2, 1, 3/2, 1)$ . Imponendo che la somma sia 1 si trova

$$t \left( \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 1 \right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{5},$$

da cui l'unica distribuzione invariante è  $\mu := (3/10, 2/10, 3/10, 2/10)$ .

Volendo usare il suggerimento, cerchiamo una distribuzione invariante del tipo  $\mu = (a, b, a, b)$ , per  $a, b \in [0, 1]$ , visto che la catena rimane invariata se si scambiano gli stati  $1 \leftrightarrow 3$  e  $2 \leftrightarrow 4$ . Imponendo la condizione  $\mu Q = \mu$ , tutte e quattro le equazioni si riducono a

$$b = \frac{2}{3}a$$

e quindi si trova di nuovo un vettore della forma  $b(3/2, 1, 3/2, 1)$  e imponendo che la somma sia 1 si conclude come sopra.

**Una soluzione:**

2. Calcoliamo, usando la proprietà di Markov e la matrice di transizione

$$\begin{aligned} P(A|X_1 = 1) &= P(X_2 = 2, X_3 = 3 \text{ e } X_4 = 4|X_1 = 1) \\ &= P(X_4 = 4|X_3 = 3)P(X_3 = 3|X_2 = 2)P(X_2 = 2|X_1 = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Similmente,

$$\begin{aligned} P(B|X_1 = 1) &= P(X_2 = 3, X_3 = 1 \text{ e } X_4 = 3|X_1 = 1) \\ &= P(X_4 = 3|X_3 = 1)P(X_3 = 1|X_2 = 3)P(X_2 = 3|X_1 = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Di conseguenza, è più probabile l'evento  $A$ . Sapendo invece  $\{X_1 = 1 \text{ e } X_5 = 1\}$ , conviene usare la formula di Bayes e la proprietà di Markov

$$\begin{aligned} P(A|X_1 = 1 \text{ e } X_5 = 1) &= \frac{P(X_5 = 1|X_1 = 1 \text{ e } A)P(A|X_1 = 1)}{P(X_5 = 1|X_1 = 1)} \\ &= \frac{P(X_5 = 1|X_4 = 4)P(A|X_1 = 1)}{P(X_5 = 1|X_1 = 1)} = \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} \cdot \frac{1}{P(X_5 = 1|X_1 = 1)}, \end{aligned}$$

mentre per  $B$  troviamo

$$\begin{aligned} P(B|X_1 = 1 \text{ e } X_5 = 1) &= \frac{P(X_5 = 1|X_1 = 1 \text{ e } B)P(B|X_1 = 1)}{P(X_5 = 1|X_1 = 1)} \\ &= \frac{P(X_5 = 1|X_4 = 3)P(B|X_1 = 1)}{P(X_5 = 1|X_1 = 1)} = \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1}{P(X_5 = 1|X_1 = 1)}. \end{aligned}$$

Essendo il fattore  $1/P(X_5 = 1|X_1 = 1)$  in comune, per dare la risposta non è necessario calcolarlo. Si trova quindi che la risposta non cambia: è sempre più probabile l'evento  $A$ .

3. Calcoliamo ricordando che la legge di  $X_2$ , sapendo che la catena è stazionaria è comunque data dal vettore  $\mu = (3/10, 2/10, 3/10, 2/10)$ ,

$$\begin{aligned} \text{Risk}_L(1|\text{staz.}) &= L(1, 1)\mu_1 + L(1, 2)\mu_2 + L(1, 3)\mu_3 + L(1, 4)\mu_4 \\ &= 1 \cdot \mu_2 + 2 \cdot \mu_3 + 1 \cdot \mu_4 \\ &= \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{10} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Similmente,

$$\begin{aligned} \text{Risk}_L(2|\text{staz.}) &= L(2, 1)\mu_1 + L(2, 2)\mu_2 + L(2, 3)\mu_3 + L(2, 4)\mu_4 \\ &= 2 \cdot \mu_1 + 2 \cdot \mu_3 + 1 \cdot \mu_4 \\ &= \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{10} = \frac{14}{10}. \end{aligned}$$

Con calcoli analoghi, si trova  $\text{Risk}_L(3|\text{staz.}) = \text{Risk}_L(1|\text{staz.}) = 9/10$  e pure  $\text{Risk}_L(4|\text{staz.}) = \text{Risk}_L(2|\text{staz.}) = 14/10$ . Quindi le decisioni che minimizzano sono  $\hat{\theta} = 1$  e  $\hat{\theta} = 3$ .

Nel caso invece in cui l'informazione sia  $X_1 = 1$ , abbiamo che la legge di  $X_2$  è rappresentata dal vettore  $(1, 0, 0, 0)Q = (0, 1/3, 1/3, 1/3)$ . Troviamo allora

$$\begin{aligned}\text{Risk}_L(1|X_1 = 1) &= L(1, 1) \cdot 0 + L(1, 2)\frac{1}{3} + L(1, 3)\frac{1}{3} + L(1, 4)\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ \text{Risk}_L(2|X_1 = 1) &= L(2, 1) \cdot 0 + L(2, 2)\frac{1}{3} + L(2, 3)\frac{1}{3} + L(2, 4)\frac{1}{3} = 1 \\ \text{Risk}_L(3|X_1 = 1) &= L(3, 1) \cdot 0 + L(3, 2)\frac{1}{3} + L(3, 3)\frac{1}{3} + L(3, 4)\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \text{Risk}_L(4|X_1 = 1) &= L(4, 1) \cdot 0 + L(4, 2)\frac{1}{3} + L(4, 3)\frac{1}{3} + L(4, 4)\frac{1}{3} = 1.\end{aligned}$$

La decisione che minimizza è quindi  $\hat{\theta} = 3$ .

## Problema 2

La durata  $T \in \mathbb{R}$  del tempo di caricamento di una pagina web è rappresentata una variabile aleatoria continua. Volendo studiarla da un punto di vista probabilistico, si formulano tre ipotesi sulla sua densità: secondo l'ipotesi  $H_0$ ,  $T$  è uniforme sull'intervallo  $[0, 4]$ ; secondo  $H_1$ ,  $T$  è esponenziale di parametro  $\frac{1}{2}$ ; secondo  $H_2$  è gaussiana  $\mathcal{N}(2, 1)$ . Poniamo inoltre

$$P(H_0|\Omega) = P(H_2|\Omega) = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad P(H_1|\Omega) = \frac{1}{2}.$$

1. Calcolare il valore atteso  $\mathbb{E}[T|\Omega]$  e la varianza  $\text{Var}(T|\Omega)$ .
2. Si osserva  $T > 2$ . Quale tra le tre ipotesi è più probabile?
3. Si osserva  $T = 2$ . Quale tra le tre ipotesi è più probabile? (*Sugg: può essere utile sapere che  $e \approx 2,72$ ,  $\sqrt{2\pi} \approx 2,51$* )
4. (*Facoltativo*) Per ciascun  $i \in \{0, 1, 2\}$ , determinare un  $t_i \in [0, \infty)$  per cui, sapendo  $T = t_i$ ,  $H_i$  diventa l'ipotesi più probabile.

### Una soluzione:

1. Usando le regole di calcolo del valore atteso, abbiamo

$$\mathbb{E}[T|\Omega] = \sum_{i=0}^2 \mathbb{E}[T|H_i] P(H_i|\Omega) = \sum_{i=0}^2 2P(H_i|\Omega) = 2,$$

avendo notato che, in tutte e tre le ipotesi, il valore atteso di  $T$  è 2. Per calcolare la varianza, possiamo calcolare in modo analogo  $\mathbb{E}[T^2|\Omega]$ , oppure più semplicemente direttamente dalla definizione

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(T-2)^2|\Omega] &= \sum_{i=0}^2 \mathbb{E}[(T-2)^2|H_i] P(H_i|\Omega) \\ &= \text{Var}(T|H_0) \frac{1}{4} + \text{Var}(T|H_1) \frac{1}{2} + \text{Var}(T|H_2) \frac{1}{4} \\ &= \frac{4^2}{12} \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{4} = \frac{4 + 24 + 3}{12} = \frac{31}{12}\end{aligned}$$

2. Usiamo la formula di Bayes (caso discreto/discreto): per ogni  $i \in \{0, 1, 2\}$ , si ha

$$P(H_i|T > 2) = \frac{P(T > 2|H_i)P(H_i|\Omega)}{P(T > 2|\Omega)}.$$

Calcoliamo separatamente

$$P(T > 2|H_0) = \int_2^4 \frac{1}{4} dt = \frac{1}{2},$$

$$P(T > 2|H_1) = \int_2^\infty \frac{1}{2} e^{-t/2} dt = e^{-1},$$

$$P(T > 2|H_2) = P(Y + 2 > 2|Y \text{ è } \mathcal{N}(0, 1)) = P(Y > 0|Y \text{ è } \mathcal{N}(0, 1)) = \frac{1}{2}.$$

Siccome il denominatore  $P(T > 2|\Omega)$  è comune a tutte e tre le probabilità  $P(H_i|T > 2)$ , per capire quale sia la maggiore basta confrontare i tre numeratori, che risultano rispettivamente

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}, \quad e^{-1} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}.$$

Poiché  $e \approx 2,72$ , ne segue che la probabilità maggiore è per l'ipotesi  $H_1$ .

3. Usiamo la formula di Bayes (caso discreto/continuo): per ogni  $i \in \{0, 1, 2\}$ , si ha

$$P(H_i|T = 2) = \frac{\varrho(T = 2|H_i)P(H_i|\Omega)}{\varrho(T = 2|\Omega)},$$

dove  $\varrho(T = 2|\Omega) = \sum_{i=0}^2 \varrho(T = 2|H_i)P(H_i|\Omega)$ . Calcoliamo separatamente

$$\varrho(T = 2|H_0) \cdot P(H_0|\Omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

$$\varrho(T = 2|H_1) \cdot P(H_1|\Omega) = \frac{1}{2} e^{-1} \cdot \frac{1}{2} = e^{-1} \frac{1}{4},$$

$$\varrho(T = 2|H_2) \cdot P(H_2|\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(2-2)^2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{4}.$$

Ancora una volta, il denominatore  $\varrho(T = 2|\Omega)$  è comune a tutte e tre le probabilità  $P(H_i|T = 2)$ , quindi per capire quale sia la maggiore basta confrontare i tre numeratori. Usando il suggerimento, ne segue che  $P(H_2|T = 2)$  è la maggiore.

3. Usiamo ancora la formula di Bayes (caso discreto/continuo): per ogni  $t \in [0, \infty)$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ , si ha

$$P(H_i|T = t) = \frac{\varrho(T = t|H_i)P(H_i|\Omega)}{\varrho(T = t|\Omega)}.$$

Calcoliamo separatamente i numeratori:

$$\varrho(T = t|H_0) \cdot P(H_0|\Omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}, \quad \text{per } t \in [0, 4], \text{ 0 altrimenti,}$$

$$\varrho(T = t|H_1) \cdot P(H_1|\Omega) = \frac{1}{2} e^{-t/2} \cdot \frac{1}{2} = e^{-t/2} \frac{1}{4},$$

$$\varrho(T = t|H_2) \cdot P(H_2|\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(t-2)^2} \cdot \frac{1}{4}.$$

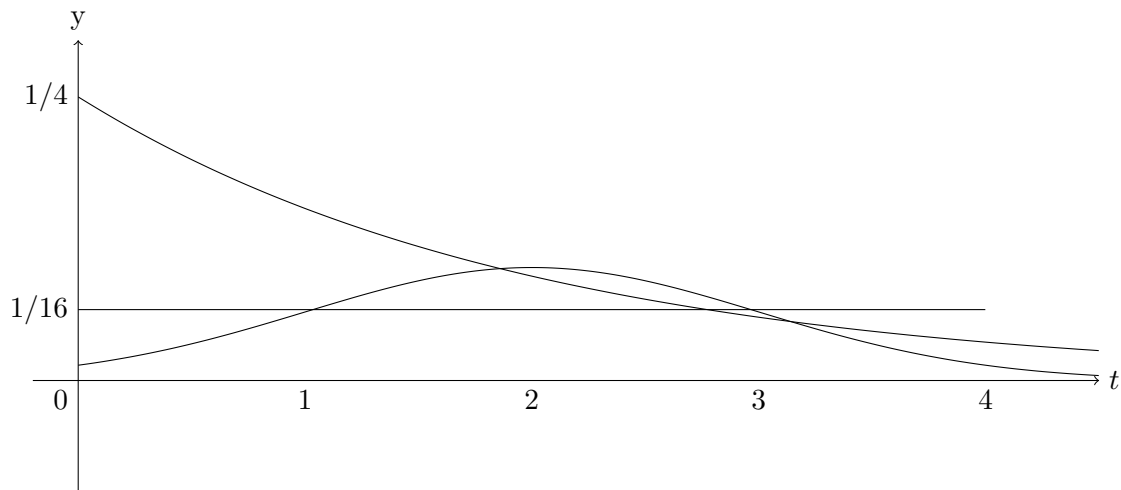


Figura 1: Grafico dei tre numeratori.

Nel punto precedente abbiamo già trovato che per  $t = 2$  la probabilità maggiore è per l'ipotesi  $H_2$ . Aiutandoci con un grafico qualitativo delle tre probabilità in funzione di  $t \in (0, \infty)$  (trascurando il fattore comune nel denominatore) notiamo che per  $t = 0$  si ha

$$\varrho(T = 0|H_0) \cdot P(H_0|\Omega) = \frac{1}{16},$$

$$\varrho(T = 0|H_0) \cdot P(H_0|\Omega) = \frac{1}{4},$$

$$\varrho(T = 0|H_2) \cdot P(H_2|\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2} \cdot \frac{1}{4},$$

di conseguenza l'ipotesi  $H_0$  è la più probabile. Infine, calcolando in  $t = 4$ , abbiamo

$$\varrho(T = 4|H_0) \cdot P(H_0|\Omega) = \frac{1}{16},$$

$$\varrho(T = 4|H_1) \cdot P(H_0|\Omega) = e^{-2}\frac{1}{4},$$

$$\varrho(T = 0|H_2) \cdot P(H_2|\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2} \cdot \frac{1}{4},$$

e quindi l'ipotesi più probabile in questo caso è  $H_1$ .

**Corso di Laurea in Informatica – Calcolo delle Probabilità e Statistica (269AA)**  
**A.A. 2017/18 - Seconda prova in itinere (A) 2018-01-23**

*La durata della prova è di tre ore. Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.*

**Problema 1**

Un'urna contiene  $2^n - 1$  palline bianche e una sola pallina nera (dove  $n \geq 1$  è un numero naturale fissato e noto). Per  $n$  volte consecutive si rimuovono dall'urna la metà delle palline, senza rimpiazzo (quindi la prima volta si tolgono  $2^{n-1}$  palline, la seconda, se  $n \geq 2$ ,  $2^{n-2}$  palline, ecc.), finché non rimane una sola pallina all'interno. Alla fine si estrae anche quella. Per ogni  $k \in \{1, \dots, n\}$ , poniamo  $X_k \in \{0, 1\}$  la variabile indicatrice dell'evento "dopo la  $k$ -esima iterazione la pallina nera è ancora nell'urna", ed  $N \in \{1, \dots, n, n+1\}$  il numero della iterazione in cui la pallina nera viene rimossa dall'urna ( $N = n+1$  se viene estratta per ultima).

1. Determinare la legge di ciascuna variabile  $X_k$ , calcolarne valore atteso e varianza, calcolare la covarianza  $\text{Cov}(X_k, X_h|\Omega)$  per ogni  $k, h \in \{1, \dots, n\}$ , rispetto all'informazione  $\Omega$  data sopra. Le variabili  $X_k$  sono indipendenti tra loro?
2. Scrivere  $N$  come funzione delle variabili  $X_k$  e calcolarne valore atteso (rispetto all'informazione  $\Omega$ ). (Sugg: può essere utile l'identità  $\sum_{k=0}^n x^k = (1 - x^{n+1})/(1 - x)$ .)
3. Sapendo che l'ultima pallina estratta è bianca, qual è la probabilità che la penultima pallina estratta fosse nera?

(Sugg: considerare prima i casi  $n = 1, 2, 3$ , e poi il caso generale).

**Una soluzione:**

1. Essendo variabili indicatrici, ciascuna  $X_k$  ha legge Bernoulli, il cui parametro è  $p_k = P(\text{dopo la } k\text{-esima iterazione la pallina nera è ancora nell'urna}|\Omega)$ .

Per calcolare la probabilità  $p_k$  basta notare che l'evento considerato equivale a trovare bianche tutte le palline in  $2^{n-k}$  estrazioni consecutive, senza rimpiazzo (non è rilevante il fatto di averle eseguite a "blocchi" come descritto nel testo). Abbiamo quindi

$$p_k = \frac{2^n - 1}{2^n} \cdot \frac{2^n - 2}{2^n - 1} \cdots \frac{2^{n-k}}{2^{n-1} + 1} = \frac{2^{n-k}}{2^n} = 2^{-k}.$$

Dai fatti generali per le variabili Bernoulli, troviamo che  $\mathbb{E}[X_k|\Omega] = 2^{-k}$ ,  $\text{Var}(X_k|\Omega) = p_k(1 - p_k) = 2^{-k}(1 - 2^{-k})$ . Per calcolare la covarianza tra  $X_h$  e  $X_k$ , supponiamo che sia  $h < k$  e notiamo che

$$P(X_h = 1|X_k = 1) = 1$$

perché se sappiamo che dopo l'estrazione  $k$  la pallina nera è ancora nell'urna, questa deve trovarsi nell'urna anche dopo l'estrazione  $h$  (che precede  $k$ ). Di conseguenza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_k X_h|\Omega] &= \mathbb{E}[X_h X_k|X_k = 0] P(X_k = 0|\Omega) + \mathbb{E}[X_h X_k|X_k = 1] P(X_k = 1|\Omega) \\ &= \mathbb{E}[X_h|X_k = 1] P(X_k = 1|\Omega) \\ &= P(X_h = 1|X_k = 1) P(X_k = 1|\Omega) = 1 \cdot 2^{-k} = 2^{-k} \end{aligned}$$



e

$$\text{Cov}(X_k, X_h|\Omega) = \mathbb{E}[X_k X_h|\Omega] - \mathbb{E}[X_k|\Omega] \mathbb{E}[X_h|\Omega] = 2^{-k}(1 - 2^{-h}).$$

Poiché la covarianza è strettamente positiva, le variabili non sono indipendenti tra loro (che non siano indipendenti si vede anche dal fatto che  $P(X_h = 1|X_k = 1) = 1 \neq P(X_h = 1|\Omega) = 2^{-h}$ ).

2. Vale l'identità  $N = 1 + X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Infatti,  $N = k$  se e solo se le variabili  $X_1 \dots X_{k-1}$  sono tutte uguali ad 1, mentre  $X_k, \dots, X_n$  devono essere uguali a 0. Grazie a questa identità, troviamo

$$\mathbb{E}[N|\Omega] = 1 + \mathbb{E}[X_1|\Omega] + \dots + \mathbb{E}[X_n|\Omega] = \sum_{k=0}^n 2^{-k} = 2 - 2^{-n}$$

usando il suggerimento.

3. È più semplice calcolare la probabilità che la penultima pallina sia bianca. In tal caso, sapendo che l'ultima pallina estratta è bianca, l'evento "la penultima estratta è bianca" equivale al fatto che la pallina nera sia stata estratta prima della penultima estrazione. Quindi la probabilità che la penultima sia bianca è

$$\begin{aligned} P(X_{n-1} = 0|X_n = 0) &= \frac{P(X_n = 0|X_{n-1} = 0)P(X_{n-1} = 0|\Omega)}{P(X_n = 0|\Omega)} \\ &= \frac{1 \cdot (1 - 2^{-(n-1)})}{1 - 2^{-n}} \end{aligned}$$

Di conseguenza la probabilità che la penultima sia nera è

$$1 - \frac{1 \cdot (1 - 2^{-(n-1)})}{1 - 2^{-n}} = \frac{1 - 2^{-n} - 1 + 2^{-n+1}}{1 - 2^{-n}} = \frac{2^{-n}}{1 - 2^{-n}}.$$

*Una soluzione alternativa:* Possiamo riscrivere la domanda anche in termini di  $N$  come  $P(N = n|N < n + 1)$  (infatti l'ultima pallina estratta è bianca se e solo se la nera è stata rimossa prima e quindi  $N < n + 1$ ). Troviamo allora

$$\begin{aligned} P(N = n|N < n + 1) &= P(N < n + 1|N = n) \frac{P(N = n|\Omega)}{P(N < n + 1|\Omega)} = \frac{P(N = n|\Omega)}{P(N < n + 1|\Omega)} \\ &= \frac{P(N = n|\Omega)}{1 - P(N = n + 1|\Omega)}. \end{aligned}$$

Notiamo infine che l'evento  $N = n + 1$  coincide con  $X_n = 1$  e quindi  $P(N = n + 1|\Omega) = 2^{-n}$ . Per calcolare  $P(N = n|\Omega)$ , notiamo che l'evento  $N \geq n$  coincide con  $X_{n-1} = 1$  e quindi  $P(N \geq n|\Omega) = 2^{-(n-1)}$ . Per differenza

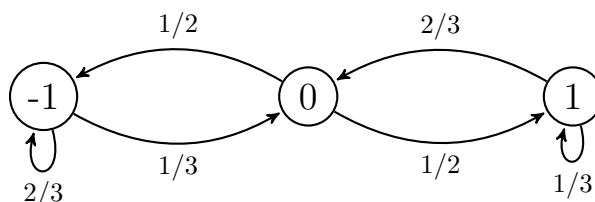
$$P(N = n|\Omega) = P(N \geq n|\Omega) - P(N = n + 1|\Omega) = 2^{-(n-1)} - 2^{-n} = 2^{-n}.$$

In conclusione,

$$P(N = n|N < n + 1) = \frac{2^{-n}}{1 - 2^{-n}}.$$

## Problema 2

Lo posizione di un robot è determinata dalla catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  graficamente rappresentata in figura. Si suppone inoltre che la catena sia stazionaria.



1. Scrivere la matrice di transizione  $Q$  della catena e calcolarne le distribuzioni invarianti.
2. Si ponga  $\Theta = \{-1, 0, 1\}$ ,  $\theta = X_0$  e  $L(\hat{\theta}, z) := \hat{\theta} \cdot z$  per  $(\hat{\theta}, z) \in \Theta^2$ . Quale decisione  $\hat{\theta} \in \Theta$  minimizza il rischio associato ad  $L$ , rispetto all'informazione iniziale? e supponendo di osservare  $X_2 = 0$ ?
3. Sia  $Z$  una variabile aleatoria gaussiana  $\mathcal{N}(0, 1)$  indipendente dalla catena di Markov (ossia da ogni variabile  $X_n$ , per ogni  $n \geq 0$ ) e sia  $Y = X_0 + Z$ . Calcolare il valore atteso e la varianza di  $Y$ <sup>1</sup>.
4. (Facoltativo) Le variabili  $X_2$  e  $Y$ <sup>2</sup> (del punto sopra) sono indipendenti?

### Una soluzione:

1. Ricaviamo  $Q$  dal disegno, ordinando gli stati secondo l'ordine naturale  $\{-1, 0, 1\}$ ,

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Per trovare le distribuzioni invarianti, scriviamo  $Q^\tau - I$  e riduciamo a gradini con operazioni di riga:

$$Q^\tau - I = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \\ 0 & 1/2 & -2/3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/3 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi troviamo come soluzione  $v = t(2, \frac{4}{3}, 1)$ . Imponendo che la somma sia 1, troviamo  $t = \frac{3}{13}$  e quindi l'unica distribuzione invariante è

$$\mu = \frac{1}{13} (6, 4, 3).$$

2. Calcoliamo

$$\text{Risk}_L(-1|\Omega) = \frac{1}{13} ((-1) \cdot (-1) \cdot 6 + (-1) \cdot 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \cdot 3) = \frac{3}{13}$$

<sup>1</sup>Nel compito erroneamente era scritto  $Z$ , ma è stato fatto notare e segnalato ai presenti

<sup>2</sup>come sopra

$$\text{Risk}_L(0|\Omega) = \frac{1}{13} (0 \cdot (-1) \cdot 6 + 0 \cdot 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \cdot 3) = 0$$

$$\text{Risk}_L(1|\Omega) = \frac{1}{13} (1 \cdot (-1) \cdot 6 + 1 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 3) = -\frac{3}{13}.$$

Di conseguenza la decisione che minimizza il rischio (rispetto alla informazione iniziale) è  $\hat{\theta} = 1$ .

Supponendo  $X_2 = 0$ , aggiorniamo le probabilità relative a  $X_0$  usando Bayes, per  $i \in \{-1, 0, 1\}$ ,

$$P(X_0 = i|X_2 = 0) = \frac{P(X_2 = 0|X_0 = i)P(X_0 = i|\Omega)}{P(X_2 = 0|\Omega)}$$

Notiamo che  $P(X_0 = i|\Omega)$  si ottiene dalla distribuzione invariante, come pure  $P(X_2 = 0|\Omega) = P(X_0 = 0|\Omega) = \frac{4}{13}$ , perché la catena è stazionaria. Per calcolare  $P(X_2 = 0|X_0 = i)$  usiamo la proprietà di Markov (contando i cammini pesati oppure calcolando  $Q^2$ ):

$$P(X_2 = 0|X_0 = -1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(X_2 = 0|X_0 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(X_2 = 0|X_0 = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Di conseguenza

$$P(X_0 = -1|X_2 = 0) = \frac{\frac{2}{9} \cdot \frac{6}{13}}{\frac{4}{13}} = \frac{1}{3},$$

$$P(X_0 = 0|X_2 = 0) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{13}}{\frac{4}{13}} = \frac{1}{2},$$

$$P(X_0 = 1|X_2 = 0) = \frac{\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{13}}{\frac{4}{13}} = \frac{1}{6}.$$

Per concludere, calcoliamo il rischio rispetto alla nuova informazione:

$$\text{Risk}_L(-1|X_2 = 0) = (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6},$$

$$\text{Risk}_L(0|X_2 = 0) = 0 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 0,$$

$$\text{Risk}_L(1|X_2 = 0) = 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Anche in questo caso quindi la decisione minimizzante è  $\hat{\theta} = 1$  (anche se il rischio è cambiato).

3. Calcoliamo prima il valore atteso e la varianza di  $X_0$  (rispetto ad  $\Omega$ )

$$\mathbb{E}[X_0|\Omega] = -1 \cdot \frac{6}{13} + 0 \cdot \frac{4}{13} + 1 \cdot \frac{3}{13} = -\frac{3}{13}.$$

$$\mathbb{E}[X_0^2|\Omega] = (-1)^2 \cdot \frac{6}{13} + 0^2 \cdot \frac{4}{13} + 1^2 \cdot \frac{3}{13} = \frac{9}{13},$$

$$\text{Var}(X_0|\Omega) = \frac{9}{13} - \left(\frac{3}{13}\right)^2 = \frac{9 \cdot 12}{13^2}.$$

Per calcolare valore atteso e varianza di  $Y = X_0 + Z$  basta sommare i rispettivi valori attesi (additività del valore atteso) e varianze (per indipendenza):

$$\mathbb{E}[Y|\Omega] = -\frac{3}{13} + 0 = -\frac{3}{13},$$

$$\text{Var}(Y|\Omega) = \frac{9 \cdot 12}{13^2} + 1.$$

4. Le variabili  $Y$  e  $X_2$  non sono indipendenti. Infatti, se lo fossero, si avrebbe ad esempio

$$\mathbb{E}[Y|X_2 = 0] = \mathbb{E}[Y|\Omega] = -\frac{3}{13}.$$

D'altra parte, possiamo calcolare il valore atteso di  $Y$  rispetto all'informazione  $X_2 = 0$  usando i calcoli del punto precedente: troviamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y|X_2 = 0] &= \mathbb{E}[X_0|X_2 = 0] + \mathbb{E}[Z|X_2 = 0] \\ &= \mathbb{E}[X_0|X_2 = 0] + \mathbb{E}[Y|\Omega] \quad \text{per indipendenza di } Z \text{ e } X_2 \\ &= \mathbb{E}[X_0|X_2 = 0] \quad \text{perché } Z \text{ è } \mathcal{N}(0, 1) \\ &= -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

### Problema 3

La durata  $T$  di un componente elettronico è rappresentata da una variabile aleatoria con legge esponenziale di parametro  $\lambda = 1$ . Dopo aver cambiato leggermente il processo di produzione, i nuovi modelli sembrano durare più a lungo, precisamente  $T$  sarebbe meglio rappresentata con una variabile esponenziale di parametro  $\lambda = 1/2$ . Definendo  $H_1 = \{\lambda = 1/2\}$ ,  $H_0 = \{\lambda = 1\}$ , si pone  $P(H_1|\Omega) = 1/10$ . Per confrontare le ipotesi, si prendono  $n \geq 1$  ( $n$  noto e fissato) componenti nuovi e si pongono  $T_1, \dots, T_n \in [0, \infty)$  le rispettive durate (supponiamo che le variabili  $T_k$  siano indipendenti sia sapendo  $H_0$  che sapendo  $H_1$ ).

1. Per ogni  $n \geq 1$ , calcolare valore atteso e varianza di  $X = \min\{T_1, \dots, T_n\}$  rispetto all'informazione iniziale  $\Omega$ . (*Sugg: usare che il minimo di variabili aleatorie esponenziali indipendenti è esponenziale, con parametro dato dalla somma dei parametri*)
2. Per ogni  $n \geq 1$ , supponendo di osservare che  $X > 2$ , calcolare le probabilità di  $H_0$  e  $H_1$ . Per quali  $n \geq 1$  è più probabile  $H_1$ ?
3. Per ogni  $n \geq 1$ , supponendo invece di osservare che  $X = 1$ , calcolare le probabilità di  $H_0$  e  $H_1$ . Per quali  $n \geq 1$  è più probabile  $H_1$ ?

(*Sugg: può essere utile sapere che  $2,7 < e < 3$* )

**Una soluzione:**

1. Usando il suggerimento, si ha che  $X$  è una variabile aleatoria con legge  $\mathcal{E}(n/2)$  se l'ipotesi  $H_1$  è vera, mentre è  $\mathcal{E}(n)$  se vale  $H_0$ . Pertanto troviamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|\Omega] &= \mathbb{E}[X|H_0]P(H_0|\Omega) + \mathbb{E}[X|H_1]P(H_1|\Omega) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{9}{10} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{10} = \frac{11}{10 \cdot n}.\end{aligned}$$

Similmente, usando il fatto che

$$\mathbb{E}[Y^2|Y \text{ è } \mathcal{E}(\lambda)] = \text{Var}(Y|Y \text{ è } \mathcal{E}(\lambda)) + (\mathbb{E}[Y|Y \text{ è } \mathcal{E}(\lambda)])^2 = \frac{2}{\lambda^2},$$

troviamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2|\Omega] &= \mathbb{E}[X^2|H_0]P(H_0|\Omega) + \mathbb{E}[X^2|H_1]P(H_1|\Omega) \\ &= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{2 \cdot 4}{n^2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{26}{10 \cdot n^2}.\end{aligned}$$

e infine

$$\text{Var} X|\Omega = \frac{26}{10 \cdot n^2} - \frac{11^2}{10^2 \cdot n^2} = \frac{10}{n^2} \cdot 24,9.$$

2. Usiamo la formula di Bayes (discreta), per  $i \in \{0, 1\}$ ,

$$P(H_i|X > 2) = \frac{P(X > 2|H_i)P(H_i|\Omega)}{P(X > 2|\Omega)}.$$

Ricordando che la funzione di sopravvivenza di una esponenziale di parametro  $\lambda$  vale  $e^{-\lambda t}$ , troviamo

$$P(X > 2|H_0) = e^{-\frac{n}{2} \cdot 2} = e^{-n}, \quad P(X > 2|H_1) = e^{-2n}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}P(H_0|X > 2) &= \frac{9 \cdot e^{-2n}}{e^{-n} + 9e^{-2n}} \\ P(H_1|X > 2) &= \frac{e^{-n}}{e^{-n} + 9e^{-2n}}.\end{aligned}$$

Per determinare quale probabilità è maggiore, basta confrontare i numeratori delle espressioni sopra.

$$P(H_1|X > 2) > P(H_0|X > 2) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-n} > 9 \cdot e^{-2n} \quad \Leftrightarrow \quad e^n > 9.$$

Poiché  $2 < e < 3$ , si trova che  $H_1$  è più probabile per  $n \geq 3$ .

3. Ragioniamo come sopra, con la formula di Bayes (caso continuo/discreto), per  $i \in \{0, 1\}$ ,

$$P(H_i|X = 1) = \frac{\varrho(X = 1|H_i)P(H_i|\Omega)}{\varrho(X = 1|\Omega)}.$$

Ricordando che la densità di una esponenziale di parametro  $\lambda$  vale  $\lambda e^{-\lambda t}$ , troviamo

$$\varrho(X = 1|H_0) = \frac{n}{2} e^{-\frac{n}{2} \cdot 1} = \frac{n}{2} e^{-n}, \quad \varrho(X = 1|H_1) = n e^{-n}.$$

Di conseguenza troviamo

$$P(H_0|X = 1) = \frac{9 \cdot e^{-n}}{\frac{1}{2}e^{-n/2} + 9e^{-n}}$$

$$P(H_1|X = 1) = \frac{\frac{1}{2}e^{-n/2}}{\frac{1}{2}e^{-n/2} + 9e^{-n}}$$

e quindi

$$P(H_1|X = 1) > P(H_0|X = 1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}e^{-n/2} > 9 \cdot e^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad e^{n/2} > 18.$$

Usando il suggerimento, ossia  $2,7 < e < 3$ , si trova che  $e^2 < 9$  e  $e^3 > 18$ , quindi deve essere  $n/2 \geq 3$ , ossia  $H_1$  è più probabile se  $n \geq 6$ .

**Corso di Laurea in Informatica – Calcolo delle Probabilità e Statistica (269AA)**  
**A.A. 2017/18 - Seconda prova in itinere (A) 2018-02-13**

*La durata della prova è di tre ore. Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.*

**Problema 1**

Nel suo saggio filosofico sulla probabilità, Laplace studia alcuni problemi relativi all'attendibilità delle testimonianze. Si consideri il seguente. Ci sono due urne (indistinguibili dall'esterno), una contenente  $10^6$  palline bianche e l'altra  $10^6$  palline nere. Si effettua il seguente esperimento: presa un'urna a caso tra le due, si estrae una pallina che si inserisce nell'altra urna, dalla quale poi si estrae una pallina, dopo aver agitato bene. Un testimone osserva la prima pallina estratta, mentre un secondo testimone la seconda (senza aver visto la prima). Supponiamo che *a priori*, ossia rispetto alla nostra informazione prima di ricevere alcuna testimonianza, ciascun testimone ci dica la verità con probabilità  $9/10$ , e menta con probabilità  $1/10$ , indipendentemente tra loro e indipendentemente dall'esito (pallina bianca o nera) delle estrazioni.

1. Calcolare la probabilità degli eventi  $B_1 =$  “la prima pallina estratta è bianca”,  $B_2 =$  “la seconda pallina estratta è bianca” e  $B_1 \cap B_2$ , rispetto all'informazione sopra (ossia senza ricevere alcuna informazione dai testimoni).
2. Supponendo che il primo testimone ci dica di aver osservato una pallina bianca, calcolare la probabilità di  $B_1$ .
3. Supponendo che il secondo testimone ci dica di aver osservato una pallina bianca, calcolare la probabilità di  $B_2$ .
4. Supponendo che entrambi i testimoni ci dicano di aver osservato una pallina bianca, calcolare la probabilità dell'evento  $B_1 \cap B_2$ .

**Una soluzione:**

1. Poiché le due urne sono indistinguibili, abbiamo semplicemente che

$$P(B_1|\Omega) = \frac{1}{2}.$$

Per calcolare la probabilità di  $B_2$ , ragioniamo condizionando prima rispetto a  $B_1$  e a  $B_1^c$ . Abbiamo infatti

$$P(B_2|B_1) = \frac{1}{1 + 10^6}$$

avendo trasferito una bianca dalla prima urna nella seconda, che quindi contiene  $10^6$  palline nere, e

$$P(B_2|B_1^c) = \frac{10^6}{1 + 10^6},$$

avendo trasferito una nera dalla prima urna nella seconda, che contiene  $10^6$  palline bianche. In conclusione,

$$P(B_1 \cap B_2|\Omega) = P(B_2|B_1)P(B_1|\Omega) = \frac{1}{1 + 10^6} \cdot \frac{1}{2}$$

e

$$\begin{aligned}P(B_2|\Omega) &= P(B_2|B_1)P(B_1|\Omega) + P(B_2|B_1^c)P(B_1^c|\Omega) \\&= \frac{1}{1+10^6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10^6}{1+10^6} \cdot \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Poniamo  $TB_1 :=$  “il primo testimone dice che la pallina estratta è bianca”. Dobbiamo calcolare  $P(B_1|TB_1)$ . Abbiamo intanto

$$P(TB_1|B_1) = P(\text{il testimone non mente}|B_1) = \frac{9}{10},$$

(per ipotesi, il testimone decide di mentire o dire il vero indipendentemente dall'esito della estrazione). Invece

$$P(TB_1|B_1^c) = P(\text{il testimone mente}|B_1) = \frac{1}{10}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}P(TB_1|\Omega) &= P(TB_1|B_1)P(B_1|\Omega) + P(TB_1|B_1^c)P(B_1^c|\Omega) \\&= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Usando la formula di Bayes, troviamo che

$$P(B_1|TB_1) = \frac{P(TB_1|B_1)P(B_1|\Omega)}{P(TB_1|\Omega)} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{9}{10}.$$

3. Si tratta di ripetere i calcoli del punto sopra, ponendo

$TB_2 :=$  “il secondo testimone dice che la pallina estratta è bianca”

e con  $B_2$  invece di  $B_1$ . Si trova che  $P(B_2|TB_2) = \frac{9}{10}$ .

4. Con gli eventi introdotti sopra, sfruttando le ipotesi di indipendenza tra i testimoni e gli esiti delle estrazioni, troviamo che

$$P(TB_1 \cap TB_2|B_1 \cap B_2) = P(\text{entrambi i testimoni non mentono}|B_1 \cap B_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10},$$

$$P(TB_1 \cap TB_2|B_1^c \cap B_2) = P(\text{il primo mente, il secondo dice il vero}|B_1 \cap B_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10},$$

$$P(TB_1 \cap TB_2|B_1 \cap B_2^c) = P(\text{il primo dice il vero, il secondo mente}|B_1 \cap B_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10},$$

$$P(TB_1 \cap TB_2|B_1^c \cap B_2^c) = P(\text{entrambi mentono}|B_1 \cap B_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}.$$

Riprendendo i calcoli del punto 1, troviamo anche che

$$P(B_1 \cap B_2|\Omega) = \frac{1}{1+10^6} \cdot \frac{1}{2}$$



$$P(B_1^c \cap B_2 | \Omega) = \frac{10^6}{1 + 10^6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(B_1 \cap B_2^c | \Omega) = \frac{10^6}{1 + 10^6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P(B_1^c \cap B_2^c | \Omega) = \frac{1}{1 + 10^6} \cdot \frac{1}{2}$$

Mettendo tutto insieme, troviamo che

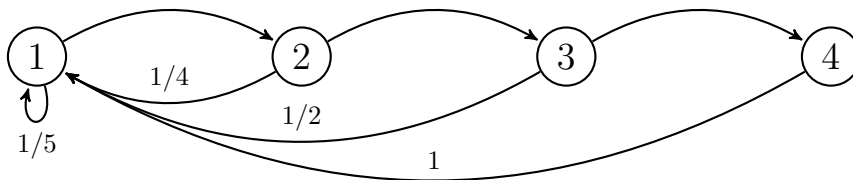
$$\begin{aligned} P(TB_1 \cap TB_2 | \Omega) &= P(TB_1 \cap TB_2 | B_1 \cap B_2) P(B_1 \cap B_2 | \Omega) \\ &\quad + P(TB_1 \cap TB_2 | B_1^c \cap B_2) P(B_1^c \cap B_2 | \Omega) \\ &\quad + P(TB_1 \cap TB_2^c | B_1 \cap B_2) P(B_1 \cap B_2^c | \Omega) \\ &\quad + P(TB_1^c \cap TB_2^c | B_1 \cap B_2) P(B_1 \cap B_2^c | \Omega) \\ &= \frac{1}{1 + 10^6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^2} (9^2 + 2 \cdot 9 \cdot 10^6 + 1) \end{aligned}$$

(notiamo in particolare che gli eventi  $TB_1$  e  $TB_2$  non sono indipendenti, rispetto ad  $\Omega$ ) e usando la formula di Bayes concludiamo che

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2 | TB_1 \cap TB_2) &= \frac{P(TB_1 \cap TB_2 | B_1 \cap B_2) P(B_1 \cap B_2 | \Omega)}{P(TB_1 \cap TB_2 | \Omega)} \\ &= \frac{81}{82 + 18 \cdot 10^6} \approx 10^{-5}. \end{aligned}$$

## Problema 2

Si consideri la catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 1}$  rappresentata graficamente in figura.



1. Completare le probabilità mancanti, scrivere la matrice di transizione  $Q$  e calcolarne tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare le leggi marginali di  $X_1$  e di  $X_2$ , sapendo  $X_0 = 2$ .
3. Nel caso in cui la catena sia stazionaria, calcolare la probabilità che la catena si trovi al tempo 1 nello stato 1, sapendo  $\{X_2 = 3 \text{ oppure } X_3 = 3\}$ . E se invece sappiamo che  $\{X_3 = 3\}$ ?

**Una soluzione:**

1. La matrice  $Q$ , ordinando gli stati nel modo naturale, è

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo le distribuzioni invarianti, trovando prima gli autovettori (riga) di  $Q$  di autovalore 1,

$$\begin{aligned} Q^T - I &= \begin{pmatrix} -4/5 & 1/4 & 1/2 & 1 \\ 4/5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -4/5 & 1/4 & 1/2 & 1 \\ 0 & -3/4 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} -4/5 & 1/4 & 1/2 & 1 \\ 0 & -3/4 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -4/5 & 1/4 & 1/2 & 1 \\ 0 & -3/4 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} -4/5 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & -3/4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui concludiamo che gli autovettori sono del tipo  $t(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, 2, 1)$ . Imponendo che la somma sia 1, troviamo  $t = 1/9$ , quindi l'unica distribuzione invariante è

$$\left(\frac{10}{27}, \frac{8}{27}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

2. Basta calcolare i vettori riga  $\mu_1 = \mu_0 Q$  e  $\mu_2 = \mu_0 Q^2 = \mu_1 Q$ , dove  $\mu_0 = (0, 1, 0, 0)$ . Si trova

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}, 0\right) \\ \mu_2 &= \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, 0, \frac{3}{8}\right) = \left(\frac{17}{40}, \frac{8}{40}, 0, \frac{15}{40}\right). \end{aligned}$$

3. Posto  $\{X_2 = 3 \text{ oppure } X_3 = 3\}$ , per Bayes otteniamo

$$P(X_1 = 1 | \text{staz. e } A) = \frac{P(A | X_1 = 1)P(X_1 = 1 | \text{staz.})}{P(A | \text{staz.})}$$

Osserviamo che gli eventi  $X_2 = 3$  e  $X_3 = 3$  sono incompatibili, perché se vale  $X_2 = 3$  necessariamente al tempo successivo sarà  $X_3 \in \{1, 4\}$ , mentre se vale  $X_3 = 3$  deve necessariamente essere  $X_2 = 2$ . Più precisamente notiamo che

$$P(X_2 = 3 \text{ e } X_3 = 3 | \Omega) = P(X_3 = 3 | X_2 = 3)P(X_2 = 3 | \Omega) = 0 \cdot P(X_2 = 3 | \Omega) = 0$$

e lo stesso usando l'informazione  $X_1 = 1$ . Perciò troviamo

$$P(A | \text{staz.}) = P(X_2 = 3 | \text{staz.}) + P(X_3 = 3 | \text{staz.}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9},$$

e similmente

$$P(A|X_1 = 1) = P(X_2 = 3|X_1 = 1) + P(X_3 = 3|X_1 = 1) = \frac{3}{5}.$$

Di conseguenza

$$P(X_1 = 1|\text{staz. e } A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{27} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{2}.$$

Se invece sappiamo che  $X_3 = 3$ , allora Bayes stavolta diventa

$$P(X_1 = 1|\text{staz. e } X_3 = 3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{27} \cdot \frac{9}{2} = 1.$$

In effetti, se osserviamo  $X_3 = 3$  allora necessariamente deve essere  $X_1 = 1$ .

### Problema 3

Sia  $T \in [0, 1]$  una variabile aleatoria con legge uniforme ed  $N \in \{0, 1, 2\}$  una variabile aleatoria con legge  $\text{Bin}(2, \frac{1}{2})$ , indipendente da  $T$ , e si ponga  $X = T + N$ .

1. Calcolare  $\mathbb{E}[X|\Omega]$ ,  $\text{Var}(X|\Omega)$ , la densità e la funzione di ripartizione di  $X$  (rispetto all'informazione iniziale  $\Omega$ ). Le variabili  $X$  e  $T$  sono indipendenti?
2. Per ogni  $x \in (1, 2)$ , supponendo di osservare  $\{X \leq x\}$  come cambia la legge di  $N$ ?
3. Per ogni  $x \in (1, 2)$ , posto  $\Theta = \mathbb{R}$ ,  $\theta = N$  e  $L(z, \hat{\theta}) = (z - \hat{\theta})^2$ , si calcoli la decisione  $\hat{\theta} \in \mathbb{R}$  che minimizza il rischio bayesiano associato supponendo di osservare  $\{X \leq x\}$ , ossia  $\text{Risk}_L(\hat{\theta}|X \leq x)$ . (*Sugg: ricordare dalla teoria quale decisione minimizza il rischio nel caso di costo quadratico*)

### Una soluzione:

1. Si ha

$$\mathbb{E}[X|\Omega] = \mathbb{E}[T + N|\Omega] = \mathbb{E}[T|\Omega] + \mathbb{E}[N|\Omega] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\text{Var}(X|\Omega) = \text{Var}(T + N|\Omega) = \text{Var}(T|\Omega) + \text{Var}(N|\Omega) = \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12},$$

avendo usato l'indipendenza tra  $N$  e  $T$ . Per la densità, sfruttiamo la formula di Bayes, caso continuo/discreto, per cui, dato  $x \in [0, 3]$ ,

$$\begin{aligned} \varrho(X = x|\Omega) &= \varrho(X = x|N = 0)P(N = 0|\Omega) \\ &\quad + \varrho(X = x|N = 1)P(N = 1|\Omega) \\ &\quad + \varrho(X = x|N = 2)P(N = 2|\Omega) \\ &= \varrho(T = x|\Omega)\frac{1}{4} \\ &\quad + \varrho(T = x - 1|\Omega)\frac{1}{2} \\ &\quad + \varrho(T = x - 2|\Omega)\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ricordando che la densità uniforme vale 1 nell'intervallo  $[0, 1]$  e fuori si pone a zero, otteniamo che la densità (per  $x \in [0, 3]$ ) vale ( Figura 1)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } x \in [0, 1] \cup [2, 3], \\ \frac{1}{2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(fuori da  $[0, 3]$  si può porre uguale a zero, inoltre nei punti  $x = 1$  e  $x = 2$  si può anche porre uguale a  $1/2$  o anche  $3/4$ , non cambia alcunché).

Per calcolare la funzione di ripartizione, posto  $x \in [0, 3]$ , troviamo che

$$\begin{aligned} P(X \leq x|\Omega) &= P(X \leq x|N = 0)P(N = 0|\Omega) \\ &\quad + P(X \leq x|N = 1)P(N = 1|\Omega) \\ &\quad + P(X \leq x|N = 2)P(N = 2|\Omega) \\ &= P(T \leq x|\Omega)\frac{1}{4} \\ &\quad + P(T \leq x - 1|\Omega)\frac{1}{2} \\ &\quad + P(T \leq x - 2|\Omega)\frac{1}{4} \end{aligned}$$

da cui troviamo (Figura 2)

$$P(X \leq x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & \text{per } x \in [0, 1], \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x - 1) & \text{per } x \in (1, 2], \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(x - 2) & \text{per } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

2. Posto  $x \in (1, 2)$ , usiamo la formula di Bayes (caso discreto), per  $k \in \{0, 1, 2\}$ ,

$$P(N = k|X \leq x) = \frac{P(X \leq x|N = k)P(N = k|\Omega)}{P(X \leq x|\Omega)}.$$

Ricordiamo dal punto precedente che  $P(X \leq x|\Omega) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x - 1)$  perché  $x \in (1, 2)$ . Per  $k = 0$ , calcoliamo

$$P(X \leq x|N = 0) = P(T \leq x|N = 0) = 1,$$

perché  $x \in (1, 2)$  e quindi

$$P(N = 0|X \leq x) = \frac{1}{2x - 1}.$$

Conviene ora calcolare per  $k = 2$ ,

$$P(X \leq x|N = 2) = P(T + 2 \leq x|N = 2) = P(T \leq x - 2|N = 2) = 0,$$

perché  $x - 2 < 0$ . Quindi troviamo

$$P(N = 2|X \leq x) = 0.$$

Di conseguenza

$$P(N = 1|X \leq x) = 1 - \frac{1}{2x - 1} = \frac{2x - 2}{2x - 1}.$$

Osserviamo che se  $x \rightarrow 1$  abbiamo  $P(N = 1|X \leq x) \rightarrow 0$ .

3. Basta ricordare dalla teoria che la decisione che minimizza il rischio nel caso quadratico è il valore atteso. Dobbiamo quindi calcolare

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \mathbb{E}[N|X \leq x] = 0 \cdot P(N = 0|X \leq x) + 1 \cdot P(N = 1|X \leq x) + 2 \cdot P(N = 2|X \leq x) \\ &= \frac{2x - 2}{2x - 1}.\end{aligned}$$

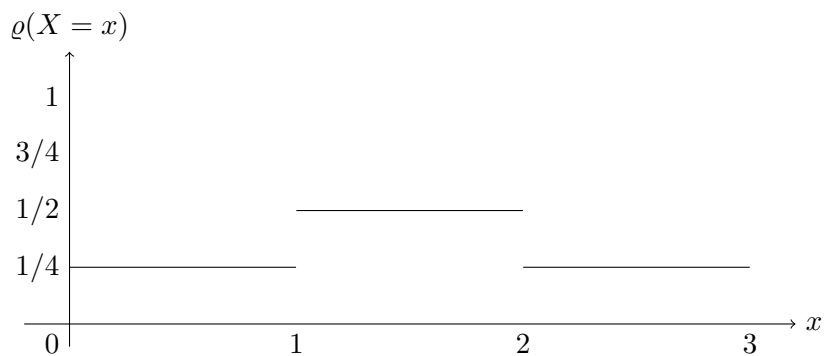


Figura 1: Densità di  $X$ .

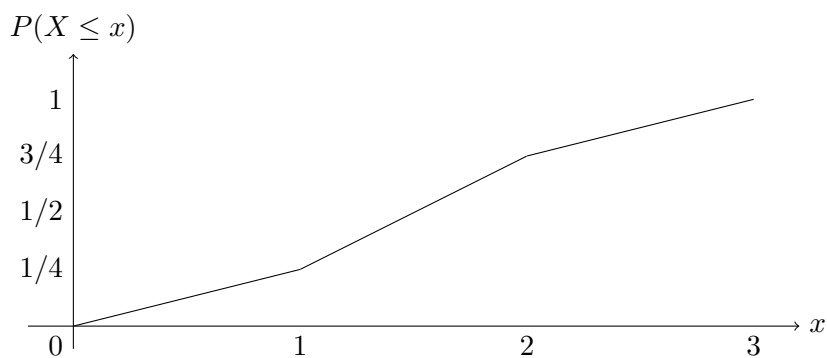


Figura 2: Funzione di ripartizione di  $X$ .

Corso di Laurea in Informatica – Calcolo delle Probabilità e Statistica (269AA)  
A.A. 2017/18 - Secondo appello straordinario (A) 2018-04-09

La durata della prova è di due ore e mezza. Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

**Problema 1**

Un'urna contiene 10 palline, di cui 5 bianche e le rimanenti nere. Una persona effettua il seguente esperimento: estrae una pallina dall'urna, la guarda e, se risulta bianca, la rimette nell'urna e inoltre aggiunge altre 5 palline bianche; se invece risulta nera, la rimette nell'urna e inoltre aggiunge altre 5 palline nere. Dopo aver agitato bene, estrae una seconda pallina. Si pone  $B_1 =$  "la prima pallina estratta è bianca",  $B_2 :=$  "la seconda pallina estratta è bianca".

1. Calcolare  $P(B_1|\Omega)$  e  $P(B_2|B_1)$ .
2. Calcolare  $P(B_2|\Omega)$ . Gli eventi  $B_1$  e  $B_2$  sono indipendenti?
3. Sapendo che la seconda pallina estratta è bianca, è più probabile che la prima estratta sia bianca oppure nera? (Calcolare tali probabilità.)

**Una soluzione:**

1. Il problema si risolve in modo semplice considerando l'albero in figura 1. Siccome l'urna contiene 5 nere e 5 bianche, si ha

$$P(B_1|\Omega) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Sapendo che la prima estratta è bianca, l'urna contiene alla seconda estrazione 10 palline bianche e 5 nere, quindi

$$P(B_2|B_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

2. Per calcolare  $P(B_2|\Omega)$  sommiamo sulle alternative  $B_1$  e  $N_1$

$$\begin{aligned} P(B_2|\Omega) &= P(B_2|B_1)P(B_1|\Omega) + P(B_2|N_1)P(N_1|\Omega) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Gli eventi  $B_1$  e  $B_2$  non sono indipendenti, ad esempio perché abbiamo visto che

$$\frac{2}{3} = P(B_2|B_1) \neq P(B_2|\Omega) = \frac{1}{2}.$$

3. Calcoliamo usando la formula di Bayes

$$\begin{aligned} P(B_1|B_2) &= \frac{P(B_2|B_1)P(B_1|\Omega)}{P(B_2|\Omega)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Siccome  $P(N_1|B_2) = 1 - P(B_1|B_2) = \frac{1}{3}$ , troviamo che è più probabile che la prima estratta sia bianca (come è intuitivo).

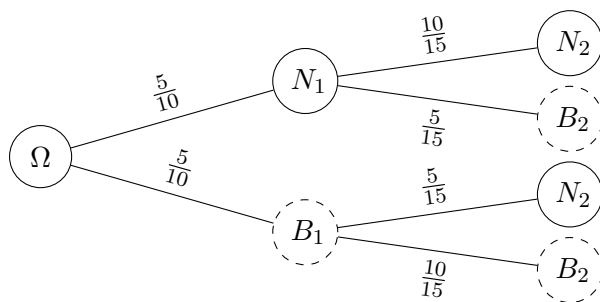


Figura 1: Albero relativo al problema.

**Problema 2**

Si consideri la catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 1}$  rappresentata graficamente in figura.



1. Completare le probabilità mancanti, scrivere la matrice di transizione  $Q$  e calcolarne tutte le distribuzioni invarianti (mostrare in particolare che sono infinite e scriverne esplicitamente tre diverse).
2. Calcolare le leggi marginali di  $X_1$  e di  $X_2$ , sapendo che  $X_0 = 2$ .
3. Calcolare la probabilità che  $X_{14} \notin \{1, 4\}$ , sapendo che  $X_0 = 2$ .

**Una soluzione:**

1. Scriviamo  $Q$  completando in modo che la somma delle riga sia 1

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovettori riga di autovalore 1 riducendo a gradini  $Q^T - \text{Id}$ .

$$Q^T - \text{Id} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui troviamo che tutti gli autovettori sono della forma  $(s, 0, 0, t)$ , per  $s, t \in \mathbb{R}$ . Imponendo che la somma sia 1, si trova che  $s + t = 1$ , ma questo non determina un singolo autovettore. Infatti concludiamo che qualunque vettore

$$\mu(t) = (t, 0, 0, 1 - t)$$

al variare di  $t \in [0, 1]$  è una distribuzione invariante. Ad esempio, lo sono le seguenti tre:

$$(1, 0, 0, 0), \quad (0, 0, 0, 1), \quad \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right).$$

2. Calcoliamo il prodotto  $(0, 1, 0, 0) \cdot Q = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$  da cui si ottiene la legge marginale di  $X_1$ . Calcoliamo poi  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0) \cdot Q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6})$ , da cui si ottiene la legge marginale di  $X_2$ .

3. Sapendo che  $X_0 = 2$ , affinché  $X_{14} \notin \{1, 4\}$ , la catena deve aver seguito il percorso  $X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 3, \dots, X_{13} = 3, X_{14} = 2$ , la cui probabilità è calcolabile moltiplicando le probabilità di transizione:

$$P(X_{14} \notin \{1, 4\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^7 = \frac{1}{3^7}.$$

### Problema 3

Sia  $\Theta \in [0, 2\pi]$  una variabile aleatoria con legge uniforme (continua) e si ponga  $X = \cos(\Theta)$ ,  $Y = \sin(\Theta)$ .

1. Calcolare il valore atteso e la varianza di  $X$  e di  $Y$ .
2. Calcolare il valore atteso di  $XY$ .
3. Calcolare la probabilità che sia  $X \geq 0$ , sapendo che  $Y \geq 0$ .

#### Una soluzione:

Calcoliamo

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\cos(\Theta)] = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sin(\theta) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Similmente troviamo  $\mathbb{E}[Y] = 0$ . Per la varianza (che in questo caso coincide con il valore atteso del quadrato) possiamo procedere in due modi. Nel primo modo calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} (\theta + \cos(\theta) \sin(\theta))$$

mediante integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int \cos^2(\theta) d\theta &= \int \cos(\theta) (\sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta) \sin(\theta) + \int \sin^2(\theta) d\theta \\ &= \cos(\theta) \sin(\theta) + \int (1 - \cos^2(\theta)) d\theta \\ &= \theta + \cos(\theta) \sin(\theta) - \int \cos^2(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Da qui troviamo che

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} (\theta + \cos(\theta) \sin(\theta)) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$



Ragionando in modo simile si trova che  $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{2}$ . Il secondo modo consiste invece nel notare prima che

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \mathbb{E}[X^2] = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \mathbb{E}[Y^2],$$

perché il grafico di  $\sin(\theta)$  e di  $\cos(\theta)$  (e quindi dei loro quadrati) sono periodici di periodo  $2\pi$  e l'uno il traslato dell'altro. D'altronde  $X^2 + Y^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ , e quindi

$$1 = \mathbb{E}[X^2 + Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] = 2\mathbb{E}[X^2].$$

da cui di nuovo si trova  $\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{2}$ .

2. Per calcolare il valore atteso di  $XY$ , troviamo prima l'integrale indefinito

$$\int \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \int \sin(\theta) d(\sin(\theta)) = \sin^2(\theta) + c,$$

da cui

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sin^2(\theta) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

quindi le variabili  $X$  e  $Y$  non sono correlate.

3. Dobbiamo calcolare

$$P(X \geq 0 | Y \geq 0) = \frac{P(X \geq 0 \text{ e } Y \geq 0 | \Omega)}{P(Y \geq 0 | \Omega)}.$$

Ricordano che  $X = \cos(\Theta)$ ,  $Y = \sin(\Theta)$ , troviamo che

$$\{X \geq 0 \text{ e } Y \geq 0\} = \left\{ \Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

mentre

$$\{Y \geq 0\} = \{\Theta \in [0, \pi]\}.$$

Di conseguenza troviamo

$$P(X \geq 0 \text{ e } Y \geq 0 | \Omega) = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4}.$$

$$P(Y \geq 0) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$P(X \geq 0 | Y \geq 0) = \frac{1}{2}.$$

**Corso di Laurea in Informatica – Calcolo delle Probabilità e Statistica (269AA)**  
**A.A. 2017/18 - Prova scritta 2018-06-12**

*La durata della prova è di tre ore. Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.*

**Problema 1**

Un'urna contiene  $n$  palline ( $n \geq 1$  parametro noto e fissato) di cui una nera e le rimanenti bianche. Una persona estrae da essa  $K$  palline senza rimpiazzo, e poi ci comunica se tra queste ha trovato la pallina nera. Poniamo  $E$  l'evento "la pallina nera è stata estratta". Non sapendo quante palline  $K$  ha estratto, supponiamo che  $K \in \{0, 1, \dots, n\}$  sia una variabile aleatoria uniforme, rispetto all'informazione  $\Omega$  (prima di conoscere  $E$  o  $E^c$ ).

1. Per ogni  $k \in \{1, \dots, n\}$ , scrivere  $P(E|K = k)$  e  $P(E^c|K = k)$  in funzione di  $k$  ed  $n$ .
2. Calcolare  $P(E|\Omega)$  e  $P(E^c|\Omega)$ .
3. Supponendo che l'evento  $E$  si realizzi, dire come cambia la legge di  $K$  e confrontarne il valore atteso con quello rispetto all'informazione iniziale (quale è maggiore?).

(Sugg: possono essere utili le identità  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  e  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .)

**Una soluzione:**

1. Calcoliamo  $P(E^c|K = k)$ . Si tratta di  $k$  estrazioni senza rimpiazzo in cui viene sempre estratta una pallina bianca. Troviamo allora

$$P(E^c|K = k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-k}{n-k+1} = \frac{n-k}{n}.$$

Troviamo poi  $P(E|K = k) = 1 - P(E^c|K = k) = \frac{k}{n}$ . (Alternativamente si può usare la legge ipergeometrica).

2. Per calcolare  $P(E|\Omega)$  decomponiamo secondo le alternative  $\{K = k\}$  e sommiamo:

$$P(E|\Omega) = \sum_{k=1}^n P(E|K = k)P(K = k|\Omega) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}$$

avendo usato il primo suggerimento. Troviamo poi  $P(E^c|\Omega) = 1 - P(E|\Omega) = \frac{1}{2}$ .

3. Calcoliamo, per ogni  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , usando la formula di Bayes

$$P(K = k|E) = P(E|K = k)P(K = k|\Omega)/P(E|\Omega) = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot 2 = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

Per calcolare il valore atteso  $\mathbb{E}[K|\Omega]$  usiamo il primo suggerimento

$$\mathbb{E}[K|\Omega] = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n}{2},$$

mentre usiamo il secondo per calcolare

$$\mathbb{E}[K|E] = \sum_{k=0}^n k \frac{2k}{n(n+1)} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}.$$

Troviamo che, per ogni  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{E}[K|E] > \mathbb{E}[K|\Omega]$ .

## Problema 2

Si sa che un generatore casuale di bit segue una catena di Markov omogenea e stazionaria sull'insieme degli stati  $\{0, 1\}$ . Tuttavia non è noto se la matrice di transizione è

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Si pone  $Q \in \{Q_1, Q_2\}$  la variabile aleatoria che indica la vera matrice di transizione della catena e si suppone  $P(Q = Q_1|\Omega) = P(Q = Q_2|\Omega) = \frac{1}{2}$ .

1. Determinare tutte le distribuzioni invarianti di  $Q_1$  e di  $Q_2$ .
2. Calcolare la probabilità di osservare la stringa 11011 (rispetto all'informazione  $\Omega$ ). Come cambia la legge di  $Q$  dopo tale osservazione?
3. Trovare una stringa di 6 bit tale che, dopo averla osservata, è più probabile che sia  $Q = Q_1$ . Trovarne una invece in modo che sia più probabile  $Q = Q_2$ . (*Facoltativo: trovare le stringhe che massimizzano tali probabilità.*)

### Una soluzione:

1. Procedendo al solito modo si trova che in entrambi i casi l'unica distribuzione invariante è  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

2. Posto  $E =$  "osserviamo la stringa 11011", troviamo che

$$P(E|Q = Q_1) = \frac{1}{2^5}, \quad P(E|Q = Q_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3^4}.$$

Quindi

$$P(E|\Omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3^4} = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^4}.$$

Per la formula di Bayes

$$P(Q = Q_1|E) = \frac{P(E|Q = Q_1)P(Q = Q_1|\Omega)}{P(E|\Omega)} = \frac{\frac{1}{2^6}}{\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^4}} > \frac{1}{2},$$

e  $P(Q = Q_2|E) = 1 - P(Q = Q_1|E)$ .

3. Mentre la catena con matrice  $Q_1$  è "indifferente" al fatto che il bit cambi oppure rimanga lo stesso, la catena con matrice  $Q_2$  "penalizza" il fatto che il bit rimanga invariato. Data questa premessa intuitiva, mostriamo che le stringhe di 6 bit per cui dopo averle osservate è più probabile che sia  $Q = Q_1$  sono 000000 e 111111, mentre quelle per cui è più probabile che sia  $Q = Q_2$  sono 010101 e 101010. Osserviamo infatti che, fissata  $s$  una qualunque stringa di 6 bit, si ha per l'evento  $E =$  "si osserva la stringa  $s$ ",

$$P(E|Q_1) = \frac{1}{2^6} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^5} \leq P(E|Q_2) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2^5}{3^5},$$

dove una delle disuguaglianze sopra diventa uguaglianza nei casi presentati sopra. Per la formula di Bayes

$$P(Q = Q_1|E) = \frac{P(E|Q = Q_1)P(Q = Q_1|\Omega)}{P(E|\Omega)} = \frac{\frac{1}{2^6}}{\frac{1}{2^6} + \frac{1}{2} \cdot P(E|Q_2)}$$

Perciò, nel caso  $s = 000000$  (e nel caso  $s = 111111$ ), troviamo che

$$P(Q = Q_1|E) = \frac{\frac{1}{2^7}}{\frac{1}{2^7} + \frac{2^3}{3^5}}$$

è massima, in particolare, maggiore di  $1/2$ , mentre nel caso  $s = 010101$

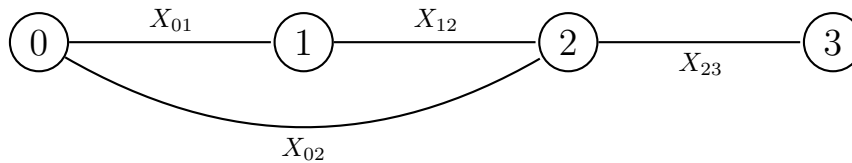
$$P(Q = Q_1|E) = \frac{\frac{1}{2^7}}{\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^5}}$$

(o  $s = 101010$ ) è minima e minore di  $1/2$ .

### Problema 3

Due posizioni (0 e 3) sono collegate da un sistema di percorsi rappresentato nel grafo in figura. I tempi di percorrenza dei singoli archi sono variabili aleatorie gaussiane indipendenti (rispetto ad una informazione  $\Omega$ ). Precisamente si ha che

$$X_{01} \text{ è } \mathcal{N}(3, 1), \quad X_{02} \text{ è } \mathcal{N}(5, 3), \quad X_{12} \text{ è } \mathcal{N}(3, 1) \quad \text{e} \quad X_{23} \text{ è } \mathcal{N}(2, 1).$$



Poniamo  $T = X_{01} + X_{12} + X_{23}$  ed  $S = X_{02} + X_{23}$ .

1. Determinare la legge di  $T$ , il valore atteso e la varianza. Lo stesso per  $S$ .
2. Le variabili  $T$  ed  $S$  sono indipendenti?
3. Quale tra i tre eventi è più probabile:  $\{T > S\}$ ,  $\{T = S\}$  o  $\{T < S\}$ ?

### Una soluzione:

1. La legge di  $T$ , essendo somma di variabili gaussiane indipendenti, è gaussiana, con i parametri (media e varianza) dati dalla somma dei rispettivi parametri. Quindi  $T$  è  $\mathcal{N}(8, 3)$ . Allo stesso modo si trova che  $S$  è  $\mathcal{N}(7, 4)$ .

2. No, non sono indipendenti (rispetto ad  $\Omega$ ). Se lo fossero si avrebbe  $\mathbb{E}[ST] = \mathbb{E}[S]\mathbb{E}[T] = 8 \cdot 7$ , ma si calcola (usando l'indipendenza delle  $X$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_{01} + X_{12} + X_{23})(X_{02} + X_{23})] &= \\ &= \mathbb{E}[(X_{01} + X_{12})(X_{02} + X_{23})] + \mathbb{E}[X_{23}X_{02}] + \mathbb{E}[X_{23}^2] \\ &= \mathbb{E}[X_{01} + X_{12}]\mathbb{E}[X_{02} + X_{23}] + \mathbb{E}[X_{23}]\mathbb{E}[X_{02}] + \mathbb{E}[X_{23}]^2 + \text{Var}(X_{23}) \\ &= 6 \cdot 7 + 5 \cdot 2 + 2^2 + 1 = 8 \cdot 7 + 1 \end{aligned}$$

3. La variabile  $T - S = X_{01} + X_{12} - X_{02}$  è somma (differenza) di variabili gaussiane indipendenti, quindi ha legge  $\mathcal{N}(1, 5)$ . L'evento  $T = S$  coincide con  $T - S = 0$ , e quindi ha probabilità nulla (la variabile  $T - S$  è continua). Per capire quale tra  $T > S$  e  $T < S$  è più probabile, basta osservare che la densità di  $T - S$  è sempre positiva e simmetrica rispetto all'asse di ascissa 1 (il valore atteso) e quindi si ha  $P(T - S > 0) > \frac{1}{2}$ . Quindi è più probabile  $T > S$ .

**Corso di Laurea in Informatica – Calcolo delle Probabilità e Statistica (269AA)**  
**A.A. 2017/18 - Prova scritta 2018-07-03**

*La durata della prova è di tre ore. Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.*

**Problema 1**

Un dado a quattro facce, numerate da 1 a 4, è truccato in modo tale che la probabilità che esca 1 è il doppio della probabilità che esca 2, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 3, che a sua volta è il doppio della probabilità che esca 4. Si lancia due volte tale dado, e si pongono  $X_1, X_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$  gli esiti dei due lanci (assumere che siano variabili aleatorie indipendenti).

1. Calcolare la probabilità dell'evento  $\{X_1 = X_2\}$ .
2. Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria  $X_1 + X_2$ .
3. Sapendo che  $\{X_1 = X_2\}$ , come cambia la legge di  $X_1$ ? La probabilità che  $X_1 = 1$  aumenta, diminuisce o rimane invariata (rispetto a quella calcolata con l'informazione iniziale)?

**Una soluzione:**

1. Abbiamo che

$$P(X_1 = 1|\Omega) = 2P(X_1 = 2|\Omega) \quad P(X_1 = 2|\Omega) = 2P(X_1 = 3|\Omega) \quad P(X_1 = 3|\Omega) = 2P(X_1 = 4|\Omega).$$

Inoltre, siccome la somma delle probabilità è 1,

$$P(X_1 = 1|\Omega) + P(X_1 = 2|\Omega) + P(X_1 = 3|\Omega) + P(X_1 = 4|\Omega) = 1,$$

si trova un (semplice) sistema di 4 equazioni in 4 incognite. Posta  $x = P(X_1 = 4|\Omega)$ , sostituendo nelle prime tre equazioni ne segue che la quarta è

$$8x + 4x + 2x + x = 1,$$

da cui  $x = 1/15$ , e

$$P(X_1 = 1|\Omega) = \frac{8}{15}, \quad P(X_1 = 2|\Omega) = \frac{4}{15}, \quad P(X_1 = 3|\Omega) = \frac{2}{15}.$$

Lo stesso chiaramente per  $X_2$ . Per calcolare la probabilità dell'evento, basta decomporre secondo le alternative date ad esempio dall'esito del primo lancio:

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2|\Omega) &= \sum_{i=1}^4 P(X_1 = X_2|X_1 = i)P(X_1 = i|\Omega) \\ &= \sum_{i=1}^4 P(X_2 = i|X_1 = i)P(X_1 = i|\Omega) \\ &= \sum_{i=1}^4 P(X_2 = i|\Omega)P(X_1 = i|\Omega) \\ &= \left(\frac{8}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 \\ &= \frac{85}{225} \approx 0,38. \end{aligned}$$

2. Basta calcolare il valore atteso e la varianza di  $X_1$  e poi raddoppiare i risultati: infatti, valore atteso e varianza di  $X_2$  saranno gli stessi di  $X_1$ , e il valore atteso della somma è la somma dei valori attesi, e lo stesso per la varianza, grazie all'indipendenza. Troviamo

$$\mathbb{E}[X_1|\Omega] = \sum_{i=1}^4 iP(X_1 = i|\Omega) = \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{15} = \frac{26}{15}$$

$$\mathbb{E}[X_1^2|\Omega] = \sum_{i=1}^4 i^2P(X_1 = i|\Omega) = \frac{1^2 \cdot 8 + 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 1}{15} = \frac{58}{15},$$

da cui

$$\text{Var}(X_1|\Omega) = \frac{58}{15} - \left(\frac{26}{15}\right)^2 = \frac{58 \cdot 15 - 26^2}{15^2} = \frac{194}{225} \approx 0,86.$$

Quindi

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2|\Omega] = \frac{52}{15} \approx 3,5 \quad \text{Var}(X_1 + X_2|\Omega) = \frac{388}{225}.$$

3. Basta usare la formula di Bayes. Per ciascun  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , troviamo

$$P(X_1 = i|X_1 = X_2) = \frac{P(X_1 = X_2|X_1 = i)P(X_1 = i|\Omega)}{P(X_1 = X_2|\Omega)} = \frac{P(X_1 = i|\Omega)^2}{P(X_1 = X_2|\Omega)}.$$

Avendo calcolato il denominatore nel punto 1, si trova che

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1|X_1 = X_2) &= \frac{64}{85} & P(X_1 = 2|X_1 = X_2) &= \frac{16}{85} \\ P(X_1 = 3|X_1 = X_2) &= \frac{4}{85} & P(X_1 = 4|X_1 = X_2) &= \frac{1}{85}. \end{aligned}$$

In particolare, risulta  $P(X_1 = 1|X_1 = X_2) = \frac{64}{85} > \frac{8}{15} = P(X_1 = 1|\Omega)$ .

## Problema 2

Si consideri la catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$ , rappresentata graficamente in figura. Si supponga inoltre che sia  $P(X_0 = 2|\Omega) = P(X_0 = 3|\Omega) = \frac{1}{2}$ .



1. Scrivere la matrice di transizione  $Q$  (completare le probabilità mancanti) e calcolarne tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare la probabilità dell'evento  $\{X_2 \in \{2, 3\}\}$ . Trovare il più piccolo  $n \geq 1$  tale che l'evento  $\{X_n \in \{1, 4\}\}$  sia più probabile dell'evento  $\{X_n \in \{2, 3\}\}$ .
3. Si ponga  $\Theta = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\theta = X_2$  e  $L(\hat{\theta}, z) := |\hat{\theta} - z|$  per  $(\hat{\theta}, z) \in \Theta^2$ . Trovare tutte le decisioni  $\hat{\theta} \in \Theta$  che minimizzano il rischio associato ad  $L$ , rispetto all'informazione iniziale.

**Una soluzione:**

1. Scriviamo  $Q$  completando in modo che la somma delle riga sia 1

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovettori riga di autovalore 1 riducendo a gradini  $Q^r - \text{Id}$ . Si trova che

$$Q^r - \text{Id} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui troviamo che tutti gli autovettori sono della forma  $(s, 0, 0, t)$ , per  $s, t \in \mathbb{R}$ . Imponendo che la somma sia 1, si trova che  $s + t = 1$ , ma questo non determina un singolo autovettore. Infatti concludiamo che qualunque vettore

$$\mu(t) = (t, 0, 0, 1 - t)$$

al variare di  $t \in [0, 1]$  è una distribuzione invariante.

2. Per calcolare tale probabilità, calcoliamo prima  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)Q^2$  per ottenere la legge marginale di  $X_2$  e poi ne sommiamo la seconda e terza componente. Si trova

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

da cui

$$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)Q^2 = \left(\frac{7}{32}, \frac{9}{32}, \frac{9}{32}, \frac{7}{32}\right).$$

e la probabilità richiesta è

$$P(X_2 \in \{2, 3\} | \Omega) = 2 \cdot \frac{9}{32} = \frac{9}{16}.$$

Per rispondere alla seconda domanda, conviene ragionare nel seguente modo alternativo: la probabilità  $P(X_n \in \{2, 3\} | \Omega)$  si può calcolare decomponendo in due eventi (a seconda che sia  $X_0 = 2$  o  $X_0 = 3$ ). Dovendo poi calcolare  $P(X_n \in \{2, 3\} | X_0 = 2)$ , notiamo che necessariamente la catena deve visitare alternativamente gli stati 2 e 3. Ne segue che

$$P(X_n \in \{2, 3\} | X_0 = 2) = P(X_1 = 3 \text{ e } X_3 = 2, X_4 = 3 \dots | X_0 = 2) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Lo stesso se  $X_0 = 3$ . Pertanto pure

$$P(X_n \in \{2, 3\} | \Omega) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$



Cerchiamo quindi il minimo  $n$  per cui  $(\frac{3}{4})^n < \frac{1}{2}$ . Si trova che  $n = 3$  è sufficiente. Ovviamente anche ripetere quanto fatto nella prima parte della risposta, ma con  $n = 3$ , porta alla stessa conclusione.

3. Calcoliamo i vari rischi:

$$\mathbb{E}[|1 - X_2||\Omega] = \sum_{i=1}^4 |1 - i|P(X_2 = i|\Omega) = \frac{1}{32} (1 \cdot 9 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 7) = \frac{48}{32}.$$

$$\mathbb{E}[|2 - X_2||\Omega] = \sum_{i=1}^4 |2 - i|P(X_2 = i|\Omega) = \frac{1}{32} (1 \cdot 7 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 7) = \frac{30}{32}.$$

Notiamo poi che  $\mathbb{E}[|1 - X_2||\Omega] = \mathbb{E}[|4 - X_2||\Omega]$  e  $\mathbb{E}[|2 - X_2||\Omega] = \mathbb{E}[|3 - X_2||\Omega]$ . Pertanto le decisioni che minimizzano il rischio sono 2 e 3.

### Problema 3

Due treni viaggiano verso la stazione di Pisa. Secondo l'orario ufficiale, il primo arriva alle 16:00, il secondo alle 16:05. Tuttavia il primo accumula un ritardo di  $R_1$  minuti, rappresentato da una variabile aleatoria esponenziale di parametro  $1/5$ , mentre il ritardo del secondo è di  $R_2$  minuti, con  $R_2 \in \{0, 5\}$  avente legge uniforme (discreta). Si supponga che i ritardi dei due treni siano indipendenti.

1. Calcolare il valore atteso e la varianza del ritardo medio  $(R_1 + R_2)/2$ .
2. Calcolare la probabilità che il primo treno arrivi prima del secondo.
3. Sapendo che il primo treno è arrivato prima del secondo, è più probabile che il secondo sia arrivato in ritardo o che sia arrivato in orario? (Calcolare tali probabilità.)

#### Una soluzione:

1. Calcoliamo separatamente

$$\mathbb{E}[R_1|\Omega] = 5 \quad \text{Var}(R_2|\Omega) = 25$$

(per quanto noto sulle variabili esponenziali), e

$$\mathbb{E}[R_2|\Omega] = \frac{5}{2} \quad \text{Var}(R_2|\Omega) = \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4}.$$

Di conseguenza

$$\mathbb{E}[(R_1 + R_2)/2|\Omega] = \frac{5 + 5/2}{2} = \frac{15}{4} = 3,75.$$

$$\text{Var}((R_1 + R_2)/2|\Omega) = \frac{1}{4} \left( 25 + \frac{25}{4} \right) = \frac{125}{16} = 7,625$$

avendo usato che  $\text{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{Var}(X)$  e l'indipendenza dei due ritardi (per sommare le varianze ottenendo la varianza della somma).

2. L'evento cercato è  $\{R_1 < 5 + R_2\}$ , per cui

$$\begin{aligned}P(R_1 < 5 + R_2|\Omega) &= P(R_1 < 5 + R_2|R_2 = 0)P(R_2 = 0|\Omega) + P(R_1 < 5 + R_2|R_2 = 5)P(R_2 = 5|\Omega) \\&= P(R_1 < 5|R_2 = 0)\frac{1}{2} + P(R_1 < 10|R_2 = 5)\frac{1}{2} \\&= P(R_1 < 5|\Omega)\frac{1}{2} + P(R_1 < 10|\Omega)\frac{1}{2} \quad (\text{per indipendenza}) \\&= (1 - e^{-5/5}) \cdot \frac{1}{2} + (1 - e^{-10/5}) \cdot \frac{1}{2} \approx 0,75\end{aligned}$$

avendo usato la funzione di ripartizione della variabile esponenziale  $P(R_1 < t|\Omega) = 1 - e^{-t/5}$ .

3. Usiamo la formula di Bayes

$$\begin{aligned}P(R_2 = 0|R_1 < 5 + R_2) &= \frac{P(R_1 < 5 + R_2|R_2 = 0)P(R_2 = 0|\Omega)}{P(R_1 < 5 + R_2|\Omega)} \\&= \frac{P(R_1 < 5|R_2 = 0)P(R_2 = 0|\Omega)}{P(R_1 < 5 + R_2|\Omega)} \\&= \frac{1 - e^{-1}}{(1 - e^{-1}) + (1 - e^{-2})} \approx 0,42\end{aligned}$$

Similmente (oppure usando il fatto che la somma delle due probabilità è 1)

$$P(R_2 = 5|R_1 < 5 + R_2) = \frac{1 - e^{-2}}{(1 - e^{-1}) + (1 - e^{-2})} \approx 0,58$$

ed è più probabile che il secondo sia arrivato in ritardo.

La durata della prova è di **tre** ore. Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.

### Problema 1

Molte compagnie aeree praticano il cosiddetto *overbooking*, ossia vendono un numero maggiore di biglietti rispetto ai posti effettivamente disponibili, sfruttando il fatto che spesso non tutti i passeggeri si presentano. Analizziamo questa pratica con un semplice modello, in cui la compagnia ha venduto  $n$  biglietti e i posti a sedere disponibili sono al massimo 100. Inoltre supponiamo che ciascun possessore di biglietto si presenti al gate con probabilità  $p \in (0, 1)$ , indipendentemente dagli altri passeggeri (supponiamo che  $n, p$  siano parametri noti e fissati).

1. Determinare la legge, il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria

$$X = \text{“numero di passeggeri che si presenta al gate”},$$

in funzione dei parametri  $n$  e  $p$ .

2. Esprimere (in funzione del parametro  $p$ ) la probabilità che almeno un passeggero resti a terra, nei due casi  $n = 101$  ed  $n = 102$ . Si mostri che la probabilità è sempre maggiore nel secondo caso.
3. Supponiamo che ciascun biglietto costi 100 €, mentre per ciascun passeggero che rimane a terra la compagnia debba rimborsare subito 300 € (ossia perda 200 €). Si esprima, in funzione del parametro  $p$ , il valore atteso della variabile aleatoria

$$G = \text{“incasso netto alla partenza del volo”}$$

sia nel caso  $n = 100$  sia nel caso  $n = 101$ . Mostrare che per alcuni valori di  $p \in (0, 1)$  tale valore atteso è maggiore nel secondo caso.

#### Una soluzione:

1. Poiché  $n$  e  $p$  sono parametri noti e fissati, la variabile aleatoria  $X$  rappresenta il numero di successi (dove “successo” significa che il passeggero si presenta) in  $n$  esperimenti indipendenti. Abbiamo quindi che  $X$  è  $\text{Bin}(n, p)$  e quindi  $\mathbb{E}[X|\Omega] = np$ ,  $\text{Var}(X|\Omega) = np(1 - p)$ .

2. Si tratta di calcolare  $P(X > 100|\Omega)$  in entrambi i casi. Nel caso  $n = 101$ , abbiamo

$$P(X > 100|\Omega) = P(X = 101|\Omega) = p^{101}.$$

Nel secondo caso invece

$$P(X > 100|\Omega) = P(X = 101|\Omega) + P(X = 102|\Omega) = 102p^{101}(1 - p) + p^{102}.$$

Poiché

$$102p^{101}(1-p) + p^{102} > p^{101} \Leftrightarrow 101p^{101} > 101p^{102} \Leftrightarrow 1 > p,$$

segue che la probabilità è sempre maggiore nel secondo caso.

3. Nel caso  $n = 100$ , abbiamo semplicemente che

$$\mathbb{E}[G|\Omega] = 100^2.$$

Nel caso  $n = 101$ , scriviamo  $G$  usando la variabile  $X$  del punto 1:

$$G = \begin{cases} 100n & \text{se } X \leq 100, \\ 100n - 300(X - 100) & \text{se } X > 100. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G|\Omega] &= \mathbb{E}[G|X \leq 100] P(X \leq 100) + \mathbb{E}[G|X = 101] P(X = 101) \\ &= \mathbb{E}[G|X \leq 100] P(X \leq 100) + \mathbb{E}[G|X = 101] P(X = 101) \\ &= 101 \cdot 100 (1 - P(X = 101)) + (101 \cdot 100 - 300) P(X = 101) \\ &= 101 \cdot 100 - 300p^{101}, \end{aligned}$$

avendo usato il punto precedente. Si ha

$$101 \cdot 100 - 300p^{101} > 100^2 \Leftrightarrow p^{101} < \frac{1}{3},$$

che è soddisfatta per  $p < 1/3^{1/101} \approx 0.989$ .

## Problema 2

Si consideri una catena di Markov  $(X_1, X_2)$  avente insieme degli stati  $\{-1, 1\}$  e tempi  $\{1, 2\}$ , con matrice di transizione rappresentata graficamente in figura. Si supponga inoltre che la catena sia stazionaria. Sia inoltre  $Z$  una variabile aleatoria avente legge Gaussiana  $\mathcal{N}(0, 1)$ , non soltanto rispetto all'informazione iniziale  $\Omega$  ma anche rispetto a qualunque informazione del tipo  $\{X_1 = n_1, X_2 = n_2\}$ , per ogni  $(n_1, n_2) \in \{-1, 1\}^2$  (ossia,  $Z$  è Gaussiana indipendente dalla catena di Markov).



1. Scrivere la matrice di transizione  $Q$  (completare le probabilità mancanti) e calcolarne tutte le distribuzioni invarianti. Calcolare la varianza di  $X_1$ ,  $X_2$  e la covarianza tra  $X_1$  e  $X_2$ .
2. Calcolare valore atteso e varianza di  $X_1 Z$ .
3. Supponendo di osservare  $X_2 = 1$ , calcolare il valore atteso e la varianza della variabile  $X_1 Z$ . La varianza aumenta, diminuisce o rimane invariata (rispetto a quella calcolata con l'informazione iniziale  $\Omega$ )?
4. (*facoltativo*) La variabile  $X_1 Z$  è Gaussiana?

**Una soluzione:**

1. Troviamo

$$Q = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$Q^T - \text{Id} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

da cui troviamo che tutti gli autovettori sono della forma  $(2s, s)$ , per  $s \in \mathbb{R}$ . Imponendo che la somma sia 1, si trova l'unica distribuzione invariante

$$\mu = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Poiché la catena è stazionaria, valore atteso e varianza di  $X_1$  coincidono con quelli di  $X_2$ . Calcoliamo

$$\mathbb{E}[X_1|\Omega] = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3},$$

$$\text{Var}(X_1|\Omega) = \mathbb{E}[X_1^2|\Omega] - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Infine calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 X_2|\Omega] &= \mathbb{E}[X_1 X_2|X_1 = -1] P(X_1 = -1) + \mathbb{E}[X_1 X_2|X_1 = 1] P(X_1 = 1) \\ &= -\frac{2}{3} \mathbb{E}[X_2|X_1 = -1] + \frac{1}{3} \mathbb{E}[X_2|X_1 = 1] \\ &= -\frac{2}{3} \left(-1 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \left(-1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Poiché

$$\text{Cov}(X_1, X_2|\Omega) = \mathbb{E}[X_1 X_2|\Omega] - \mathbb{E}[X_1|\Omega] \mathbb{E}[X_2|\Omega],$$

ne segue che la covarianza vale  $2/9$ .

2. Calcoliamo

$$\mathbb{E}[X_1 Z|\Omega] = -\mathbb{E}[Z|X_1 = -1] P(X_1 = -1) + \mathbb{E}[Z|X_1 = 1] P(X_1 = 1) = 0$$

perché  $Z$  è Gaussiana indipendente da  $X_1$ ; similmente,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_1 Z)^2|\Omega] &= \mathbb{E}[Z^2|X_1 = -1] P(X_1 = -1) + \mathbb{E}[Z^2|X_1 = 1] P(X_1 = 1) \\ &= P(X_1 = -1) + P(X_1 = 1) \end{aligned}$$

da cui la varianza di  $X_1 Z$  vale 1.

3. Ripetiamo gli stessi calcoli, stavolta rispetto all'informazione  $X_2 = 1$ . Si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 Z|X_2 = 1] &= \mathbb{E}[X_1 Z|X_1 = -1, X_2 = 1] P(X_1 = -1|X_2 = 1) \\ &\quad + \mathbb{E}[X_1 Z|X_1 = 1, X_2 = 1] P(X_1 = 1|X_2 = 1) \\ &= -\mathbb{E}[Z|X_1 = -1, X_2 = 1] P(X_1 = -1|X_2 = 1) \\ &\quad + \mathbb{E}[Z|X_1 = 1, X_2 = 1] P(X_1 = 1|X_2 = 1) = 0. \end{aligned}$$

Similmente

$$\begin{aligned}\text{Var}(X_1 Z | X_2 = 1) &= \mathbb{E}[(X_1 Z)^2 | X_2 = 1] \\ &= \mathbb{E}[(X_1 Z)^2 | X_1 = -1, X_2 = 1] P(X_1 = -1 | X_2 = 1) \\ &\quad + \mathbb{E}[(X_1 Z)^2 | X_1 = 1, X_2 = 1] P(X_1 = 1 | X_2 = 1) \\ &= \mathbb{E}[Z^2 | X_1 = -1, X_2 = 1] P(X_1 = -1 | X_2 = 1) \\ &\quad + \mathbb{E}[Z^2 | X_1 = 1, X_2 = 1] P(X_1 = 1 | X_2 = 1) \\ &= P(X_1 = -1 | X_2 = 1) + P(X_1 = 1 | X_2 = 1) = 1\end{aligned}$$

pertanto rimane invariata.

4. Per ogni  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\varrho(X_1 Z = u | \Omega) &= \varrho(X_1 Z = u | X_1 = -1) P(X_1 = -1) \\ &\quad + \varrho(X_1 Z = u | X_1 = 1) P(X_1 = 1) \\ &= \varrho(Z = -u | X_1 = -1) P(X_1 = -1) + \varrho(Z = u | X_1 = 1) P(X_1 = 1) \\ &= \exp\left(-\frac{(-u)^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P(X_1 = -1) + \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P(X_1 = 1) \\ &= \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

Quindi  $X_1 Z$  ha legge normale standard.

### Problema 3

Sia  $N \in \{0, 1, 2\}$  una variabile aleatoria con legge uniforme (discreta) e sia  $X \in [0, 1]$  una variabile aleatoria continua avente densità

$$\varrho(X = x | \Omega \cap \{N = n\}) = (n + 1) x^n \quad \text{per ogni } x \in [0, 1], n \in \{0, 1, 2\}.$$

1. Calcolare  $\mathbb{E}[X | \Omega]$  e  $\text{Var}(X | \Omega)$ .
2. Supponendo di osservare  $\{X > \frac{1}{2}\}$ , come cambia la legge di  $N$ ?
3. Per ogni  $x \in (0, 1)$ , dire come cambia la legge di  $N$  supponendo di osservare  $\{X = x\}$ .  
Discutere in particolare quale dei tre eventi  $(\{N = n\})_{n=0,1,2}$  è più probabile.

**Una soluzione:**

1. Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X | N = n] &= \int_0^1 x (n + 1) x^n dx = \frac{n + 1}{n + 2}, \\ \mathbb{E}[X^2 | N = n] &= \int_0^1 x^2 (n + 1) x^n dx = \frac{n + 1}{n + 3}.\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\mathbb{E}[X | \Omega] = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) = \frac{23}{36},$$

$$\mathbb{E} [X^2|\Omega] = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \right) = \frac{86}{180},$$

e quindi

$$\text{Var} (X|\Omega) = \frac{86}{180} - \left( \frac{23}{36} \right)^2 \approx 0.07.$$

2. Calcoliamo

$$P(X > 1/2|N = n) = \int_{1/2}^1 (n+1)x^n dx = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Di conseguenza

$$P(X > 1/2|\Omega) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} \right),$$

e tramite formula di Bayes abbiamo

$$P(N = n|X > 1/2) = \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) / \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} \right).$$

In particolare è più probabile che sia  $N = 2$ .

3. Usiamo la formula di Bayes, caso continuo/discreto:

$$\begin{aligned} P(N = n|X = x) &= \frac{\varrho(X = x|N = n)}{\varrho(X = x|\Omega)} P(N = n|\Omega) \\ &= \frac{(n+1)x^n}{1 + 2x + 3x^2}. \end{aligned}$$

Poiché il denominatore è lo stesso, basta capire al variare di  $x \in (0, 1)$  quale tra le tre funzioni

$$1 \quad 2x \quad 3x^2$$

è maggiore (o uguale) delle altre. Troviamo che per  $x \in (0, 1/2]$  è maggiore la prima (quindi  $\{N = 0\}$  è il più probabile), per  $x \in [1/2, 2/3]$  è maggiore la seconda (quindi  $\{N = 1\}$  è il più probabile) mentre per  $x \in [2/3, 1)$  è maggiore la terza.

*La durata della prova è di due ore. Le risposte devono essere adeguatamente giustificate.*

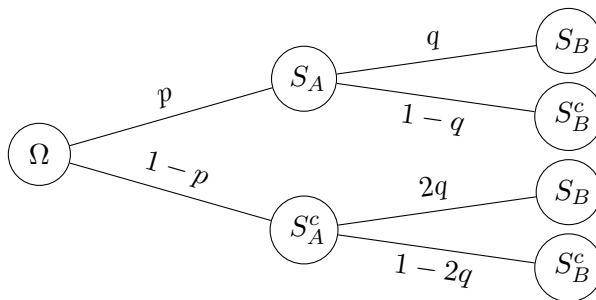
**Problema 1**

In una partita di calcio tra le squadre  $A$  e  $B$ , finita in parità dopo i tempi supplementari, si passa ai rigori (cinque per squadra). Dopo quattro rigori ciascuno, le due squadre sono ancora in parità. Un giocatore della squadra  $A$  tira per primo il quinto rigore e ha probabilità  $p$  di segnare il rigore. Il giocatore della squadra  $B$  incaricato del quinto rigore ha probabilità  $q$  di segnare il rigore se il giocatore della squadra  $A$  ha segnato, e probabilità  $2q$  di segnare il rigore se il giocatore della squadra  $A$  ha sbagliato (dove  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < 1/2$  sono parametri noti e fissati).

1. Calcolare, in funzione di  $p$  e  $q$ , la probabilità che il giocatore della squadra  $B$  segni il rigore.
2. Calcolare, in funzione di  $p$  e  $q$ , la probabilità che dopo i cinque rigori le squadre siano ancora in parità.
3. Sapendo che le squadre dopo il quinto rigore sono ancora in parità, calcolare la probabilità, in funzione di  $p$  e  $q$ , che  $B$  abbia sbagliato.

**Una soluzione:**

Possiamo introdurre gli eventi  $S_A =$  “il giocatore  $A$  segna” e  $S_B =$  “il giocatore  $B$  segna” e scrivere il grafo ad albero



1. Troviamo  $P(S_B|\Omega) = pq + (1 - p)2q$ . 2. Le squadre sono in parità se entrambi hanno segnato oppure entrambi hanno sbagliato. Sempre dall'albero troviamo

$$P((S_A \cap S_B) \cup (S_A^c \cap S_B^c)|\Omega) = pq + (1 - p)(1 - 2q).$$

3. Usiamo la formula di Bayes

$$P(S_B^c|\text{sono in parità}) = \frac{P(\text{sono in parità}|S_B^c)P(S_B^c|\Omega)}{P(\text{sono in parità}|\Omega)} = \frac{P(S_A^c|S_B^c)P(S_B^c|\Omega)}{P(\text{sono in parità}|\Omega)}.$$

Abbiamo già trovato il denominatore

$$P(\text{sono in parità}|\Omega) = pq + (1 - p)(1 - 2q).$$



Inoltre

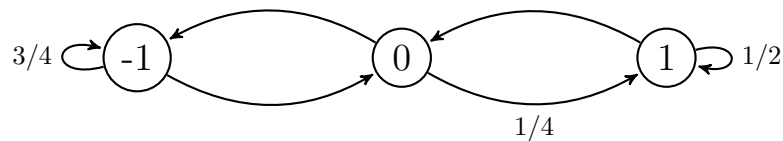
$$P(S_A^c | S_B^c) P(S_B^c | \Omega) = P(S_A^c \cap S_B^c | \Omega) = (1-p)(1-2q),$$

quindi

$$P(S_B^c | \text{sono in parità}) = \frac{(1-p)(1-2q)}{pq + (1-p)(1-2q)}.$$

### Problema 2

Si consideri una catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 1}$  avente insieme degli stati  $\{-1, 0, 1\}$  e matrice di transizione rappresentata graficamente in figura. Si supponga che la catena sia stazionaria.



1. Scrivere la matrice di transizione  $Q$  (completare le probabilità mancanti) e calcolarne tutte le distribuzioni invarianti.
2. Calcolare valore atteso e varianza di  $X_1$  e di  $X_2$ .
3. Supponendo di osservare  $X_2 = 0$ , è più probabile che sia  $X_1 = 1$  o  $X_1 = -1$ ?

### Una soluzione:

1. Troviamo (ordinando gli stati nell'ordine naturale  $\{-1, 0, 1\}$ )

$$Q = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$Q^T - \text{Id} \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui troviamo che tutti gli autovettori sono della forma  $(6s, 2s, s)$ , per  $s \in \mathbb{R}$ . Imponendo che la somma sia 1, si trova l'unica distribuzione invariante

$$\mu = \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9} \right).$$

2. Poiché la catena è stazionaria, valore atteso e varianza di  $X_1$  coincidono con quelli di  $X_2$  (infatti hanno la stessa densità discreta data dal vettore  $\mu$  calcolato prima). Calcoliamo

$$\mathbb{E}[X_1 | \Omega] = -\frac{2}{3} + \frac{1}{9} = -\frac{5}{9},$$

$$\mathbb{E}[X_1^2 | \Omega] = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9},$$

$$\text{Var}(X_1|\Omega) = \frac{7}{9} - \frac{25}{81} = \frac{38}{81}.$$

3. Usiamo Bayes

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1|X_2 = 0) &= \frac{P(X_2 = 0|X_1 = 1)P(X_1 = 1|\Omega)}{P(X_2 = 0)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Similmente

$$\begin{aligned} P(X_1 = -1|X_2 = 0) &= \frac{P(X_2 = 0|X_1 = -1)P(X_1 = -1|\Omega)}{P(X_2 = 0)} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(questo ultimo calcolo si può anche evitare osservando che  $P(X_1 = 0|X_2 = 0) = 0$ ).  
Quindi è più probabile che fosse  $X_1 = -1$ .

### Problema 3

Sia  $X$  una variabile gaussiana  $\mathcal{N}(2, 1)$  e  $Y$  una variabile uniforme (discreta) a valori in  $\{-1, 1\}$ , indipendente da  $X$ , e si ponga  $Z = XY$ .

1. Si calcoli il valore atteso di  $Z$ .
2. Si calcoli il valore atteso di  $Z^2$  e la varianza di  $Z$ .
3. Le variabili  $Y$  e  $Z$  sono indipendenti?

#### Una soluzione:

1. Poiché  $X$  è indipendente da  $Y$ , si ha

$$\mathbb{E}[Z|\Omega] = \mathbb{E}[XY|\Omega] = \mathbb{E}[X|\Omega] \mathbb{E}[Y|\Omega] = 2\mathbb{E}[Y|\Omega] = 0.$$

2. Per il valore atteso di  $Z^2$  (che coincide con la varianza, essendo  $\mathbb{E}[Z|\Omega] = 0$ ) osserviamo che  $Z^2 = (XY)^2 = X^2Y^2 = X^2$ , visto che  $Y^2 = 1$ . Quindi

$$\mathbb{E}[Z^2|\Omega] = \mathbb{E}[X^2|\Omega] = \text{Var}(X|\Omega) + \mathbb{E}[X|\Omega]^2 = 1 + 2^2 = 5.$$

3. No, non sono indipendenti. Ad esempio, se lo fossero, sapendo che  $Y = 1$ , la legge di  $Z$  non dovrebbe cambiare e quindi neanche il suo valore atteso (che dovrebbe essere nullo). Però

$$\mathbb{E}[Z|Y = 1] = \mathbb{E}[XY|Y = 1] = \mathbb{E}[X|Y = 1] = \mathbb{E}[X|\Omega] = 2$$

dove abbiamo usato il fatto che  $X$  e  $Y$  sono indipendenti.

## Corso di Laurea in Informatica – Calcolo delle Probabilità e Statistica (269AA)

### Raccolta di problemi dalle prove di esame

*I problemi sono proposti seguendo l'ordine di presentazione degli argomenti seguito nel corso (eventi, variabili aleatorie discrete, catene di Markov, probabilità continua, statistica bayesiana). Il tempo medio di risoluzione di ciascun problema durante le prove di esame è di un'ora.*

#### Problema 1

Un sacchetto contiene 5 caramelle, 4 buone e una cattiva (per il resto indistinguibili). La mamma dei fratelli Carlo e Diego impone a ciascuno di estrarre dal sacchetto una sola caramella, senza guardare. I due fratelli tirano a sorte su chi dovrà essere il primo ad estrarre. Poniamo  $p \in [0, 1]$  la probabilità che Carlo sia il primo ad estrarre la caramella.

1. Sapendo che Diego estrae per primo, qual è la probabilità la prima caramella estratta sia buona e la seconda cattiva?
2. Qual è la probabilità che Diego trovi una caramella buona?
3. Qual è la probabilità che Diego trovi una caramella buona, sapendo che la prima caramella estratta è buona?
4. Qual è la probabilità che sia stato Carlo a pescare per primo, sapendo che Diego ha trovato una caramella buona?

#### Una soluzione:

Introduciamo gli eventi

$$C = \text{“Carlo estrae per primo”}, \quad C^c = \text{“Diego estrae per primo”}.$$

$$B_1 = \text{“La prima caramella estratta è buona”}, \quad B_2 = \text{“La seconda estratta è buona”}$$

$$D = \text{“Diego trova una caramella buona”}.$$

Notiamo che  $D = (B_1 \cap C^c) \cup (B_2 \cap C)$ , unione tra due alternative. Data l'informazione iniziale  $\Omega$ , abbiamo

$$P(C|\Omega) = p, \quad P(C^c|\Omega) = 1 - p.$$

Inoltre, ricordando le estrazioni senza reimmissione,

$$P(B_1|\Omega) = \frac{4}{5}, \quad P(B_1|\Omega \cap B_2) = \frac{3}{4} \quad P(B_1|\Omega \cap B_2^c) = 1$$

$$P(B_2|\Omega) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}.$$

Infine, possiamo supporre che gli eventi  $B_1, B_2$  (e loro possibili combinazioni) siano indipendenti da  $C$ , rispetto a  $P(\cdot|\Omega)$ : sapere chi estrae tra Carlo e Diego non cambia la probabilità delle estrazioni (infatti entrambi estraggono senza guardare).

1. L'evento in questione è  $B_1 \cap B_2^c$ , di cui dobbiamo calcolare

$$P(B_1 \cap B_2^c|\Omega \cap C^c) = P(B_1 \cap B_2^c|\Omega) = P(B_2^c|B_1)P(B_1|\Omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

2. Calcoliamo

$$\begin{aligned}P(D|\Omega) &= P(D|\Omega \cap C)P(C|\Omega) + P(D|\Omega \cap C^c)P(C^c|\Omega) \\ &= P(D|\Omega \cap C)P(C|\Omega) + P(D|\Omega \cap C^c)P(C^c|\Omega) \\ &= P(B_2|\Omega \cap C)p + P(B_1|\Omega \cap C^c)(1-p) \\ &= P(B_2|\Omega)p + P(B_1|\Omega)(1-p) = \frac{4}{5}p + \frac{4}{5}(1-p) = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

3. Calcoliamo

$$\begin{aligned}P(D|\Omega \cap B_1) &= P(D|\Omega \cap B_1 \cap C)P(C|\Omega \cap B_1) + P(D|\Omega \cap B_1 \cap C^c)P(C^c|\Omega \cap B_1) \\ &= P(D|\Omega \cap B_1 \cap C)P(C|\Omega) + P(D|\Omega \cap B_1 \cap C^c)P(C^c|\Omega) \\ &= P(B_2|\Omega \cap B_1 \cap C)p + P(B_1|\Omega \cap B_1 \cap C^c)(1-p) \\ &= P(B_2|\Omega \cap B_1)p + P(B_1|\Omega \cap B_1)(1-p) = \frac{3}{4}p + 1-p.\end{aligned}$$

4. Per calcolare  $P(C|\Omega \cap D)$ , usiamo la formula di Bayes

$$P(C|\Omega \cap D) = P(D|\Omega \cap C) \frac{P(C|\Omega)}{P(D|\Omega)}.$$

E calcoliamo l'unico termine che non conosciamo ancora:

$$P(D|\Omega \cap C) = P(B_2|\Omega \cap C) = P(B_2|\Omega) = \frac{4}{5}.$$

Di conseguenza,

$$P(C|\Omega \cap D) = P(C|\Omega) = p,$$

che mostra tra l'altro che  $C$  e  $D$  sono indipendenti rispetto a  $P(\cdot|\Omega)$ .

## Problema 2

Un ladro alquanto sbadato vuole aprire una serratura servendosi di una copia della chiave originale, che però ha raccolto in un mazzo insieme ad altre 3 chiavi che non aprono. Inoltre, la copia della chiave originale è difettosa, e la probabilità di aprire la serratura con essa, in ogni singolo tentativo, è  $1/2$  (indipendentemente da altri tentativi). Dopo 4 tentativi di apertura falliti il ladro decide di lasciar perdere. Poniamo  $T \in \{1, 2, 3, 4, S\}$  la variabile aleatoria definita come  $T = k$ , per  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , se al tentativo  $k$  apre la serratura, mentre  $T = S$  se ladro rinuncia (quindi 4 tentativi falliti).

1. Supponiamo che il ladro decida di prendere ad ogni tentativo una chiave dal mazzo, anche eventualmente ripetendo quelle che ha già provato. Descrivere la legge di  $T$ , ossia la probabilità degli eventi  $\{T = k\}$ , per  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$  e di  $\{T = S\}$ .
2. Supponiamo invece che il ladro usi una seconda "strategia", che consiste nel prendere una sola chiave e provare per 4 volte (al più) di aprire la serratura con quella chiave. Descrivere la legge di  $T$ .

3. Supponiamo invece che il ladro usi la “strategia” di provare ad ogni tentativo una chiave diversa dal mazzo, senza ripetere quelle che ha provato. Descrivere la legge di  $T$ .
4. Supponiamo di sapere che il ladro abbia seguito una delle tre strategie descritte sopra, ma non sapere quale: assegniamo inizialmente eguale probabilità ai tre eventi “il ladro usa la strategia  $i$ ” per ciascun  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Per ogni  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , sapendo che  $T = k$ , come cambiano le probabilità dei tre eventi? quale strategia è più probabile che abbia usato? Sapendo che  $T = S$ , quale strategia è più probabile che abbia usato?

**Una soluzione:**

1. La prima strategia utilizza estrazioni con reimmissione. Consideriamo prima un singolo tentativo: affinché la serratura si apra (successo) il ladro deve scegliere la chiave giusta e deve avere successo nonostante il difetto della copia: otteniamo che la probabilità di aprire la serratura è  $P(T = 1|\Omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ . La strategia descritta consiste nell’effettuare al più 4 prove indipendenti e interrompere nel caso vi siano 4 fallimenti. Otteniamo quindi, per  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$P(T = k|\text{strat. 1}) = \left(\frac{7}{8}\right)^{k-1} \frac{1}{8},$$

mentre

$$P(T = S|\text{strat. 1}) = \left(\frac{7}{8}\right)^4$$

2. Nella seconda strategia, basta condizionare rispetto all’evento “il ladro ha scelto la chiave giusta”. Abbiamo infatti, per  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$\begin{aligned} P(T = k|\text{strategia 2}) &= P(T = k|\text{strat. 2} \cap \text{chiave giusta})P(\text{chiave giusta}|\text{strat. 2}) \\ &= \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} P(T = S|\text{strat. 2}) &= P(T = S|\text{strategia 2} \cap \text{chiave giusta})P(\text{chiave giusta}|\text{strat. 2}) \\ &\quad + P(T = S|\text{strat. 2} \cap \text{chiave sbagliata})P(\text{chiave sbagliata}|\text{strat. 2}) \\ &= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

3. Nella terza strategia il ladro usa estrazioni senza reimmissione. La probabilità che il successo avvenga al primo tentativo è ancora  $P(T = 1|\text{strategia 2}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ , ma affinché il successo nel secondo tentativo dobbiamo aver scelto la chiave sbagliata nel primo, quindi

$$P(T = 2|\text{strategia 3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

e similmente

$$P(T = 3|\text{strat. 3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(T = 4 | \text{strat. 3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

e quindi

$$P(T = S | \text{strat. 3}) = 1 - P(T \in \{1, 2, 3, 4\} | \text{strat. 3}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

4. Usiamo la formula di Bayes, per  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$\begin{aligned} P(\text{strategia } i | T = k) &= \\ &= \frac{P(T = k | \text{strategia } i) P(\text{strategia } i | \Omega)}{P(T = k | \Omega)} \\ &= \frac{P(T = k | \text{strategia } i)}{P(T = k | \text{strategia } 1) + P(T = k | \text{strategia } 2) + P(T = k | \text{strategia } 3)}. \end{aligned}$$

Similmente, per  $T = S$ ,

$$P(\text{strat. } i | T = S) = \frac{P(T = S | \text{strat. } i)}{P(T = S | \text{strat. } 1) + P(T = S | \text{strat. } 2) + P(T = S | \text{strat. } 3)}.$$

Per capire quale strategia ha probabilità maggiore sapendo  $T = k$ , basta quindi capire quale tra le probabilità

$$P(T = k | \text{strat. } 1) = \left(\frac{7}{8}\right)^{k-1} \frac{1}{8}, \quad P(T = k | \text{strat. } 2) = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{4}, \quad P(T = k | \text{strat. } 3) = \frac{1}{8}$$

è maggiore, e in modo simile quale tra le tre probabilità

$$P(T = S | \text{strat. } 1) = \left(\frac{7}{8}\right)^4, \quad P(T = S | \text{strat. } 2) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4}, \quad P(T = S | \text{strat. } 3) = \frac{1}{2}$$

è maggiore. Per  $k = 1$ , si ha

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8},$$

quindi nessuna delle tre strategie è più probabile delle altre. Per tutti gli altri  $k \in \{2, 3, 4\}$ , si vede che

$$\left(\frac{7}{8}\right)^3 \frac{1}{8} < \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{4} < \frac{1}{8},$$

quindi la terza strategia è la più probabile. Se  $T = S$ , troviamo invece

$$\left(\frac{7}{8}\right)^4 < \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4},$$

e quindi la seconda strategia è la più probabile.

### Problema 3

Una nuova tecnologia di memorie, in via di sviluppo, permette allo stato attuale di registrare

9 bit di informazione, disposti in una matrice quadrata  $(B_{ij})_{i,j=1,2,3}$ , ad esempio come segue:

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e di leggere poi le somme dei valori su ciascuna riga,  $R_i = \sum_{j=1}^3 B_{ij}$  (per ogni  $i \in \{1, 2, 3\}$ ), e su ciascuna colonna,  $C_j = \sum_{i=1}^3 B_{ij}$  (per ogni  $j \in \{1, 2, 3\}$ ). Per studiare il sistema di lettura, viene realizzato un campione in cui le 9 componenti della matrice possono essere supposte indipendenti, ciascuna con legge Bernoulli di parametro  $p \in (0, 1)$  noto e fissato.

1. Calcolare la legge, il valore atteso e varianza di ciascuna variabile  $R_i$  e  $C_j$ , per ogni  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Le variabili  $R_1$  e  $C_2$  sono indipendenti? calcolarne la covarianza.
2. Calcolare la probabilità che si realizzi la configurazione dell'esempio sopra. Calcolare la probabilità dell'evento  $A = \{C_1 = 1 \text{ e } R_1 = R_2 = C_3 = 2\}$ . (*Suggerimento: enumerare tutte le possibili configurazioni che realizzano A e sommare le probabilità di ciascuna.*)
3. Gli eventi  $\{B_{32} = 1\}$  e  $A$  (del punto sopra) sono indipendenti?

#### Una soluzione:

1. Poiché ciascuna  $R_i$  o  $C_j$  è scritta come somma di tre Bernoulli indipendenti di parametro  $p$ , la legge di ciascuna di esse è Binomiale di parametri  $(3, p)$  (si può pensare che ciascun bit indichi il successo in una estrazione diversa, con rimpiazzo). Otteniamo quindi che

$$\mathbb{E}[R_i] = \mathbb{E}[C_j] = 3p, \quad \text{Var}(R_i) = \text{Var}(C_j) = 3p(1-p).$$

Le variabili  $R_1$  e  $C_2$  non sono indipendenti (in realtà, nessuna coppia  $(R_i, C_j)$  consiste di variabili indipendenti): per giustificarlo, basta mostrare che la covarianza  $\text{Cov}(R_1, C_2) = \mathbb{E}[R_1 C_2] - \mathbb{E}[R_1] \mathbb{E}[C_2]$  non è zero. Calcoliamo

$$\mathbb{E}[R_1 C_2] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j=1}^3 B_{1j} \right) \left( \sum_{i=1}^3 B_{i2} \right) \right] = \sum_{i,j=1}^3 \mathbb{E}[B_{1j} B_{i2}].$$

Osserviamo che, eccetto nel caso  $i = 1$  e  $j = 2$ , i termini  $B_{1j}$  e  $B_{i2}$  si riferiscono a componenti diverse, quindi sono indipendenti e possiamo calcolare

$$\mathbb{E}[B_{1j} B_{i2}] = \mathbb{E}[B_{1j}] \mathbb{E}[B_{i2}] = p^2.$$

Nel caso  $i = 1$  e  $j = 2$ , abbiamo invece  $\mathbb{E}[B_{1j} B_{i2}] = \mathbb{E}[B_{12}^2] = \mathbb{E}[B_{12}] = p$ . Abbiamo quindi 8 addendi uguali a  $p^2$  e uno pari a  $p$ ,

$$\mathbb{E}[R_1 C_2] = 8p^2 + p,$$

e quindi

$$\text{Cov}(R_1, C_2) = 8p^2 + p - (3p)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Possiamo anche riconoscere, dopo questo calcolo, che l'unico termine che contribuisce alla covarianza è la componente  $B_{12}$  in comune alla riga 1 e alla colonna 2, mentre le altre, essendo indipendenti, non sono correlate.

2. L'evento "si realizza la configurazione dell'esempio sopra" corrisponde ad una precisa successione di successi/insuccessi in una serie di 9 estrazioni ripetute, con rimpiazzo, in cui la probabilità di successo è  $p$  (basta infatti ordinare in un qualche modo le nove componenti della matrice). Otteniamo quindi che

$$P(\text{"esempio"}) = p^5(1-p)^4.$$

Per calcolare la probabilità dell'evento  $A = \{C_1 = 1 \text{ e } R_1 = R_2 = C_3 = 2\}$ , seguiamo il suggerimento. Per calcolare le probabilità che si realizzino le configurazioni che troveremo, basterà ragionare come nella prima parte della domanda, contando il numero di 0 e di 1 nella configurazione.

Notiamo allora che, poiché un singolo 1 occupa la prima colonna, possiamo introdurre tre alternative, a seconda della riga in cui si trova. Se occupa la prima riga, ossia la prima colonna è  $(1, 0, 0)$ , poiché  $R_2 = 2$  segue che la seconda riga è  $(0, 1, 1)$  e quindi la matrice è del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Anche  $R_1 = 2$ , e quindi distinguiamo ulteriormente due casi:  $(1, 1, 0)$  oppure  $(1, 0, 1)$ . Nel primo caso, poiché  $C_3 = 2$ , la terza colonna deve essere  $(0, 1, 1)$  e concludiamo con le due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix},$$

dove al posto di  $x$  si può trovare 0 oppure 1. Questo caso si realizza con probabilità  $p^5(1-p)^3(p + (1-p)) = p^5(1-p)^3$ . Nel secondo caso, sempre poiché  $C_3 = 2$ , la terza colonna deve essere  $(1, 1, 0)$  e troviamo le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

dove di nuovo al posto di  $x$  si può trovare 0 oppure 1, e quindi abbiamo probabilità  $p^4(1-p)^4$ . Questo conclude la prima delle tre alternative iniziali, che quindi si realizza con probabilità

$$p^5(1-p)^3 + p^4(1-p)^4.$$

Nella seconda alternativa, la prima colonna è  $(0, 1, 0)$  e si ragiona allo stesso modo trovando le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$$



e quindi si ottiene la stessa probabilità:

$$p^5(1-p)^3 + p^4(1-p)^4.$$

Infine nel terzo caso, la prima colonna è  $(0, 0, 1)$  e poiché  $R_1 = R_2 = 2$ , le prime due righe devono essere entrambe uguali a  $(0, 1, 1)$ . Di conseguenza la terza colonna, per cui  $C_3 = 2$  deve essere  $(1, 1, 0)$  e concludiamo trovando le due matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix},$$

che quindi contribuisce con probabilità  $p^5(1-p)^3$ . In conclusione, abbiamo trovato che

$$P(A) = 3p^5(1-p)^3 + 2p^4(1-p)^4.$$

3. Sì, sono indipendenti. Ad esempio, si può ripetere il ragionamento precedente supponendo però di sapere che  $\{B_{32} = 1\}$ : l'unica differenza è che le matrici trovate, al posto di  $x$  (che poteva essere arbitrariamente 0 oppure 1) hanno necessariamente 1, ma ai fini della probabilità non cambia nulla, perché pur supponendo di sapere che tale componente è 1, le rimanenti componenti restano indipendenti, Bernoulli di parametro  $p$ , grazie all'ipotesi di indipendenza. Un modo più veloce di concludere che i due eventi sono indipendenti è di notare che l'evento  $A$  è ottenibile come funzione di tutte le componenti della matrice *eccetto*  $B_{32}$ , pertanto grazie all'ipotesi di indipendenza iniziale, qualunque informazione su  $B_{32}$  non cambia la legge delle altre componenti, e quindi neppure la probabilità di  $A$ .

#### Problema 4

Gli studenti universitari possono essere divisi in due categorie, i “puntuali” e i “ritardadari”, che sono rispettivamente il 90% e il 10% del totale. Se uno studente è “puntuale”, la probabilità che arrivi in ritardo a lezione è 0.1 (ad ogni lezione, indipendentemente dalle altre), mentre se è “ritardatario” la probabilità che arrivi in ritardo a lezione è 0.3 (ad ogni lezione, indipendentemente dalle altre). Il corso di CPS comprende in tutto 20 lezioni.

1. Qual è la probabilità che uno studente arrivi in orario a  $k$  lezioni di CPS, per  $k \in \{0, 1, \dots, 20\}$ ?
2. Calcolare valore atteso, varianza e deviazione standard della frazione aleatoria “numero di lezioni cui lo studente arriva in orario su numero totale di lezioni del corso di CPS”. (*Aiutatevi con una calcolatrice per ottenere i valori numerici*)
3. Sapendo che uno studente è arrivato in orario ad esattamente 18 lezioni su 20, qual è la probabilità che sia uno studente “puntuale”? (*Fornirne l'espressione esatta e un'approssimazione alle prime due cifre decimali.*)

4. (*Facoltativo*) Sapendo che uno studente è arrivato in orario a 17 lezioni sulle prime 19, qual è la probabilità che arrivi in orario all'ultima lezione? (*Fornirne l'espressione esatta e un'approssimazione alle prime due cifre decimali.*)

**Una soluzione:**

Introduciamo l'evento  $R = \{\text{lo studente è di tipo "ritardatario"}\}$  ( $P(R|\Omega) = 0.1$ ) le variabili aleatorie  $X_i$ , indicatrici rispettivamente dell'evento

$$\{\text{lo studente arriva in orario alla lezione } i\} = \{X_i = 1\},$$

per  $i \in \{1, \dots, 20\}$ . Dal testo segue che, rispetto a  $P(\cdot|R)$ , le variabili  $(X_i)_{i=1}^{20}$  sono indipendenti e ciascuna con legge Bernoulli di parametro  $1 - 0.3 = 0.7$ , mentre rispetto a  $P(\cdot|R^c)$ , sono indipendenti e ciascuna con legge Bernoulli di parametro  $1 - 0.1 = 0.9$ . Il numero di lezioni a cui arriva in orario è  $X = \sum_{i=1}^{20} X_i$ : ne segue dalla teoria (schema delle estrazioni con reimmissione) che la legge di  $X$  è  $\text{Bin}(20, 0.7)$  rispetto a  $P(\cdot|R)$ , mentre è  $\text{Bin}(20, 0.9)$  rispetto a  $P(\cdot|R^c)$ .

1. Calcoliamo, per  $x \in \{0, 1, \dots, 20\}$ ,

$$\begin{aligned} P(X = k|\Omega) &= P(X = k|R)P(R|\Omega) + P(X = k|R^c)P(R^c|\Omega) \\ &= \binom{20}{k} \cdot (0.7)^k \cdot (0.3)^{20-k} P(R|\Omega) + \binom{20}{k} \cdot (0.9)^k \cdot (0.1)^{20-k} P(R^c|\Omega) \\ &= \binom{20}{k} (0.7)^k \cdot (0.3)^{20-k} \cdot 0.1 + \binom{20}{k} (0.9)^k \cdot (0.1)^{20-k} \cdot 0.9 \end{aligned}$$

2. La variabile aleatoria richiesta è  $F = X/20$ . Calcoliamo prima valore atteso e varianza di  $X$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|\Omega] &= \mathbb{E}[X|R]P(R|\Omega) + \mathbb{E}[X|R^c]P(R^c|\Omega) \\ &= 20 \cdot 0.7 \cdot 0.1 + 20 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 20 \cdot (0.7 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.9) = 17.6 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che il valore atteso di una variabile  $\text{Bin}(n, p)$  è  $np$ . Calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2|\Omega] &= \mathbb{E}[X^2|R]P(R|\Omega) + \mathbb{E}[X^2|R^c]P(R^c|\Omega) \\ &= \left(20 \cdot 0.7 \cdot 0.3 + (20 \cdot 0.7)^2\right) \cdot 0.1 + \left(20 \cdot 0.9 \cdot 0.1 + (20 \cdot 0.9)^2\right) \cdot 0.9, \\ &= 20 \cdot (0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9) + 20^2 \cdot \left((0.7)^2 \cdot 0.1 + (0.9)^2 \cdot 0.9\right), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che il valore atteso del quadrato di una variabile  $\text{Bin}(n, p)$  è  $np(1-p) + (np)^2$ . Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X|\Omega) &= \mathbb{E}[X^2|\Omega] - (\mathbb{E}[X|\Omega])^2 \\ &= 20 \cdot (0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9) + 20^2 \cdot \left((0.7)^2 \cdot 0.1 + (0.9)^2 \cdot 0.9\right) \\ &\quad - 20^2 \cdot (0.7 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.9)^2 = 3.48. \end{aligned}$$

Di conseguenza,  $\mathbb{E}[F|\Omega] = \mathbb{E}[X|\Omega]/20 = 0.88$ ,  $\text{Var}(F|\Omega) = \text{Var}(X|\Omega)/20^2 = 0.0087$ ,  $\sigma(F|\Omega) = \sqrt{0.0087} \sim 0.09$ .

3. Usiamo la formula di Bayes

$$P(R^c|X = 18) = \frac{P(X = 18|R^c)P(R^c|\Omega)}{P(X = 18|\Omega)}.$$

Calcoliamo

$$P(X = 18|R^c) = \binom{20}{18} (0.9)^{18} \cdot (0.1)^2,$$

mentre, per il punto 1,

$$P(X = 18|\Omega) = \binom{20}{18} (0.7)^{18} \cdot (0.3)^2 \cdot 0.1 + \binom{20}{18} (0.9)^{18} \cdot (0.1)^2 \cdot 0.9.$$

$$\begin{aligned} P(R^c|X = 18) &= \frac{\binom{20}{18} (0.9)^{18} \cdot (0.1)^2 \cdot 0.9}{\binom{20}{18} (0.7)^{18} \cdot (0.3)^2 \cdot 0.1 + \binom{20}{18} (0.9)^{18} \cdot (0.1)^2 \cdot 0.9} \\ &= \frac{1}{1 + (0.7/0.9)^{18} \cdot (0.3/0.1)^2 \cdot (0.1/0.9)} \\ &\sim \frac{1}{1 + 0.0108} \sim 0.989. \end{aligned}$$

4. Poniamo  $Y = \sum_{i=1}^{19} X_i$ . Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} P(X_{20} = 1|Y = 17) &= P(X_{20} = 1|\{Y = 17\} \cap R)P(R|Y = 17) \\ &\quad + P(X_{20} = 1|\{Y = 17\} \cap R^c)P(R^c|Y = 17) \\ &= P(X_{20} = 1 \cap R)P(R|Y = 17) + P(X_{20} = 1 \cap R^c)P(R^c|Y = 17) \\ &= 0.3P(R|Y = 17) + 0.9P(R^c|Y = 17). \end{aligned}$$

Quindi calcoliamo, usando la formula di Bayes come nel punto 3,

$$\begin{aligned} P(R^c|Y = 17) &= \frac{\binom{19}{17} (0.9)^{17} \cdot (0.1)^2 \cdot 0.9}{\binom{19}{17} (0.7)^{17} \cdot (0.3)^2 \cdot 0.1 + \binom{19}{17} (0.9)^{17} \cdot (0.1)^2 \cdot 0.9} \\ &= \frac{1}{1 + (0.7/0.9)^{17} \cdot (0.3/0.1)^2 \cdot (0.1/0.9)} \sim 0.986 \end{aligned}$$

Da cui otteniamo anche  $P(R|Y = 17) = 1 - P(R^c|Y = 17) = 0.014$ , e quindi

$$P(X_{20} = 1|Y = 17) = 0.3 \cdot 0.014 + 0.9 \cdot 0.986 = 0.8916.$$

### Problema 5

Una lotteria consiste di un numero fissato  $n \geq 1$  di biglietti, ciascuno del costo di 1€, e un montepremi di  $n\text{€}$  che viene assegnato ad un unico biglietto vincente, estratto a sorte tra gli  $n$  biglietti.

1. Una persona decide di acquistare  $k$  biglietti, con  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  fissato. Posto  $V$  il guadagno netto dopo l'estrazione del biglietto, ossia  $V = -k\text{€}$  se nessun biglietto è vincente,  $V = (n - k)\text{€}$  altrimenti, calcolare valore atteso e varianza di  $V$ . Per quali  $k$  la varianza di  $V$  è massima? per quali è minima?

- Due persone (1 e 2) decidono rispettivamente di acquistare  $k_1, k_2$  biglietti, con  $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $k_1 + k_2 \leq n$ . Posti  $V_1, V_2$  i guadagni netti dopo l'estrazione del biglietto, ossia  $V_1 = -k_1 \text{€}$  se nessun biglietto della persona 1 è vincente,  $V_1 = (n - k_1) \text{€}$  altrimenti, e similmente per  $V_2$ , calcolare la covarianza tra  $V_1$  e  $V_2$ .
- Per fornire un modello della lotteria, si suppone che una persona che decide di partecipare alla lotteria acquisti un numero  $K$  aleatorio di biglietti,  $K \in \{1, 2, \dots, n\}$  con legge

$$P(K = k|\Omega) = c \frac{1}{k}, \quad \text{per ogni } k \in \{1, \dots, n\},$$

e  $c > 0$  è un'opportuna costante (ottenibile imponendo che la somma delle probabilità sia 1). Aggiornando l'informazione  $\Omega$  con l'evento "la persona vince la lotteria", come cambia la legge di  $K$ ? Calcolarne valore atteso e varianza. (*Suggerimento: NON è necessario né richiesto di "calcolare" il valore di  $c$* )

### Una soluzione:

- Si ha  $P(\text{"vince"}|\Omega) = \frac{k}{n}$ , quindi

$$\mathbb{E}[V|\Omega] = \frac{k}{n} \cdot (n - k) - \frac{n - k}{n} \cdot k = 0,$$

$$\text{Var}(V|\Omega) = \mathbb{E}[V^2|\Omega] = \frac{k}{n} \cdot (n - k)^2 + \frac{n - k}{n} k^2 = k(n - k),$$

che è minima per  $k \in \{0, n\}$  mentre è massima per  $k = n/2$  se  $n$  è pari, altrimenti per  $k \in \{(n + 1)/2, (n - 1)/2\}$ , se  $n$  è dispari.

- Gli eventi  $A_1 = \text{"vince la persona 1"}$  e  $A_2 = \text{"vince la persona 2"}$  e  $A_3 = \text{"non vince né 1 né 2"}$  sono un sistema di alternative, e inoltre sappiamo che  $P(A_1) = k_1/n$ ,  $P(A_2) = k_2/n$ ,  $P(A_3) = (n - k_1 - k_2)/n$ . Perciò

$$\begin{aligned} \text{Cov}(V_1, V_2|\Omega) &= \mathbb{E}[V_1 V_2|\Omega] = \sum_{i=1}^3 \mathbb{E}[V_1 V_2|A_i] P(A_i|\Omega) \\ &= -(n - k_1)k_2 \cdot \frac{k_1}{n} + -(n - k_2)k_1 \cdot \frac{k_2}{n} + k_1 k_2 \frac{(n - k_1 - k_2)}{n} \\ &= -k_1 k_2. \end{aligned}$$

- Nel primo punto abbiamo visto che, per  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$P(\text{"vince"}|K = k) = \frac{k}{n},$$

quindi la formula di Bayes implica

$$P(K = k|\text{"vince"}) = \frac{P(\text{"vince"}|K = k)P(K = k|\Omega)}{P(\text{"vince"}|\Omega)} = \frac{\frac{k}{n} \cdot c \frac{1}{k}}{P(\text{"vince"}|\Omega)},$$

dove  $P(\text{"vince"}|\Omega) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot c \frac{1}{k} = c$ . Perciò abbiamo trovato per  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$P(K = k|\text{"vince"}) = \frac{1}{n},$$

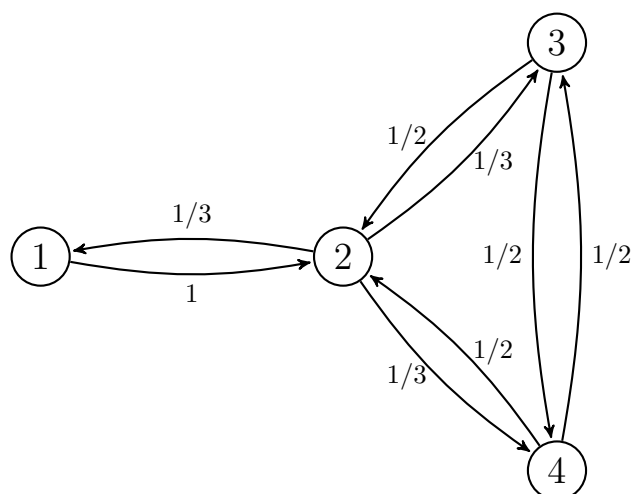
ossia  $K$  ha legge uniforme (discreta). Sappiamo allora che il valore atteso è

$$\mathbb{E}[K|\text{“vince”}] = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2},$$

mentre la varianza è  $\text{Var}(K|\text{“vince”}) = (n^2 - 1)/12$ .

### Problema 6

Uno spazzaneve deve pulire le strade di un quartiere. Tuttavia il conducente è molto smemorato e ad ogni incrocio (nodi in figura) prende una strada tra quelle possibili con le probabilità rappresentate in figura, indipendentemente dal percorso passato.



1. Scrivere la matrice di transizione  $Q$  della catena di Markov discreta che al “tempo”  $k$  rappresenta il  $k$ -esimo incrocio incontrato dallo spazzaneve.
2. Qual è la probabilità che in almeno uno tra i tempi  $t \in \{3, 4\}$  lo spazzaneve si trovi in almeno una tra gli incroci  $\{3, 4\}$ , sapendo che al tempo 1 si trova all’incrocio 1?
3. Determinare tutte le distribuzioni invarianti della catena. Nel caso in cui la catena sia stazionaria, calcolare il valore atteso della variabile aleatoria  $f(X_1)$ , dove  $f(x)$  è il numero di strade (frece uscenti) all’incrocio  $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ .
4. Supponendo che la catena sia stazionaria, calcolare la probabilità che si trovasse al tempo 1 nello stato 1, avendo osservato che al tempo 3 si trova all’incrocio 3 oppure 4.

### Una soluzione:

(1) Scegliamo di ordinare gli stati come è suggerito nel testo, ossia  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Si ha

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Poniamo  $A$  l'evento di cui è richiesto di calcolare la probabilità,

$$A = \{X_3 \in \{3, 4\}\} \cup \{X_4 \in \{3, 4\}\}$$

Possiamo argomentare in almeno due modi: calcolando  $P(A|X_1 = 1)$  oppure  $P(A^c|X_1 = 1)$ , dove

$$A^c = \{X_3 \in \{1, 2\}\} \cap \{X_4 \in \{1, 2\}\}$$

Si tratta quindi di contare i cammini che partono da 1 e nei tempi 3 e 4 si trovano sempre in  $\{1, 2\}$ , "pesando" ciascun cammino con il prodotto delle probabilità di transizione. Notiamo che, sapendo che al tempo 1 lo spazzaneve si trova in 1, con probabilità 1 al tempo 2 si deve trovare nello stato 2. Si vede quindi che l'unico cammino possibile è  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ , la cui probabilità è quindi  $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$ . Ne segue che  $P(A^c|X_1 = 1) = \frac{1}{3}$  e  $P(A|X_1 = 1) = \frac{2}{3}$ . Un altro modo di procedere è di calcolare direttamente la probabilità di  $A$ , condizionando sui possibili stati visitati:

$$\begin{aligned} P(A|X_1 = 1) &= P(A|X_2 = 2) \\ &= \sum_{s=1}^4 P(A|\{X_3 = s\} \cap \{X_2 = 2\})P(X_3 = s|X_2 = 2) \\ &= \sum_{s=1}^4 P(A|\{X_3 = s\} \cap \{X_2 = 2\})Q_{2s} \\ &= P(A|X_3 = 1)\frac{1}{3} + P(A|\{X_3 = 3\})\frac{1}{3} + P(A|\{X_3 = 4\})\frac{1}{3} \\ &= P(A|X_3 = 1)\frac{1}{3} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Quindi ci resta da calcolare

$$\begin{aligned} P(A|X_3 = 1) &= P(\{X_4 \in \{3, 4\}\} | X_3 = 1) \\ &= P(\{X_4 \in \{3, 4\}\} | X_4 = s)P(X_4 = s | X_3 = 1) = 0. \end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo trovato di nuovo

$$P(A|X_1 = 1) = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

(3) Per calcolare le distribuzioni invarianti della catena, troviamo gli autovettori di autovalore 1 della matrice trasposta di  $Q$ :

$$Q^t - I = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Riducendo con operazioni di riga troviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui gli autovettori (di autovalore 1) sono tutti del tipo  $t(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1)$ , per  $t \neq 0$ , quindi imponendo la condizione per cui la somma delle componenti deve essere 1 troviamo

$$\vec{\mu} = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Notiamo che  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 3$ ,  $f(3) = f(4) = 2$ , perciò

$$\mathbb{E}[f(X_1)|\text{staz.}] = 1\frac{1}{8} + 3\frac{3}{8} + 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

(4) Usiamo la formula di Bayes:

$$P(X_1 = 1|\text{staz.} \cap X_3 \in \{3, 4\}) = P(X_3 \in \{3, 4\}|\text{staz.} \cap \{X_1 = 1\}) \frac{P(X_1 = 1|\text{staz.})}{P(X_3 \in \{3, 4\}|\text{staz.})}.$$

Calcoliamo

$$P(X_3 \in \{3, 4\}|\text{staz.} \cap \{X_1 = 1\}) = P(X_3 \in \{3, 4\}|X_2 = 2) = \frac{2}{3},$$

$$P(X_3 \in \{3, 4\}|\text{staz.}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

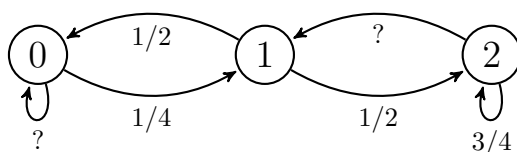
$$P(X_1 = 1|\text{staz.}) = \frac{1}{8}.$$

Di conseguenza

$$P(X_1 = 1|\text{staz.} \cap X_3 \in \{3, 4\}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

### Problema 7

La ventola di raffreddamento di un computer può girare a tre velocità: 0 (spenta), 1 o 2. Si propone un modello basato sulla catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  rappresentata graficamente in figura:



1. Scrivere la matrice di transizione  $Q$  della catena descritta sopra (completare eventualmente le probabilità mancanti). Calcolare la legge della variabile  $X_3 \in \{0, 1, 2\}$ , sapendo che  $X_0 = 1$ .
2. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti di  $Q$ . Nel caso in cui la catena  $(X_n)_{n \geq 0}$  sia stazionaria, calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria  $f(X_{100})$  dove  $f(n) = n^2$ , per  $n \in \{0, 1, 2\}$ .
3. Sapendo che la ventola si trova nello stato 0 (spenta) sia al tempo 0 che al tempo 3, qual è la probabilità che sia rimasta spenta anche nei tempi 1 e 2?

**Una soluzione:**

1) Ordiniamo gli stati nel modo naturale: 0, 1, 2. La matrice di transizione  $Q$  risulta

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Possiamo ottenere la legge di  $X_3$  direttamente come vettore riga, calcolando  $(0, 1, 0) \cdot Q^3$ .

Vale

$$(0, 1, 0) \cdot Q^3 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \cdot Q^2 = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)Q = \left(\frac{13}{16}, \frac{3}{16}, \frac{13}{32}\right).$$

Da cui  $P(X_3 = 0|X_0 = 1) = P(X_3 = 0|X_0 = 1) = \frac{13}{32}$ ,  $P(X_3 = 1|X_0 = 1) = \frac{3}{16}$ .

2) Per calcolare le distribuzioni invarianti di  $Q$ , risolviamo prima il sistema lineare  $(Q^T - I)x = 0$ . In forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui tutte le soluzioni sono della forma  $t(1, 1/2, 1)$ , per  $t \in \mathbb{R}$ . Ne segue che l'unica distribuzione invariante è

$$\bar{\mu} = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Nel caso in cui la catena sia stazionaria, le variabili aleatorie  $X_n$  hanno tutte la medesima legge (individuata dalla distribuzione invariante), quindi qualunque sia  $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ , vale

$$\mathbb{E}[f(X_{100})|\text{staz.}] = f(0)\frac{2}{5} + f(1)\frac{1}{5} + f(2)\frac{2}{5}.$$

Nel caso  $f(n) = n^2$ , troviamo

$$\mathbb{E}[f(X_{100})|\text{staz.}] = 0^2 \cdot \frac{2}{5} + 1^2 \cdot \frac{1}{5} + 2^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{5}.$$

Per calcolare la varianza, calcoliamo prima

$$\mathbb{E}[X_{100}^4|\text{staz.}] = 0^4 \cdot \frac{2}{5} + 1^4 \cdot \frac{1}{5} + 2^4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{33}{5},$$

da cui

$$\text{Var } X_{100}^2|\text{staz.} = \frac{33}{5} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = 3,36.$$

3) È richiesto di calcolare

$$P(X_1 = 0 \text{ e } X_2 = 0 | X_0 = 0 \text{ e } X_3 = 0).$$

Usando la formula di Bayes

$$P(A|I \cap B) = P(B|I \cap A) \frac{P(A|I)}{P(B|I)},$$



con  $A = \{X_1 = 0 \text{ e } X_2 = 0\}$ ,  $I = \{X_0 = 0\}$ ,  $B = \{X_3 = 0\}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} P(A|I \cap B) &= P(X_3 = 0|X_0 = 0, X_1 = 0 \text{ e } X_2 = 0) \frac{P(X_1 = 0 \text{ e } X_2 = 0|X_0 = 0)}{P(X_3 = 0|X_0 = 0)} \\ &= P(X_3 = 0|X_2 = 0) \frac{P(X_2 = 0|X_1 = 0)P(X_1 = 0|X_0 = 0)}{P(X_3 = 0|X_0 = 0)} \\ &= \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{39} \sim 0,7 \end{aligned}$$

avendo calcolato  $P(X_3 = 0|X_0 = 0) = \frac{39}{4^3}$  come nel primo punto del problema: ossia calcolando  $(1, 0, 0) \cdot Q^3$ . Vale

$$(1, 0, 0) \cdot Q^3 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right) \cdot Q^2 = \left(\frac{11}{4^2}, \frac{3}{4^2}, \frac{1}{8}\right)Q = \left(\frac{39}{4^3}, \frac{13}{4^3}, \frac{12}{4^3}\right).$$

### Problema 8

Una ventola di raffreddamento può girare a 3 velocità (indicate 0, 1, 2). Un semplice modello prevede che segua una di Markov la cui matrice di transizione  $Q_{ij} = P(X_1 = j|X_0 = i)$  è

$$Q = \begin{pmatrix} ? & 1/3 & 0 \\ 1/3 & ? & 1/3 \\ 1/3 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

Inoltre si sa che il costo di mantenere la ventola nello stato  $i \in \{0, 1, 2\}$  è dato da  $c(i) = i^4$ .

1. Completare le componenti mancanti di  $Q$  e dare una rappresentazione grafica della catena. Trovare tutte le distribuzioni invarianti di  $Q$ , calcolare valore atteso e la varianza di  $c(X_{10})$  nel caso in cui sia stazionaria.
2. Supponendo inizialmente che la catena sia stazionaria, si osserva poi che  $X_1 = 2$  e  $X_3 = 2$ . Dopo queste osservazioni, come cambia la legge di  $X_0$ ?
3. Sapendo che al tempo 0 e al tempo 4 la ventola si trova nello stato 1, qual è la probabilità che non si sia mai spostata dallo stato 1 in tutti i tempi 1, 2 e 3?

### Una soluzione:

1. Completiamo  $Q$  in modo che le somme delle righe diano tutte 1.

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Per trovare le distribuzioni invarianti di  $Q$ , risolviamo il sistema lineare corrispondente a  $Q^t - I$ , ossia

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui tutte le soluzioni sono della forma  $(2t, t, t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Imponendo che la somma delle componenti deve valere 1, si trova l'unica distribuzione invariante  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ . Calcoliamo infine

$$E[c(X_{10})|\text{staz.}] = E[c(X_0)|\text{staz.}] = 0^4 \cdot \frac{1}{2} + 1^4 \cdot \frac{1}{4} + 2^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 4 = 4, 25.$$

Per la varianza:

$$E[(c(X_{10}))^2|\text{staz.}] = 0^8 \cdot \frac{1}{2} + 1^8 \cdot \frac{1}{4} + 2^8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 2^6 = 64, 25.$$

da cui

$$\text{Var}(c(X_{10})|\text{staz.}) = 64, 25 - 18, 0625 = 46, 1875.$$

2. Dobbiamo calcolare, per  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,

$$\begin{aligned} P(X_0 = i|\text{staz.} \cap \{X_1 = 2\} \cap \{X_3 = 2\}) &= \\ &= \frac{P(\{X_1 = 2\} \cap \{X_3 = 2\}|\text{staz.} \cap \{X_0 = i\}) P(X_0 = i|\text{staz.})}{P(\{X_1 = 2\} \cap \{X_3 = 2\}|\text{staz.})} \end{aligned}$$

avendo usato la formula di Bayes. Poniamo  $(p_0, p_1, p_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  la distribuzione invariante trovata nel punto precedente. Allora vale

$$\begin{aligned} P(\{X_1 = 2\} \cap \{X_3 = 2\}|\text{staz.} \cap \{X_0 = i\}) &= P(\{X_1 = 2\} \cap \{X_3 = 2\}|\{X_0 = i\}) \\ &= Q_{i2}P(X_2 = 2|X_0 = 2) = Q_{i2}(Q^2)_{22}, \end{aligned}$$

$$P(\{X_1 = 2\} \cap \{X_3 = 2\}|\text{staz.}) = (Q^2)_{22} \sum_{j=0}^2 Q_{j2}p_j = (Q^2)_{22} \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \right).$$

In conclusione, troviamo le probabilità

$$P(X_0 = 0|\text{staz.} \cap \{X_1 = 2\} \cap \{X_3 = 2\}) = 0$$

$$P(X_0 = 1|\text{staz.} \cap \{X_1 = 2\} \cap \{X_3 = 2\}) = \frac{1}{3}$$

$$P(X_0 = 2|\text{staz.} \cap \{X_1 = 2\} \cap \{X_3 = 2\}) = \frac{2}{3}.$$

3. Scriviamo la probabilità richiesta come

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1|X_0 = 1, X_4 = 1) &= \\ &= \frac{P(X_4 = 1|X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1|X_0 = 1)}{P(X_4 = 1|X_0 = 1)}. \end{aligned}$$

avendo usato la formula di Bayes. Si tratta ora di calcolare le tre probabilità separatamente:

$$P(X_4 = 1|X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = P(X_4 = 1|X_3 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1|X_0 = 1) &= P(X_1 = 1|X_0 = 1) P(X_2 = 1|X_1 = 1) P(X_3 = 1|X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{3^3}. \end{aligned}$$

Infine, per calcolare  $P(X_4 = 1 | X_0 = 1)$  usiamo ad esempio le potenze della matrice  $Q$ , ossia calcoliamo  $Q^4$ . Un modo veloce può essere ad esempio il calcolo di  $Q^2$

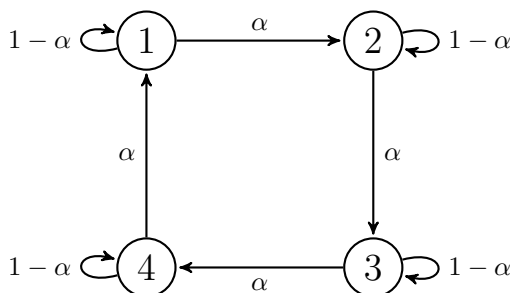
$$Q^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

e poi calcolare solamente la componente  $(Q^4)_{11}$  (attenzione che le componenti sono numerate  $\{0, 1, 2\}$ ) scrivendo  $Q^4 = Q^2 Q^2$ . Si trova quindi  $\frac{19}{34}$ . Perciò si conclude che

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1 | X_0 = 1, X_4 = 1) = \frac{1}{19}.$$

### Problema 9

Un drone è programmato per sorvolare quattro regioni (numerate 1, 2, 3, 4) seguendo una catena di Markov schematizzata come segue, dove  $\alpha \in [0, 1]$  è un parametro fissato.



1. Per ogni  $\alpha \in [0, 1]$ , scrivere la matrice di transizione  $Q$  della catena descritta sopra e, per ogni  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , calcolare la probabilità che al tempo  $k$  il drone si trovi in una posizione dispari (ossia  $X_k \in \{1, 3\}$ ), sapendo che al tempo 0 si trova nello stato 1.
2. Per ogni  $\alpha \in [0, 1]$ , trovare tutte le distribuzioni invarianti di  $Q$ . Per ogni  $\alpha \in (0, 1]$ , nel caso in cui la catena di Markov sia stazionaria, è più probabile che il drone all'istante 100 si trovi in una posizione dispari o pari?
3. Fissato  $\alpha = \frac{1}{2}$ , supponendo che la catena di Markov sia stazionaria e che all'istante 4 il drone si trovi in una posizione dispari, ossia  $X_4 \in \{1, 3\}$ , qual è la probabilità che al tempo 0 si trovi nella posizione 1? Come cambia la probabilità dello stesso evento se si suppone che la catena sia stazionaria e che all'istante 4 si trovi nella posizione 1? è maggiore o minore?

### Una soluzione:

1. La matrice di transizione è

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Per calcolare le probabilità richieste, troviamo prima  $(1, 0, 0, 0) \cdot Q^k$  per  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ :

$$\begin{aligned}(1, 0, 0, 0) \cdot Q &= (1 - \alpha, \alpha, 0, 0) \\(1, 0, 0, 0) \cdot Q^2 &= (1 - \alpha, \alpha, 0, 0) \cdot Q = ((1 - \alpha)^2, 2\alpha(1 - \alpha), \alpha^2, 0) \\(1, 0, 0, 0) \cdot Q^3 &= ((1 - \alpha)^3, 3\alpha(1 - \alpha)^2, 3\alpha^2(1 - \alpha), \alpha^3), \\(1, 0, 0, 0) \cdot Q^4 &= ((1 - \alpha)^4 + \alpha^4, 4\alpha(1 - \alpha)^3, 6\alpha^2(1 - \alpha)^2, 4\alpha^3(1 - \alpha)).\end{aligned}$$

Per trovare le probabilità richieste basta sommare la prima e la terza componente di ciascun vettore trovato:

$$\begin{aligned}P(X_1 \text{ dispari} | X_0 = 1) &= 1 - \alpha, & P(X_2 \text{ dispari} | X_0 = 1) &= (1 - \alpha)^2 + \alpha^2, \\P(X_3 \text{ dispari} | X_0 = 1) &= (1 - \alpha)^3 + 3\alpha^2(1 - \alpha) \\P(X_4 \text{ dispari} | X_0 = 1) &= (1 - \alpha)^4 + \alpha^4 + 6\alpha^2(1 - \alpha)^2.\end{aligned}$$

2. Dobbiamo risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice  $Q^T - I$ , ossia

$$\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Se  $\alpha = 0$ , otteniamo la matrice nulla, quindi le distribuzioni invarianti sono infinite: ogni vettore  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$  con  $\mu_i \in [0, 1]$  e  $\sum_{i=1}^4 \mu_i = 1$  è una distribuzione invariante. Se invece  $\alpha \neq 0$ , possiamo dividere ogni riga per  $\alpha$  e trovare la matrice equivalente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che tutte le soluzioni sono della forma  $t(1, 1, 1, 1)$  per  $t \in \mathbb{R}$ . L'unica distribuzione invariante è quindi  $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$ . La probabilità che al tempo  $k$  (in particolare  $k = 100$ ) la catena stazionaria si trovi in una posizione pari è  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ , e quindi vale  $\frac{1}{2}$  anche la probabilità che si trovi in una posizione dispari.

3. La formula di Bayes implica

$$\begin{aligned}P(X_0 = 1 | \text{staz. e } X_4 \text{ dispari}) &= \frac{P(X_4 \text{ dispari} | \text{staz. e } X_0 = 1)P(X_0 = 1 | \text{staz.})}{P(X_4 \text{ dispari} | \text{staz.})} \\ &= \frac{((1 - \alpha)^4 + \alpha^4 + 6\alpha^2(1 - \alpha)^2) \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} ((1 - \alpha)^4 + \alpha^4 + 6\alpha^2(1 - \alpha)^2) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

nel caso  $\alpha = 1/2$ . Per la seconda domanda, troviamo similmente

$$\begin{aligned}P(X_0 = 1 | \text{staz. e } X_4 = 1) &= \frac{P(X_4 = 1 | \text{staz. e } X_0 = 1)P(X_0 = 1 | \text{staz.})}{P(X_4 = 1 | \text{staz.})} \\ &= \frac{((1 - \alpha)^4 + \alpha^4) \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = (1 - \alpha)^4 + \alpha^4 = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

nel caso  $\alpha = 1/2$ .

### Problema 10

Il *PageRank* è un metodo introdotto da Google per stabilire un ordinamento di “importanza” tra le pagine web, essenzialmente basato sulla distribuzione invariante di una catena di Markov il cui insieme degli stati sono le pagine web e le probabilità di transizione sono ottenute dai collegamenti tra le pagine: maggiore è la probabilità della pagina rispetto alla distribuzione invariante, più importante è la pagina. Per capirne il funzionamento consideriamo una versione semplificata in cui vi sono quattro stati  $\{1, 2, 3, 4\}$  e la matrice di transizione  $(Q_{ij})_{i,j=1}^4$  è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Dare una rappresentazione grafica della catena, mostrare che c'è solamente una distribuzione invariante  $(\mu_i)_{i=1}^4$ , trovarla e infine riordinare gli stati in modo tale che il vettore distribuzione invariante abbia componenti decrescenti. Quale pagina risulta “più importante” tra la 1 e la 3?
2. Supponendo che la catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  sia stazionaria, qual è la probabilità dell'evento  $\{X_0 = 4\} \cap \{X_2 = 4\}$ ?
3. Posta  $f(i) := \frac{1}{\mu_i}$ , dove  $(\mu_i)_{i=1}^4$  è la distribuzione invariante trovata sopra, calcolare il valore atteso e la varianza di  $f(X_2)$ , nel caso in cui la catena sia stazionaria.

### Una soluzione:

1. Calcoliamo gli autovettori di autovalore 1 per  $Q^T$ , riducendo a gradini la matrice  $Q^T - I$ ,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & -1 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & -3 & 0 \\ 1 & 3/2 & 3 & -3/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & -3 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -6 & 3/2 \\ 0 & 0 & 6 & -3/2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo trovato i vettori  $(t/2, t/6, t/4, t)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . La (unica) distribuzione invariante si trova imponendo che la somma delle componenti sia 1, da cui  $t = 12/23$  e  $\mu = \frac{1}{23}(6, 2, 3, 12)$ . L'ordinamento degli stati, come richiesto, diventa  $\{4, 1, 3, 2\}$  e la pagina 1 è più importante della pagina 3.

2. Calcoliamo, considerando il sistema di alternative  $\{X_0 = i\}$ , per  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$\begin{aligned} P(X_0 = 4 \text{ e } X_2 = 4 | \text{staz.}) &= P(X_2 = 4 | \text{staz. e } X_0 = 4)P(X_0 = 4 | \text{staz.}) \\ &= (Q^2)_{44} \cdot \frac{12}{23} \quad \text{usando la proprietà di Markov.} \\ &= \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \frac{12}{23} = \frac{5}{12} \cdot \frac{12}{23} = \frac{5}{23} \end{aligned}$$

3. Calcoliamo il valore atteso

$$\mathbb{E}[f(X_2) | \text{staz.}] = \sum_{i=1}^4 f(i)P(X_2 = i | \text{staz.}) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\mu_i} \cdot \mu_i = 4.$$

Per la varianza, invece calcoliamo prima il valore atteso di  $f(X_2)^2$ :

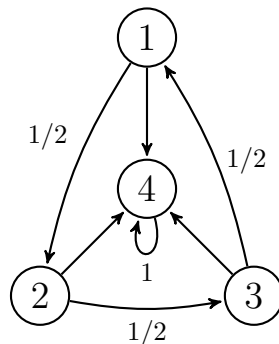
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_2)^2 | \text{staz.}] &= \sum_{i=1}^4 f(i)^2 P(X_2 = i | \text{staz.}) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\mu_i^2} \cdot \mu_i = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\mu_i} \\ &= \frac{23}{12}(2 + 6 + 4 + 1) = 23 \cdot \frac{13}{12} \approx 25 \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{Var}(f(X_2) | \text{staz.}) = 23 \cdot \frac{13}{12} - 4^2 \approx 25 - 16 = 9.$$

### Problema 11

Si consideri una catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  con insieme degli stati  $\{1, 2, 3, 4\}$  e matrice di transizione rappresentata in figura. Supponiamo inoltre che la distribuzione iniziale della catena sia  $P(X_0 = 1 | \Omega) = P(X_0 = 2 | \Omega) = P(X_0 = 3 | \Omega) = 1/3$ .



1. Scrivere la matrice di transizione  $Q$  eventualmente specificando probabilità di transizione mancanti. Calcolare tutte le distribuzioni invarianti associate.
2. Calcolare  $P(X_n = 4 | \Omega)$ , per ogni  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ , e

$$P(X_1 \neq 4, X_2 \neq 4, X_3 \neq 4 | \Omega).$$

3. Supponendo di osservare che  $X_2 \in \{3, 4\}$ , qual è la probabilità che sia  $X_1 = 4$ ? e supponendo di osservare che  $X_2 \in \{2, 3, 4\}$ ? È più probabile sia  $X_1 = 4$  o  $X_1 \neq 4$ ?

4. Calcolare

$$P(X_1 \neq 4, X_2 \neq 4, X_3 \neq 4 | X_0 \in \{3, 4\}).$$

**Una soluzione:**

1. Ordiniamo gli stati  $\{1, 2, 3, 4\}$  e scriviamo la matrice di transizione

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare gli autovettori di autovalore 1 di  $Q^T$ , riduciamo a gradini  $Q^T - I$ ,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \\ \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -7/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui l'unica distribuzione invariante è  $(0, 0, 0, 1)$ .

2. Notiamo intanto che  $P(X_0 = 4 | \Omega) = 0$ , perchè  $P(X_0 \in \{1, 2, 3\} | \Omega) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ . Per calcolare  $P(X_n = 4 | \Omega)$ ,  $n \in \{1, 2, 3\}$ , ci basta considerare il vettore riga  $\mu_0 = (1/3, 1/3, 1/3, 0)$  e calcolare  $\mu_0 Q^n$ . Si trova quindi

$$\begin{aligned} \mu_0 Q &= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) \\ \mu_0 Q^2 &= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) Q = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{4}\right) \\ \mu_0 Q^3 &= \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{4}\right) Q = \left(\frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{7}{8}\right). \end{aligned}$$

da cui  $P(X_1 = 4 | \Omega) = \frac{1}{2}$ ,  $P(X_2 = 4 | \Omega) = \frac{3}{4}$ ,  $P(X_3 = 4 | \Omega) = \frac{7}{8}$ . Per calcolare la seconda probabilità, possiamo ragionare in due modi: nel primo modo, usiamo il sistema di alternative  $X_0 = i$ , per  $i \in \{1, 2, 3\}$ , per cui

$$P(X_1 \neq 4, X_2 \neq 4, X_3 \neq 4 | \Omega) = \sum_{i=1}^3 P(X_1 \neq 4, X_2 \neq 4, X_3 \neq 4 | X_0 = i) \frac{1}{3}.$$

Consideriamo ad esempio il caso  $i = 1$ : sapendo che  $X_0 = 1$ , l'unica possibilità per realizzare l'evento  $\{X_1 \neq 4, X_2 \neq 4, X_3 \neq 4\}$  è di seguire il cammino  $X_1 = 2$ ,  $X_2 = 3$ ,  $X_3 = 1$ , per cui usando la proprietà di Markov

$$P(X_1 \neq 4, X_2 \neq 4, X_3 \neq 4 | X_0 = 1) = P(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 1 | X_1 = 1) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Allo stesso modo si vede che le altre probabilità sono  $1/8$  e quindi la probabilità richiesta è pure  $1/8$ . Nel secondo modo, notiamo che l'evento complementare

$$\Omega \setminus \{X_1 \neq 4, X_2 \neq 4, X_3 \neq 4\} = \{X_1 = 4\} \cup \{X_2 = 4\} \cup \{X_3 = 4\}$$

consiste dell'unione di tre eventi che dal punto di vista della probabilità sono uno "contenuto" nell'altro: infatti se la catena si trova al tempo 1 in 4, necessariamente si trova anche al tempo 2 in 4 e pure al tempo 3. Precisamente si ha

$$P(\{X_1 = 4\} \setminus \{X_2 = 4\} | \Omega) = P(\{X_2 = 4\} \setminus \{X_3 = 4\} | \Omega) = 0.$$

Questo ci permette di concludere che la probabilità dell'unione è semplicemente la probabilità dell'evento  $X_3 = 4$ , ossia  $P(X_3 = 4 | \Omega) = 7/8$  calcolata prima, e quindi la probabilità richiesta è  $1/8$ .

3. Calcoliamo usando la formula di Bayes

$$\begin{aligned} P(X_1 = 4 | \Omega \cap \{X_2 \in \{3, 4\}\}) &= \frac{P(X_2 \in \{3, 4\} | \Omega \cap \{X_1 = 4\})P(X_1 = 4 | \Omega)}{P(X_2 \in \{3, 4\} | \Omega)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{12} + \frac{3}{4}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

avendo usato i calcoli del punto precedente. Ripetendo lo stesso calcolo condizionando rispetto a  $X_2 \in \{2, 3, 4\}$ , si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 = 4 | \Omega \cap \{X_2 \in \{2, 3, 4\}\}) &= \frac{P(X_2 \in \{2, 3, 4\} | \Omega \cap \{X_1 = 4\})P(X_1 = 4 | \Omega)}{P(X_2 \in \{2, 3, 4\} | \Omega)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{12} + \frac{3}{4}} = \frac{6}{11}. \end{aligned}$$

Si vede che è sempre più probabile che sia  $X_1 = 4$ , visto che il numeratore di Bayes è  $1/2$  e il denominatore è  $< 1$ .

4. Ragionando come al punto 2 (secondo modo), possiamo prima calcolare la probabilità del complementare, e siccome il ragionamento di prima vale ancora, perché gli eventi  $\{X_1 = 4\}$ ,  $\{X_2 = 4\}$ ,  $\{X_3 = 4\}$  sono contenuti l'uno nell'altro anche aggiungendo l'informazione  $X_2 \in \{3, 4\}$ . Basta quindi calcolare

$$\begin{aligned} P(X_3 = 4 | X_2 \in \{3, 4\}) &= P(X_3 = 4 | X_2 = 3)P(X_2 = 3 | X_2 \in \{3, 4\}) \\ &\quad + P(X_3 = 4 | X_2 = 4)P(X_2 = 4 | X_2 \in \{3, 4\}) \\ &= \frac{1}{2}P(X_2 = 3 | X_2 \in \{3, 4\}) + P(X_2 = 4 | X_2 \in \{3, 4\}). \end{aligned}$$

Usando la formula di Bayes

$$\begin{aligned} P(X_2 = 3 | X_2 \in \{3, 4\}) &= \frac{P(X_2 \in \{3, 4\} | X_2 = 3)P(X_2 = 3 | \Omega)}{P(X_2 \in \{3, 4\} | \Omega)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{10} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$



e similmente (in realtà questo calcolo non servirebbe, visto che le due probabilità sommano a 1)

$$P(X_2 = 4|X_2 \in \{3, 4\}) = \frac{P(X_2 \in \{3, 4\}|X_2 = 4)P(X_2 = 4|\Omega)}{P(X_2 \in \{3, 4\})|\Omega)} \\ = \frac{1 \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{12} + \frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{10} = \frac{9}{10}.$$

Pertanto troviamo che

$$P(X_3 = 4|X_2 \in \{3, 4\}) = \frac{1}{20} + \frac{9}{10} = \frac{19}{20},$$

e quindi la probabilità richiesta vale  $1/20$ .

### Problema 12

Due autobus (1 e 2) della stessa tratta arrivano alla stessa fermata in due tempi, rispettivamente  $X_1$  e  $X_2$ , distribuiti come variabili continue indipendenti e uniformi:  $X_1$  nell'intervallo di tempo dalle 16:00 alle 16:40 e  $X_2$  nell'intervallo dalle 16:30 alle 17:00.

1. Sia  $N$  il numero dei bus che passano nell'intervallo di tempo dalle 16:30 alle 16:45. Qual è la legge di  $N$ ? Qual è il valore atteso e la varianza di  $N$ ?
2. Sapendo che arriva esattamente un autobus nell'intervallo di tempo dalle 16:30 alle 16:45, qual è la probabilità che questo sia l'autobus 1?
3. (*Facoltativo*) persona arriva alla fermata alle 16:30 in punto. Qual è la funzione di ripartizione della variabile aleatoria "tempo (in minuti) che la persona attende alla fermata"?

#### Una soluzione:

Invece di lavorare con  $X_1$ ,  $X_2$ , poniamo  $T_1 := X_1 - 16:00$ ,  $T_2 := X_2 - 16:30$ , che esprimono i rispettivi ritardi in minuti, rispetto agli orari (potremmo pensare che il bus 1 dovrebbe passare alle 16:00 e il 2 alle 16:30).  $T_1$  è uniforme su  $[0, 40]$  e  $T_2$  su  $[0, 30]$ , rispetto all'informazione iniziale.

1. La variabile  $N$  assume valori in  $\{0, 1, 2\}$ . L'evento  $\{N = 0\}$  coincide con  $\{T_1 < 30\} \cap \{T_2 > 15\}$ , da cui calcoliamo

$$P(N = 0|\Omega) = P(T_1 < 30 \text{ e } T_2 > 15|\Omega) = P(T_1 < 30|\Omega)P(T_2 > 15|\Omega) \\ = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{30} = \frac{3}{8}.$$

L'evento  $N = 2$  coincide con  $\{T_1 \geq 30\} \cap \{T_2 \leq 15\}$ , quindi

$$P(N = 2|\Omega) = P(T_1 \geq 30 \text{ e } T_2 \leq 15|\Omega) = P(T_1 \geq 30|\Omega)P(T_2 \leq 15|\Omega) \\ = \frac{1}{4} \cdot \frac{15}{30} = \frac{1}{8}.$$

Di conseguenza  $P(N = 1|\Omega) = \frac{1}{2}$ . Infine

$$\mathbb{E}[N|\Omega] = \frac{1}{2} + 2\frac{1}{8} = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{E}[N^2|\Omega] = \frac{1}{2} + 4\frac{1}{8} = 1, \quad \text{Var}(N|\Omega) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

2. Poiché assumiamo l'informazione che arrivi esattamente un autobus nell'intervallo, basta calcolare la probabilità condizionata a  $N = 1$  dell'evento "arriva solamente l'autobus 1 nell'intervallo dalle 16:30 alle 16:45", il quale si scrive come  $\{T_1 \geq 30\} \cap \{T_2 > 15\}$ . Calcoliamo quindi con la formula di Bayes

$$\begin{aligned} P(T_1 \geq 30 \text{ e } T_2 > 15 | N = 1) &= P(N = 1 | T_1 \geq 30 \text{ e } T_2 > 15) \frac{P(T_1 \geq 30 \text{ e } T_2 > 15 | \Omega)}{P(N = 1 | \Omega)} \\ &= 1 \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

3. Possiamo scrivere il tempo (in minuti) che la persona attende alla fermata come  $T = \min\{T_1 - 30, T_2\}$  nell'evento  $T_1 \geq 30$ , e  $T = T_2$  nell'evento  $T_1 < 30$  (la persona ha perso l'autobus 1 e deve per forza aspettare il 2). Per calcolare la funzione di ripartizione di  $T$  è più comodo calcolarne prima la funzione di sopravvivenza (ricordiamo che per una variabile uniforme sull'intervallo  $[0, a]$ , essa vale  $G(t) = (1 - t/a)^+$  per  $t \geq 0$ ,  $G(t) = 1$  per  $t < 0$ ).

Notiamo che per  $t < 0$ ,  $P(T > t) = 1$ . Quindi, per  $t \geq 0$ , se decomponiamo secondo le alternative  $\{T_1 \geq 30\}$ ,  $\{T_1 < 30 | \Omega\}$ :

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(T > t | T_1 \geq 30) P(T_1 \geq 30 | \Omega) + P(T > t | T_1 < 30) P(T_1 < 30 | \Omega) \\ &= P(\min\{(T_1 - 30), T_2\} > t | T_1 \geq 30) P(T_1 \geq 30) + P(T_2 > t) P(T_1 < 30) \\ &= P(T_1 > 30 + t, T_2 > t | T_1 \geq 30) P(T_1 \geq 30 | \Omega) + \left(1 - \frac{t}{40}\right)^+ \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Se  $t \geq 10$ , allora  $P(T_1 > 30 + t, T_2 > t | T_1 \geq 30) = 0$ , perché sicuramente  $T_1 \leq 40$ . Inoltre, se  $t \in [0, 10)$ ,

$$\begin{aligned} P(T_1 > 30 + t, T_2 > t | T_1 \geq 30) P(T_1 \geq 30 | \Omega) &= P(T_1 > 30 + t, T_2 > t) \\ &= P(T_1 > 30 + t) P(T_2 > t | \Omega) = \left(1 - \frac{30 + t}{40}\right)^+ \left(1 - \frac{t}{40}\right)^+. \end{aligned}$$

In conclusione, per  $t \geq 0$ ,

$$P(T \leq t | \Omega) = 1 - \left[ \left(1 - \frac{30 + t}{40}\right)^+ \left(1 - \frac{t}{40}\right)^+ + \left(1 - \frac{t}{40}\right)^+ \frac{3}{4} \right].$$

### Problema 13

Un'azienda produce componenti elettronici, per lo più funzionanti, ma alcuni sono difettosi. Si sa che il 90% dei componenti sono funzionanti, mentre il 10% difettosi. Per riconoscere se

un componente è difettoso si può procedere in due modi: misurandone la resistenza oppure verificando il suo tempo di vita (funzionamento dal primo utilizzo). Se il componente è senza difetti, allora la sua resistenza  $R$  (in una qualche unità di misura) è rappresentata da una variabile aleatoria gaussiana<sup>1</sup>  $\mathcal{N}(10, 1)$  e il tempo di vita  $T$  (in una certa unità di misura) è una variabile esponenziale di parametro  $1/5$  (inoltre assumiamo che  $R$  e  $T$  siano indipendenti). Se il componente è con difetti, la resistenza è invece una gaussiana  $\mathcal{N}(10, 4)$ , mentre  $T$  è esponenziale di parametro  $1$  (e  $R$  e  $T$  sono indipendenti). Ci viene consegnato un componente, per verificare se è difettoso.

1. Calcolare il valore atteso e la varianza di  $R$  e di  $T$ , rispetto all'informazione iniziale.
2. Si misura la resistenza del componente, che vale 8. Come cambia la probabilità che sia difettoso?
3. Supponiamo invece di aver misurato solamente il tempo di vita (e non la resistenza) e di scoprire che esattamente al tempo 1 il componente smette di funzionare. Come cambierebbe la probabilità che sia difettoso?
4. Dopo aver misurato la resistenza del componente, che vale 8, si decide di misurare il suo tempo di vita. Sapendo che dopo un tempo 1 il componente funziona ancora, qual è la probabilità che sia difettoso?

**Una soluzione:**

(1) Poniamo  $D$  l'evento "il pezzo è difettoso". Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R|\Omega] &= \mathbb{E}[R|\Omega \cap D] P(D|\Omega) + \mathbb{E}[R|\Omega \cap D^c] P(D^c|\Omega) \\ &= 10 \cdot 10\% + 10 \cdot 90\% = 10,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R^2|\Omega] &= \mathbb{E}[R^2|\Omega \cap D] P(D|\Omega) + \mathbb{E}[R^2|\Omega \cap D^c] P(D^c|\Omega) \\ &= \left(\text{Var}(R|D) + (\mathbb{E}[R|D])^2\right) \cdot 10\% + \left(\text{Var}(R|D^c) + (\mathbb{E}[R|D^c])^2\right) \cdot 90\% \\ &= (4 + 100) \cdot 10\% + (1 + 100) \cdot 90\% = \frac{13}{10} + 100\end{aligned}$$

da cui

$$\text{Var}(R|\Omega) = \frac{13}{10} + 100 - 10^2 = \frac{13}{10} = 1,3.$$

Similmente, calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T|\Omega] &= \mathbb{E}[T|\Omega \cap D] P(D|\Omega) + \mathbb{E}[T|\Omega \cap D^c] P(D^c|\Omega) \\ &= 1 \cdot 10\% + 5 \cdot 90\% = 4,6\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T^2|\Omega] &= \mathbb{E}[T^2|\Omega \cap D] P(D|\Omega) + \mathbb{E}[T^2|\Omega \cap D^c] P(D^c|\Omega) \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 10\% + 2 \cdot 25 \cdot 90\% = \frac{1}{5} + 45,\end{aligned}$$

da cui

$$\text{Var}(T|\Omega) = \frac{2}{10} + 45 - (4,6)^2 = 24,04.$$

<sup>1</sup>Non preoccupatevi del fatto che una resistenza negativa non abbia senso, la probabilità è molto piccola!

(2) Usiamo la formula di Bayes (caso continuo/discreto)

$$P(D|\Omega \cap \{R = 8\}) = \varrho(R = 8|\Omega \cap D) \frac{P(D|\Omega)}{\varrho(R = 8|\Omega)},$$

e calcoliamo ( $P(D|\Omega) = 10\%$ ),

$$\varrho(R = 8|\Omega \cap D) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{8-10}{2}\right)^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}4},$$

$$\varrho(R = 8|\Omega \cap D^c) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{8-10}{1}\right)^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}1},$$

da cui

$$\varrho(R = 8|\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-2) \frac{9}{10}.$$

Quindi i fattori  $1/\sqrt{2\pi}$  si semplificano e troviamo

$$P(D|\Omega \cap \{R = 8\}) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}}{\exp(-\frac{1}{2}) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \exp(-2) \frac{9}{10}} = \frac{1}{1 + 18 \cdot \exp(-3/2)} \sim 0,2,$$

quindi la probabilità che sia difettoso è raddoppiata.

(3) Stavolta dobbiamo calcolare  $P(D|\Omega \cap \{T = 1\})$ . Procediamo al solito modo

$$P(D|\Omega \cap \{T = 1\}) = \varrho(T = 1|\Omega \cap D) \frac{P(D|\Omega)}{\varrho(T = 1|\Omega)},$$

dove

$$\varrho(T = 1|\Omega \cap D) = e^{-1}, \quad \varrho(T = 1|\Omega \cap D^c) = \frac{1}{5} e^{-1/5},$$

e quindi

$$\varrho(T = 1|\Omega) = e^{-1} \frac{1}{10} + \frac{1}{5} e^{-1/5} \frac{9}{10}.$$

Troviamo allora

$$P(D|\Omega \cap \{T = 1\}) = \frac{e^{-1} \frac{1}{10}}{e^{-1} \frac{1}{10} + \frac{1}{5} e^{-1/5} \frac{9}{10}} = \frac{1}{1 + e^{4/5} \frac{9}{5}} \sim 0.2.$$

(4) Dobbiamo calcolare  $P(D|\Omega \cap \{R = 8\} \cap \{T > 1\})$ . A tale scopo usiamo la formula di Bayes con l'informazione  $\Omega \cap \{R = 8\}$ , per cui

$$P(D|\Omega \cap \{R = 8\} \cap \{T > 1\}) = P(T > 1|\Omega \cap \{R = 8\} \cap D) \frac{P(D|\Omega \cap \{R = 8\})}{P(T > 1|\Omega \cap \{R = 8\})},$$

dove il denominatore si può calcolare come

$$P(T > 1|\Omega \cap \{R = 8\}) = P(T > 1|\Omega \cap \{R = 8\} \cap D) P(D|\Omega \cap \{R = 8\}) \\ + P(T > 1|\Omega \cap \{R = 8\} \cap D^c) P(D^c|\Omega \cap \{R = 8\}).$$

Dal testo abbiamo visto, che, se sappiamo che il pezzo è difettoso (oppure che non lo è)  $R$  e  $T$  sono indipendenti, quindi

$$P(T > 1|\Omega \cap \{R = 8\} \cap D) = P(T > 1|\Omega \cap D) = e^{-1},$$

usando il fatto che  $T$  è  $\mathcal{E}(1)$  se vale  $D$ . Similmente

$$P(T > 1 | \Omega \cap \{R = 8\} \cap D^c) = P(T > 1 | \Omega \cap D^c) = e^{-1/5}.$$

Usando il punto precedente approssimiamo  $P(D | \Omega \cap \{R = 8\}) \sim 0,2$  e  $P(D^c | \Omega \cap \{R = 8\}) \sim 0,8$ . Possiamo calcolare

$$P(D | \Omega \cap \{R = 8\} \cap \{T > 1\}) \sim \frac{e^{-1}0,2}{e^{-1}0,2 + e^{-1/5}0,8} = \frac{1}{1 + 4 \cdot e^{4/5}} \sim 0,1,$$

quindi la probabilità che sia difettoso è tornata al livello iniziale.

### Problema 14

In un esperimento di fisica, una particella elettricamente carica si trova confinata su una retta. Gli scienziati che stanno effettuando l'esperimento modellizzano la posizione della particella al tempo 0 come una variabile aleatoria  $X$  avente legge  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Sanno anche che si muove con velocità costante  $V = +1$  se la particella è carica positivamente, mentre si muove con velocità costante  $V = -1$  se è carica negativamente, quindi al tempo 1 si trova in posizione  $X + V$ . Inoltre gli scienziati inizialmente assegnano uguale probabilità al fatto che la carica della particella sia positiva o negativa, ossia  $P(V = 1 | \Omega) = P(V = -1 | \Omega) = 1/2$ , e suppongono che  $X$  e  $V$  siano variabili aleatorie indipendenti.

1. Calcolare il valore atteso e la varianza della posizione della particella al tempo 1.
2. Supponiamo che gli scienziati riescano a determinare che la particella al tempo 1 si trova nell'intervallo  $(-\infty, 0]$ . Esprimere la probabilità che la velocità della particella sia  $+1$  come un integrale oppure in termini della funzione di ripartizione della gaussiana standard,  $\Phi(t) := P(Y \leq t | Y \text{ è } \mathcal{N}(0, 1))$ . È più probabile che la carica sia positiva o negativa?
3. Supponiamo che gli scienziati determinino che al tempo 1 la particella si trova esattamente alla posizione 1. Come cambia la probabilità che la velocità della particella sia  $+1$ ? È più probabile che la carica sia positiva o negativa?

### Una soluzione:

Possiamo scrivere gli eventi “la particella è carica positivamente” come  $\{V = +1\}$ , mentre il suo complementare, “la particella è carica negativamente” come  $\{V = -1\}$ . Rispetto all'informazione  $\Omega \cap \{V = -1\}$  la posizione al tempo 1 della particella è  $X + V = X - 1$  che quindi ha legge  $\mathcal{N}(-1, 1)$ . Rispetto all'informazione  $\Omega \cap \{V = +1\}$  la posizione è  $X + V = X + 1$  che quindi ha legge  $\mathcal{N}(1, 1)$ .

1) La posizione al tempo 1 è espressa dalla variabile aleatoria  $X + V$ . Possiamo procedere in almeno due modi: un modo veloce consiste nel notare che

$$\mathbb{E}[X + V | \Omega] = \mathbb{E}[X | \Omega] + \mathbb{E}[V | \Omega] = 0 + 0 = 0$$

$$\text{Var } X + V|\Omega = \text{Var } X|\Omega + \text{Var } V|\Omega = 1 + 1 = 2,$$

dove la varianza della somma è la somma delle varianze perché  $X$  e  $V$  sono indipendenti.

Un modo più lungo ma comunque corretto consiste nel calcolare valore atteso

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X + V|\Omega] &= \mathbb{E}[X + V|\Omega \cap \{V = -1\}] P(V = -1|\Omega) \\ &\quad + \mathbb{E}[X + V|\Omega \cap \{V = +1\}] P(V = +1|\Omega) \\ &= \mathbb{E}[X - 1|\Omega \cap \{V = -1\}] \frac{1}{2} + \mathbb{E}[X + 1|\Omega \cap \{V = +1\}] \frac{1}{2} \\ &= \mathbb{E}[X - 1|\Omega] \frac{1}{2} + \mathbb{E}[X + 1|\Omega] \frac{1}{2} \quad \text{per indipendenza di } X \text{ e } V \\ &= -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Allo stesso modo calcoliamo ora il valore atteso del quadrato

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X + V)^2|\Omega] &= \mathbb{E}[(X + V)^2|\Omega \cap \{V = -1\}] P(V = -1|\Omega) \\ &\quad + \mathbb{E}[(X + V)^2|\Omega \cap \{V = +1\}] P(V = +1|\Omega) \\ &= \mathbb{E}[(X - 1)^2|\Omega \cap \{V = -1\}] \frac{1}{2} + \mathbb{E}[(X + 1)^2|\Omega \cap \{V = +1\}] \frac{1}{2} \\ &= \mathbb{E}[(X - 1)^2|\Omega] \frac{1}{2} + \mathbb{E}[(X + 1)^2|\Omega] \frac{1}{2} \quad \text{per indipendenza di } X \text{ e } V \\ &= \left( \text{Var } X - 1|\Omega + \mathbb{E}[X - 1]^2 \right) \cdot \frac{1}{2} + \left( \text{Var } X + 1|\Omega + \mathbb{E}[X + 1]^2 \right) \frac{1}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\text{Var } X + V|\Omega = 2 - 0^2 = 2.$$

2) È richiesto di calcolare (esprimere in termini di integrali o della funzione di ripartizione della gaussiana standard)

$$P(V = +1|\Omega \cap \{X + V \leq 0\}) = P(V = +1|\Omega) \frac{P(X + V \leq 0|\Omega \cap \{V = 1\})}{P(X + V \leq 0|\Omega)},$$

avendo usato la formula di Bayes. Notiamo che

$$\begin{aligned} P(X + V \leq 0|\Omega \cap \{V = 1\}) &= P(X + 1 \leq 0|\Omega \cap \{V = 1\}) \\ &= P(X + 1 \leq 0|\Omega) \quad \text{per indipendenza di } X \text{ e } V \\ &= P(X \leq -1|\Omega) = \Phi(-1). \end{aligned}$$

In modo simile, scriviamo il denominatore

$$\begin{aligned} P(X + V \leq 0|\Omega) &= P(X - 1 \leq 0|\Omega \cap \{V = -1\})P(V = -1|\Omega) + \\ &\quad + P(X + 1 \leq 0|\Omega \cap \{V = +1\})P(V = +1|\Omega) \\ &= P(X - 1 \leq 0|\Omega) \frac{1}{2} + P(X + 1 \leq 0|\Omega) \frac{1}{2} \quad \text{per indipendenza di } X \text{ e } V \\ &= \frac{1}{2} (P(X \leq 1|\Omega) + P(X \leq -1|\Omega)) = \frac{1}{2} (\Phi(1) + \Phi(-1)). \end{aligned}$$

Di conseguenza (i fattori  $1/2$  si semplificano)

$$P(V = +1|\Omega \cap \{X + V \leq 0\}) = \frac{\Phi(-1)}{\Phi(1) + \Phi(-1)}.$$

Si può anche notare che  $\Phi(1) + \Phi(-1) = 1$ , perché la densità della gaussiana standard è pari, così il denominatore scompare, ma non è necessario nell'argomento. Per capire se è più probabile che  $V = +1$  o  $V = -1$ , notiamo che necessariamente (essendo  $\{V = 1\}$ ,  $\{V = -1\}$  un sistema di alternative)

$$\begin{aligned} P(V = -1|\Omega \cap \{X + V \leq 0\}) &= 1 - P(V = +1|\Omega \cap \{X + V \leq 0\}) \\ &= 1 - \frac{\Phi(-1)}{\Phi(1) + \Phi(-1)} \\ &= \frac{\Phi(1)}{\Phi(1) + \Phi(-1)} \end{aligned}$$

La funzione di ripartizione

$$t \mapsto \Phi(t) = \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dx / \sqrt{2\pi}$$

è crescente, quindi  $\Phi(1) > \Phi(-1)$ . Di conseguenza,

$$\frac{\Phi(-1)}{\Phi(1) + \Phi(-1)} < \frac{\Phi(1)}{\Phi(1) + \Phi(-1)}$$

e quindi è più probabile che sia  $V = -1$ , come è anche facile intuire.

3) È richiesto di calcolare

$$P(V = +1|\Omega \cap \{X + V = 1\}) = P(V = +1|\Omega) \frac{\varrho(X + V = 1|\Omega \cap \{V = 1\})}{\varrho(X + V = 1|\Omega)},$$

avendo usato la formula di Bayes, caso continuo/discreto. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \varrho(X + V = 1|\Omega \cap \{V = 1\}) &= \varrho((X + 1) = 1|\Omega \cap \{V = 1\}) \\ &= \varrho((X + 1) = 1|\Omega) \quad \text{per indipendenza tra } X \text{ e } V \\ &= \varrho(X = 0|\Omega) \quad \text{(cambio di variabile)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

In modo analogo, calcoliamo

$$\begin{aligned} \varrho(X + V = 1|\Omega \cap \{V = -1\}) &= \varrho((X - 1) = 1|\Omega \cap \{V = -1\}) \\ &= \varrho((X - 1) = 1|\Omega) \quad \text{per indipendenza tra } X \text{ e } V \\ &= \varrho(X = 2|\Omega) \quad \text{(cambio di variabile)} \\ &= \frac{e^{-2}}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \varrho(X + V = 1|\Omega) &= \varrho(X + V = 1|\Omega \cap \{V = -1\})P(V = -1|\Omega) \\ &\quad + \varrho(X + V = 1|\Omega \cap \{V = 1\})P(V = 1|\Omega) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} (1 + e^{-2}). \end{aligned}$$

La probabilità richiesta è (i fattori  $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$  si semplificano)

$$P(V = +1|\Omega \cap \{X + V = 1\}) = \frac{1}{1 + e^{-2}}.$$

Poiché  $e^{-2} < 1$ , ne segue che questa probabilità è maggiore di  $1/2$ , quindi l'evento  $V = -1$  ha probabilità minore di  $1/2$  e in questo caso è più probabile che sia  $V = +1$ .

### Problema 15

Si suppone che il tempo di funzionamento  $T \in [0, 1]$  (in una certa unità di misura) di un componente elettronico dipenda da una variabile aleatoria  $\theta \in \mathbb{N}$ , avente legge Poisson di parametro 2 (rispetto ad una informazione  $\Omega$ ). Precisamente, rispetto a  $\Omega \cap \{\theta = 0\}$ , si sa che  $T = 0$  con probabilità 1 mentre, per  $n \geq 1$ , la funzione di sopravvivenza di  $T$ , per  $t \in [0, 1]$ , vale

$$P(T > t|\Omega \cap \{\theta = n\}) = 1 - t^n.$$

1. Verificare che, per ogni  $n \geq 1$ , la variabile  $T$ , rispetto a  $\Omega \cap \{\theta = n\}$ , è assolutamente continua e calcolarne la densità, il valore atteso e la varianza.
2. All'istante  $1/2$  il componente non sta funzionando (quindi  $T \leq 1/2$ ). Come cambia la legge di  $\theta$ ? calcolarne valore atteso e varianza.
3. Supponiamo invece di scoprire che esattamente all'istante  $t = 1/2$  il componente smette di funzionare. Come cambia la legge di  $\theta$ ? Calcolarne valore atteso e varianza.

(Sugg: potrebbe essere utile ricordare l'identità  $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ .)

### Una soluzione:

1. Se una variabile è (assolutamente) continua, allora la sua densità si ottiene derivando la funzione di sopravvivenza e cambiandone il segno. Quindi deve valere

$$\varrho(T = t|\Omega \cap \{\theta = n\}) = -\frac{d}{dt}(1 - t^n) = nt^{n-1},$$

per  $t \in [0, 1]$ . Se vogliamo verificare che  $\varrho$  così trovata è la densità di  $T$  (rispetto all'informazione  $\Omega \cap \{\theta = n\}$ ) basta notare che per ogni  $t \in [0, 1]$ ,

$$\int_t^1 ns^{n-1}ds = (1 - t^n) = P(T > t|\Omega \cap \{\theta = n\}).$$

Calcoliamo il valore atteso

$$\mathbb{E}[T|\Omega \cap \{\theta = n\}] = \int_0^1 tnt^{n-1}dt = \frac{n}{n+1},$$

e la varianza

$$\mathbb{E}[T^2|\Omega \cap \{\theta = n\}] = \int_0^1 t^2nt^{n-1}dt = \frac{n}{n+2}$$



da cui

$$\text{Var } T|\Omega \cap \{\theta = n\} = \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = n \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

2. Per  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P\left(\theta = n|T \leq \frac{1}{2}\right) &= P(\theta = n|\Omega) \cdot \frac{P(T \leq \frac{1}{2}|\{\theta = n\} \cap \Omega)}{P(T \leq \frac{1}{2}|\Omega)} \\ &= e^{-2} \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{1 - P(T > \frac{1}{2}|\{\theta = n\})}{P(T \leq \frac{1}{2}|\Omega)} \\ &= e^{-2} \frac{2^n}{n!} \frac{2^{-n}}{P(T \leq \frac{1}{2}|\Omega)} = \frac{e^{-2}}{P(T \leq \frac{1}{2}|\Omega)} \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Qui possiamo procedere in due modi: o si calcola

$$P(T \leq \frac{1}{2}|\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(T \leq \frac{1}{2}|\{\theta = n\} \cap \Omega\right) P(\theta = n|\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2} \frac{1}{n!} = e^{-1},$$

oppure si riconosce che la legge di  $\theta$  è Poisson di parametro 1, a meno di moltiplicare per una costante: ma allora la costante  $e^{-2}/P(T \leq \frac{1}{2})$  deve essere quella della Poisson di parametro 1, ossia  $e^{-1}$ . Avendo notato che  $\theta$  è Poisson di parametro 1, segue che

$$\mathbb{E}\left[\theta|T \leq \frac{1}{2}\right] = 1, \quad \text{Var}\left(\theta|T \leq \frac{1}{2}\right) = 1.$$

3. Innanzitutto non può essere  $\theta = 0$ , perché altrimenti  $T = 0$  e invece abbiamo osservato  $T = 1/2$ . Per  $n \geq 1$ , usiamo la formula di Bayes discreto/continuo,

$$\begin{aligned} P\left(\theta = n|T \leq \frac{1}{2}\right) &= P(\theta = n|\Omega) \cdot \frac{\varrho(T \leq \frac{1}{2}|\{\theta = n\} \cap \Omega)}{\varrho(T = \frac{1}{2}|\Omega)} \\ &= e^{-2} \frac{2^n}{n!} \frac{n2^{-n-1}}{\varrho(T = \frac{1}{2}|\Omega)} = \frac{e^{-2}}{2P(T \leq \frac{1}{2})} \frac{1}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Anche stavolta si potrebbe argomentare che la costante  $\frac{e^{-2}}{2P(T \leq \frac{1}{2})}$  deve valere  $e^{-1}$ , perché la legge di  $\theta - 1$  risulta Poisson di parametro 1. Si può anche fare il calcolo direttamente

$$\begin{aligned} \varrho(T = \frac{1}{2}|\Omega) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \varrho(T = \frac{1}{2}|\Omega \cap \{\theta = n\}) P(\theta = n|\Omega) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{2} \frac{1}{(n-1)!} = e^{-1} 2. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi trovato che  $\theta - 1$  ha legge Poisson di parametro 1, perché

$$P(\theta - 1 = n|\Omega \cap \left\{T = \frac{1}{2}\right\}) = P(\theta = n+1|\Omega \cap \left\{T = \frac{1}{2}\right\}) = e^{-1} \frac{1}{n!}.$$

Infine calcoliamo

$$\mathbb{E} \left[ \theta | \Omega \cap \left\{ T = \frac{1}{2} \right\} \right] = \mathbb{E} \left[ \theta - 1 | \Omega \cap \left\{ T = \frac{1}{2} \right\} \right] + 1 = 2,$$

$$\text{Var} \left( \theta | \Omega \cap \left\{ T = \frac{1}{2} \right\} \right) = \text{Var} \left( \theta - 1 | \Omega \cap \left\{ T = \frac{1}{2} \right\} \right) = 1.$$

### Problema 16

Un calcolatore è programmato per produrre numeri reali “casuali” distribuiti come una variabile  $X$  continua uniforme su un intervallo del tipo  $[0, N]$ , per un qualche  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 1$ . Purtroppo però non è stato detto all’utente del programma quale  $N$  è stato impostato, perciò questi decide inizialmente di supporre  $N$  anch’esso aleatorio con legge geometrica di parametro  $1/2$ , quindi  $P(N = n | \Omega) = 2^{-n}$  ( $n \geq 1$ ). Quindi, rispetto a  $P(\cdot | N = n)$ ,  $X$  è uniforme (continua) sull’intervallo  $[0, n]$ .

1. Calcolare il valore atteso di  $X$  rispetto all’informazione iniziale  $\Omega$ . Le variabili  $X$  ed  $N$  sono indipendenti (rispetto all’informazione  $\Omega$ )? (*Sugg: ricordare il valore atteso di una geometrica  $E[Y | Y \sim \text{Geom}(p)] = \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}p$ .*)
2. Supponendo di fare una singola esecuzione del programma e di osservare che  $X \leq 1/2$ , come cambia la legge di  $N$ ? Calcolarne il valore atteso. (*Potrà essere utile l’identità  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n} = \log(2)$ .*)
3. Supponendo di fare una singola esecuzione del programma e di osservare invece che  $X = 1/2$ , come cambia la legge di  $N$ ? Calcolarne il valore atteso.

### Una soluzione:

1. Per ogni  $n \geq 1$ , vale

$$E[X | N = n] = \int_0^n \frac{x}{n} dx = \frac{n}{2}$$

perciò

$$\begin{aligned} E[X | \Omega] &= \sum_{n=1}^{+\infty} E[X | N = n] P(N = n | \Omega) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2} 2^{-n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n 2^{-n} = \frac{1}{2} \frac{1}{1/2} = 1, \end{aligned}$$

avendo usato la serie che definisce il valore atteso della geometrica di parametro  $1/2$ . Le variabili  $X$  ed  $N$  non sono indipendenti: infatti ad esempio  $P(X > 1 | N =$

1) = 0, mentre si ha

$$\begin{aligned} P(X > 1|\Omega) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X > 1|N = n)P(N = n|\Omega) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} P(X > 1|N = n)2^{-n} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) 2^{-n} > 0. \end{aligned}$$

2. Dobbiamo calcolare

$$P(N = n|X \leq 1/2) = \frac{P(X \leq 1/2|N = n) P(N = n|\Omega)}{P(X \leq 1/2|\Omega)}.$$

Calcoliamo separatamente

$$P(X \leq 1/2|N = n) = \int_0^{1/2} \frac{1}{n} dx = \frac{1}{2n}.$$

$$P(N = n|\Omega) = 2^{-n}$$

$$P(X \leq 1/2|\Omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} 2^{-n} = \frac{\log(2)}{2}$$

usando il suggerimento. Si trova quindi

$$P(N = n|X \leq 1/2) = \frac{2}{\log(2)} \cdot \frac{1}{2n} 2^{-n} = \frac{1}{\log(2)} \frac{1}{n} 2^{-n}.$$

Per calcolare il valore atteso di  $N$ , si ha

$$E[N|X \leq 1/2] = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(N = n|X \leq 1) = \frac{1}{\log(2)} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{1}{\log 2}.$$

3. Stavolta usiamo la formula di Bayes caso discreto-continuo

$$P(N = n|X = 1/2) = \frac{\varrho(X = 1/2|N = n) P(N = n|\Omega)}{\varrho(X = 1/2|\Omega)},$$

e calcoliamo

$$\varrho(X = 1/2|N = n) = \frac{1}{n}$$

$$P(N = n|\Omega) = 2^{-n}$$

e infine

$$\varrho(X = 1/2|\Omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varrho(X = 1/2|N = n)P(N = n|\Omega) = \log(2).$$

Otteniamo quindi

$$P(N = n|X = 1/2) = \frac{1}{\log(2)} \frac{1}{n} 2^{-n},$$

che coincide con il punto precedente. Quindi anche il valore atteso sarà lo stesso, ossia

$$E[N|X = 1/2] = \frac{1}{\log 2}.$$

### Problema 17

L'altezza di un corpo  $z(t)$  sotto l'effetto della forza di gravità è descritta dalla funzione

$$z(t) = z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{t^2}{2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

dove  $z(0)$  è l'altezza iniziale e  $\dot{z}(0)$  è la velocità iniziale (e per semplicità l'accelerazione gravitazionale vale  $g = 1$ ). Non conoscendo queste due quantità, si suppone inizialmente che siano entrambe variabili aleatorie con legge normale standard  $N(0, 1)$  e indipendenti.

1. Calcolare la legge, il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria  $z(t)$ , per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .
2. Calcolare la covarianza  $Cov(z(t), z(s)) = E[z(t)z(s)] - E[z(t)]E[z(s)]$ , per ogni  $s, t \in \mathbb{R}$ . Per quali  $s, t$  si ha  $Cov(z(t), z(s)) = 0$ ?
3. Si sa che una quantità importante del sistema fisico è l'energia totale

$$en(t) := \frac{1}{2}m(\dot{z}(t))^2 + mz(t)$$

che è costante nel tempo:  $en(t) = en(0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Supponendo per semplicità  $m = 1$ , calcolare valore atteso, varianza di  $en(t)$  e la covarianza  $Cov(en(t), en(s)) = E[en(t)en(s)] - E[en(t)]E[en(s)]$ . (Sugg: usare  $E[X^4|X \sim N(0, 1)] = 3$ .)

4. (Facoltativo) Si osserva che  $z(1) = -\frac{1}{2}$ . Come cambia la legge di  $z(0)$ ? (Sugg: usare Bayes, caso continuo-continuo.)

#### Una soluzione:

1. La variabile  $z(t)$  è Gaussiana, essendo combinazione lineare di variabili Gaussiane indipendenti. Risulta inoltre  $E[z(t)] = E[z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{t^2}{2}] = -\frac{t^2}{2}$ ,  $\text{Var}(z(t)) = \text{Var}(z(0) + \dot{z}(0)t) = 1 + t^2$ .

2. Calcoliamo

$$\begin{aligned} E[z(t)z(s)] &= E\left[\left(z(0) + \dot{z}(0)t - \frac{t^2}{2}\right)\left(z(0) + \dot{z}(0)s - \frac{s^2}{2}\right)\right] \\ &= E[(z(0))^2 + ts(\dot{z}(0))^2] = 1 + ts + \frac{(st)^2}{4}, \end{aligned}$$

poiché tutti gli altri prodotti si semplificano usando l'indipendenza e il fatto che i valori attesi di  $z(0)$ ,  $\dot{z}(0)$  sono nulli. Otteniamo allora

$$Cov(z(t), z(s)) = 1 + ts + \frac{(st)^2}{4} - \frac{(st)^2}{4} = 1 + ts,$$

da cui  $Cov(z(t), z(s)) = 0$  se e solo se  $1 + ts = 0$ , ossia  $t = -1/s$ .

3. Come scritto nel testo, si ha  $en(t) = en(0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Sfruttando questo fatto, basta calcolare il valore atteso e la varianza di  $en(0) = \frac{1}{2}(\dot{z}(0))^2 + z(0)$ . Si ha

$$E[en(0)] = E\left[\frac{1}{2}(\dot{z}(0))^2 + z(0)\right] = \frac{1}{2}E[(\dot{z}(0))^2] = \frac{1}{2},$$

mentre per la varianza troviamo prima

$$\begin{aligned} E[(en(0))^2] &= E\left[\left(\frac{1}{2}(\dot{z}(0))^2 + z(0)\right)^2\right] \\ &= E\left[\frac{1}{4}(\dot{z}(0))^4 + (z(0))^2 + (\dot{z}(0))^2 z(0)\right], \\ &= \frac{1}{4}E[(\dot{z}(0))^4] + E[(z(0))^2] + E[(\dot{z}(0))^2] E[z(0)] \\ &= \frac{3}{4} + 1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{Var } en(0) = E[(en(0))^2] - (E[en(0)])^2 = \frac{3}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

La covarianza coincide con la varianza perché  $en(t) = en(s) = en(0)$ .

4. Usiamo Bayes nel caso continuo-continuo:

$$\varrho\left(z(0) = z \mid z(1) = -\frac{1}{2}\right) = \frac{\varrho\left(z(1) = -\frac{1}{2} \mid z(0) = z\right) \varrho(z(0) = z)}{\varrho\left(z(1) = -\frac{1}{2}\right)}.$$

Calcoliamo separatamente i vari termini a destra. Si ha

$$\varrho(z(0) = z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\varrho\left(z(1) = -\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2/2}}{\sqrt{2\pi \cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2}}$$

essendo  $z(1)$  una variabile  $N(-\frac{1}{2}, 2)$ . Infine,

$$\begin{aligned} \varrho\left(z(1) = -\frac{1}{2} \mid z(0) = z\right) &= \varrho\left(z(0) + \dot{z}(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \mid z(0) = z\right) \\ &= \varrho\left(z + \dot{z}(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \mid z(0) = z\right) \quad \text{usando l'informazione } z(0) = z, \\ &= \varrho\left(z + \dot{z}(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\right) \quad \text{per indipendenza di } z(0) \text{ e } \dot{z}(0), \\ &= \varrho(\dot{z}(0) = -z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\varrho\left(z(0) = z \mid z(1) = -\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{1}{2}}}$$

ossia che  $z(0)$  ha legge  $N(0, \frac{1}{2})$  rispetto alla informazione  $\{z(1) = -\frac{1}{2}\}$ .

Un segnale  $S \in \{-1, 0, 1\}$  è trasmesso da una sorgente verso un ricevitore. Tuttavia, durante la trasmissione, si somma ad esso un “rumore”  $E$  distribuito con legge  $\mathcal{N}(0, 1)$ , per cui alla ricezione si osserva solamente  $R = S + E$ . Il ricevente, prima di osservare  $R$ , non ha alcuna informazione su  $S$ , quindi inizialmente suppone che  $S$  sia distribuita uniformemente sui tre valori possibili, e inoltre che  $S$  ed  $E$  siano variabili indipendenti.

1. Calcolare valore atteso e varianza di  $R$  rispetto alla informazione iniziale.
2. Le variabili  $S$  ed  $R$  sono indipendenti (rispetto alla informazione iniziale)?
3. Per ogni  $r \in \mathbb{R}$  (fissato), determinare la legge di  $S \in \{-1, 0, 1\}$  rispetto alla informazione  $\{R = r\}$  e determinare quale tra gli eventi  $\{S = -1\}$ ,  $\{S = 0\}$ ,  $\{S = 1\}$  è il più probabile.

**Una soluzione:**

1. Si trova  $\mathbb{E}[R|\Omega] = \mathbb{E}[S + E|\Omega] = \mathbb{E}[S|\Omega] + \mathbb{E}[E|\Omega] = 0 + 0 = 0$ , perché

$$\mathbb{E}[S|\Omega] = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

Usando l'indipendenza tra  $S$  ed  $E$ , abbiamo

$$\text{Var}(R|\Omega) = \text{Var}(S + E|\Omega) = \text{Var}(S|\Omega) + \text{Var}(E|\Omega) = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3},$$

perché

$$\text{Var} S|\Omega = \mathbb{E}[S^2|\Omega] = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2.  $S$  ed  $R$  non sono indipendenti. Se lo fossero, ad esempio si avrebbe che  $\mathbb{E}[SR|\Omega] = \mathbb{E}[S|\Omega] \mathbb{E}[R|\Omega] = 0 \cdot 0$ , ma invece

$$\mathbb{E}[SR|\Omega] = \mathbb{E}[S(S + E)|\Omega] = \mathbb{E}[S^2|\Omega] + \mathbb{E}[SE|\Omega] = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3},$$

dove abbiamo usato il fatto che  $S$  ed  $E$  sono indipendenti.

3. Posto  $i \in \{-1, 0, 1\}$ , dobbiamo calcolare

$$P(S = i|R = r) = \frac{\varrho(R = r|S = i)P(S = i|\Omega)}{\varrho(R = r|\Omega)},$$

avendo usato la formula di Bayes, caso discreto/continuo. Calcoliamo separatamente

$$\begin{aligned} \varrho(R = r|S = i) &= \varrho((S + E) = r|S = i) = \varrho((i + E) = r|S = i) \\ &= \varrho((i + E) = r|\Omega) = \varrho(E = r - i|S = i) = e^{-\frac{(r-i)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato prima l'informazione  $S = i$ , poi l'indipendenza tra  $S$  ed  $E$  e infine il fatto che  $E + i$  è  $\mathcal{N}(i, 1)$  rispetto all'informazione iniziale  $\Omega$ . Si trova poi

$$\varrho(R = r|\Omega) = \sum_{j=-1}^1 \varrho(R = r|S = j)P(S = j|\Omega) = \frac{1}{3} \sum_{j=-1}^1 e^{-\frac{(r-j)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

e infine,

$$P(S = i | R = r) = \frac{e^{-\frac{(r-i)^2}{2}}}{\sum_{j=1}^3 e^{-\frac{(r-j)^2}{2}}}.$$

Per capire quale probabilità è maggiore, osserviamo che essendo il denominatore lo stesso per tutte e tre, basta capire quale numeratore è massimo, ossia quale sia il massimo tra i tre numeri

$$e^{-\frac{(r+1)^2}{2}} \quad e^{-\frac{r^2}{2}} \quad e^{-\frac{(r-1)^2}{2}}.$$

A sua volta, basta trovare quale tra i tre esponenti è massimo, e quindi quale sia il minimo tra i tre numeri

$$|r + 1| \quad |r| \quad |r - 1|.$$

Si trova facilmente (basta anche un grafico delle tre funzioni di  $r$ ) che, per  $r < -1/2$  il minimo è  $|r + 1|$ , per  $1/2 < r < 1/2$  il minore è  $|r|$  e per  $r > 1/2$  il minore è  $|r - 1|$ , mentre per  $r = -1/2$  il minimo è  $1/2 = |r + 1| = |r|$  e analogamente per  $r = 1/2$  il minimo è  $1/2 = |r - 1| = |r|$ .

In conclusione: se si osserva  $R = r$ , per  $r < -1/2$  è più probabile che sia  $S = -1$ , per  $r = -1/2$   $S = -1$  ed  $S = 0$  sono i più probabili (con uguale probabilità), per  $-1/2 < r < 1/2$  è più probabile che sia  $S = 0$ , per  $r = 1/2$ ,  $S = 0$  ed  $S = 1$  sono i più probabili (con uguale probabilità) e infine per  $r > 1/2$  è più probabile che sia  $S = 1$ .

### Problema 19

Due oggetti di masse rispettivamente 1 e 2 si trovano in un piano rispettivamente alle coordinate  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ . Supponiamo che  $X_1, X_2, Y_1, Y_2$  siano variabili indipendenti, tutte con legge  $\mathcal{N}(0, 1)$ , e definiamo le quantità aleatorie

$$\bar{X} = X_1 + 2X_2, \quad \bar{Y} = Y_1 + 2Y_2$$

(coordinate del centro di massa del sistema)

$$T_{xx} = Y_1^2 + 2Y_2^2, \quad T_{xy} = -X_1Y_1 - 2X_2Y_2, \quad T_{yy} = X_1^2 + 2X_2^2$$

(componenti del “tensore di inerzia”).

1. Calcolare il valore atteso e la varianza di  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ . Queste due variabili hanno legge gaussiana?
2. Calcolare il valore atteso delle quantità  $T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}$ . La variabile  $T_{xx}$  ha legge gaussiana?
3. Calcolare  $\mathbb{E}[T_{xx}T_{yy} - (T_{xy})^2]$ . (Suggerimento: usare il fatto che l'identità  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$  per variabili indipendenti  $X, Y$  si estende anche a più di due variabili indipendenti, in particolare vale  $\mathbb{E}[X_1X_2Y_1Y_2] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[Y_1]\mathbb{E}[Y_2] = 0$ .)

**Una soluzione:**

1. Le variabili  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  sono ottenute tramite combinazioni lineari di variabili gaussiane indipendenti, quindi sappiamo che hanno legge gaussiana. Per calcolare il valore atteso e varianza,

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[2X_2] = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(2X_2) = 1 + 4 \cdot 1 = 5,$$

avendo usato che  $X_1$  e  $2X_2$  sono variabili indipendenti. Gli stessi valori si ottengono per  $\bar{Y}$ .

2. Calcoliamo

$$\mathbb{E}[T_{xx}] = \mathbb{E}[X_1^2 + 2X_2^2] = \mathbb{E}[X_1^2] + 2\mathbb{E}[X_2^2] = 3,$$

e allo stesso modo si trova  $\mathbb{E}[T_{yy}] = 3$ . Inoltre

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_{xy}] &= \mathbb{E}[-X_1Y_1 - 2X_2Y_2] = -\mathbb{E}[X_1Y_1] - 2\mathbb{E}[X_2Y_2] \\ &= -\mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[Y_1] - 2\mathbb{E}[X_2]\mathbb{E}[Y_2] = 0\end{aligned}$$

avendo usato l'indipendenza tra le variabili. Infine, la variabile  $T_{xx}$ , essendo somma di quantità non-negative (quadrati), è non-negativa, quindi non può avere legge gaussiana, altrimenti sarebbe  $P(T_{xx} < 0) > 0$ , perché la densità gaussiana è positiva su tutto  $\mathbb{R}$ .

3. Calcoliamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_{xx}T_{yy}] &= \mathbb{E}[(X_1^2 + 2X_2^2)(Y_1^2 + 2Y_2^2)] \\ &= \mathbb{E}[X_1^2Y_1^2 + 2X_2^2Y_1^2 + 2X_1^2Y_2^2 + 4X_2^2Y_2^2] \\ &= \mathbb{E}[X_1^2Y_1^2] + 2\mathbb{E}[X_2^2Y_1^2] + 2\mathbb{E}[X_1^2Y_2^2] + 4\mathbb{E}[X_2^2Y_2^2] \\ &= \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[Y_1^2] + 2\mathbb{E}[X_2^2]\mathbb{E}[Y_1^2] + 2\mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[Y_2^2] + 4\mathbb{E}[X_2^2]\mathbb{E}[Y_2^2] \\ &= 1 + 2 + 2 + 4 = 9\end{aligned}$$

avendo usato  $\mathbb{E}[X_1^2Y_1^2] = \mathbb{E}[X_1^2]\mathbb{E}[Y_1^2]$  per indipendenza di  $X_1^2$  da  $Y_1^2$  (e similmente gli altri termini). Poi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(T_{xy})^2] &= \mathbb{E}[(X_1Y_1 + 2X_2Y_2)^2] \\ &= \mathbb{E}[X_1^2Y_1^2 + 4X_1Y_1X_2Y_2 + 4X_2^2Y_2^2] \\ &= \mathbb{E}[X_1^2Y_1^2] + 4\mathbb{E}[X_1Y_1X_2Y_2] + 4\mathbb{E}[X_2^2Y_2^2] \\ &= 1 + 0 + 4 = 5\end{aligned}$$

avendo usato il suggerimento. Troviamo infine

$$\mathbb{E}[T_{xx}T_{yy} - (T_{xy})^2] = 4.$$



## Problema 20

Una stampante 3D dispone in successione sottili strati di materia per ottenere un oggetto tridimensionale. Lo spessore di ciascuno strato deve essere il più possibile vicino a quello progettato. Dopo numerose osservazioni, gli addetti al controllo qualità di un nuovo modello di stampante hanno concluso che

- i) lo spessore di ciascun strato è rappresentabile con una variabile aleatoria con legge  $N(10, \sigma^2)$ , dove 10 è lo spessore progettato,
- ii) spessori di strati diversi sono rappresentabili con variabili indipendenti,
- iii) il parametro  $\sigma^2$  dipende dal singolo esemplare di stampante, e il 90% dei prodotti ha  $\sigma^2 = 1$  mentre il rimanente 10% ha  $\sigma^2 = 4$ .

La qualità di un nuovo esemplare viene quindi testata stampando un numero (non aleatorio)  $n \geq 1$  di strati e misurando la differenza di spessore  $D$  tra il risultato e quanto progettato. Dato quindi un nuovo esemplare,

1. per ogni  $n \geq 1$ , calcolare valore atteso e varianza di  $D$ .
2. posto  $n = 100$ , si osserva che  $D = 20$ . Qual è la probabilità che sia  $\sigma^2 = 4$ ?
3. si osserva che  $D = 2\sqrt{n}$ . Qual è la probabilità che sia  $\sigma^2 = 4$ ?

### Una soluzione:

1. Siano  $X_1, \dots, X_n$  gli spessori dei singoli strati, così il risultato della stampa ha spessore  $\sum_{i=1}^n X_i$ , mentre lo spessore progettato è dato dal numero degli strati ( $n$ ) per lo spessore progettato di ciascuno strato (10, come scritto nel punto i) del testo). Pertanto,

$$D = \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) - 10n.$$

Se l'esemplare ha  $\sigma^2 = 1$ , per noti risultati sulle variabili gaussiane (indipendenti)  $D$  ha legge  $N(10n - 10n, n \cdot \sigma^2) = N(0, n)$ , mentre se ha  $\sigma^2 = 4$ ,  $D$  ha legge  $N(0, 4n)$ . Pertanto, distinguendo queste due alternative, si calcola

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D|\Omega] &= \mathbb{E}[D|\sigma^2 = 1] P(\sigma^2 = 1|\Omega) + \mathbb{E}[D|\sigma^2 = 4] P(\sigma^2 = 4|\Omega) \\ &= 0 \cdot \frac{9}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(D^2|\Omega) &= \mathbb{E}[D^2|\Omega] = \mathbb{E}[D^2|\sigma^2 = 1] P(\sigma^2 = 1|\Omega) + \mathbb{E}[D^2|\sigma^2 = 4] P(\sigma^2 = 4|\Omega) \\ &= n \cdot \frac{9}{10} + 4n \cdot \frac{1}{10} = n \cdot \frac{13}{10}. \end{aligned}$$

2. Usiamo la formula di Bayes, caso discreto/continuo:

$$P(\sigma^2 = 4|D = 20) = \frac{\varrho(D = 20|\sigma^2 = 4)P(\sigma^2 = 4|\Omega)}{\varrho(D = 20|\Omega)},$$

dove

$$\varrho(D = 20|\Omega) = \varrho(D = 20|\sigma^2 = 4)P(\sigma^2 = 4|\Omega) + \varrho(D = 20|\sigma^2 = 1)P(\sigma^2 = 1|\Omega).$$

Ricordando che  $D$  ha legge  $N(0, 4n) = N(0, 400)$  se  $\sigma^2 = 4$ , calcoliamo

$$\varrho(D = 20|\sigma^2 = 4) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{20^2}{400}}}{\sqrt{2\pi 400}} = \frac{e^{-1/2}}{20\sqrt{2\pi}},$$

mentre  $D$  ha legge  $N(0, n) = N(0, 100)$  se  $\sigma^2 = 1$ ,

$$\varrho(D = 20|\sigma^2 = 1) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{20^2}{100}}}{\sqrt{2\pi 100}} = \frac{e^{-2}}{10\sqrt{2\pi}},$$

da cui

$$\varrho(D = 20|\Omega) = \frac{e^{-2}}{10\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{9}{10} + \frac{e^{-1/2}}{20\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{10}$$

e

$$\begin{aligned} P(\sigma^2 = 4|D = 20) &= \frac{\frac{e^{-1/2}}{20\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{e^{-2}}{10\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{9}{10} + \frac{e^{-1/2}}{20\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{10}} \\ &= \frac{e^{-1/2}/20}{e^{-2} \cdot 9/10 + e^{-1/2}/20} \\ &= \frac{1}{18 \cdot e^{-3/2} + 1} \approx 0,2. \end{aligned}$$

3. Si tratta di ripetere i calcoli del punto precedente sostituendo 20 con  $2\sqrt{n}$ , e le varianze 400 e 100 con  $4n$  ed  $n$ , rispettivamente. Si trova che

$$\varrho(D = 2\sqrt{n}|\sigma^2 = 4) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{4n}{4n}}}{\sqrt{2\pi 4n}} = \frac{e^{-1/2}}{2\sqrt{2\pi n}},$$

$$\varrho(D = 2\sqrt{n}|\sigma^2 = 1) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{4n}{n}}}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{e^{-2}}{\sqrt{2\pi n}},$$

pertanto concludiamo che

$$\begin{aligned} P(\sigma^2 = 4|D = 2\sqrt{n}) &= \frac{\frac{e^{-1/2}}{2\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{e^{-2}}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{9}{10} + \frac{e^{-1/2}}{2\sqrt{2\pi n}} \cdot \frac{1}{10}} \\ &= \frac{e^{-1/2}/20}{e^{-2} \cdot 9/10 + e^{-1/2}/20}, \end{aligned}$$

non dipende da  $n$  (in particolare, è la stessa del punto precedente).

### Problema 21

Un'azienda farmaceutica vende un farmaco in confezioni da 10 pillole. Gli addetti al controllo qualità sanno che il 90% delle pillole prodotte sono "normali", mentre il rimanente

10% sono “difettose”. Sanno anche che l’80% delle pillole “difettose” sono “inerti” (ossia non contengono il farmaco, ma non causano danni a chi le assume), mentre il rimanente 20% sono “pericolose” (ossia potrebbero provocare danni a chi le assume). Assumiamo inoltre che la “classificazione” di ciascuna pillola sia indipendente dalle altre pillole. Ci viene assegnata una confezione di 10 pillole.

1. Determinare la legge, il valore atteso e la varianza del numero di pillole “difettose”,  $D$ , nella confezione e lo stesso per il numero di pillole “pericolose”,  $P$ , rispetto alla informazione iniziale.
2. L’azienda farmaceutica stabilisce la seguente funzione di costo  $L(\hat{\theta}, z)$  legata al parametro  $\theta \in \{0, 1\}$ , definito  $\theta = 0$  se non ci sono pillole pericolose,  $\theta = 1$  se c’è almeno una pillola pericolosa nella confezione:

$$L(0, 0) = 0, \quad L(1, 0) = 10, \quad L(0, 1) = 40, \quad L(1, 1) = 10.$$

Quale decisione  $\hat{\theta} \in \{0, 1\}$  minimizza il rischio bayesiano associato  $\text{Risk}_L(\hat{\theta})$ , rispetto all’informazione iniziale? e sapendo che nella confezione ci sono esattamente 2 pillole difettose?

3. Supponiamo di sapere che la confezione non contenga alcuna pillola “pericolosa”. Qual è la legge, il valore atteso e la varianza del numero di pillole “difettose”? (*Sugg: calcolare prima  $P(P = 0|\Omega \cap \{D = k\})$ .*)

**Una soluzione:**

Per  $k \in \{1, \dots, 10\}$ , poniamo  $X_k \in \{0, 1\}$  la variabile indicatrice del fatto che la pillola  $k$  dentro la confezione sia “difettosa” (1) o no (0). In modo simile, poniamo  $Y_k \in \{0, 1\}$  la variabile che indica se la pillola è “pericolosa” (1) o no (0). Dal testo segue che

$$P(X_k = 1|\Omega) = 10\% = 0,1$$

$$P(Y_k = 1|\Omega) = P(Y_k = 1|\Omega \cap \{X_k = 1\})P(X_k = 1|\Omega) = 20\% \cdot 10\% = 0,02.$$

1) Le variabili  $D$  e  $P$  si scrivono, rispettivamente,

$$D = \sum_{k=1}^{10} X_k, \quad P = \sum_{k=1}^{10} Y_k,$$

e per l’ipotesi di indipendenza delle classificazioni di ciascuna pillola, segue che  $D$  ha legge  $\text{Bin}(10, 0,1)$ , mentre  $P$  ha legge  $\text{Bin}(10, 0,02)$ , quindi

$$\mathbb{E}[D|\Omega] = 10 \cdot 0,1 = 1, \quad \text{Var } D|\Omega = 10 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,9,$$

$$\mathbb{E}[P|\Omega] = 10 \cdot 0,02 = 0,2, \quad \text{Var } P|\Omega = 10 \cdot 0,02 \cdot 0,98 = 0,196.$$

2) Calcoliamo

$$P(\theta = 0|\Omega) = P(P = 0|\Omega) = (0,98)^{10}.$$

Questo è sufficiente per calcolare il rischio

$$\begin{aligned}\text{Risk}_L(0|\Omega) &= \mathbb{E}[L(0, \theta)|\Omega] \\ &= L(0, 0)P(P = 0|\Omega) + L(0, 1)(1 - P(P = 0|\Omega)) \\ &= 40 \cdot (1 - (0, 98)^{10}) \sim 8.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Risk}_L(1|\Omega) &= \mathbb{E}[L(1, \theta)|\Omega] \\ &= L(1, 0)P(P = 0|\Omega) + L(1, 1)(1 - P(P = 0|\Omega)) \\ &= 10P(P = 0|\Omega) + 10(1 - P(P = 0|\Omega)) = 10.\end{aligned}$$

Quindi la decisione che minimizza il rischio dato è  $\hat{\theta} = 0$  (ossia di comportarsi come se non vi fossero pillole pericolose).

Sapendo che  $D = 2$ , abbiamo invece

$$P(\theta = 0|\Omega \cap \{D = 2\}) = P(P = 0|\Omega \cap \{D = 2\}) = (0, 8)^2,$$

perché le due pillole “difettose” devono essere entrambe “inerti” (usando anche l’indipendenza tra le pillole). Di conseguenza

$$\text{Risk}_L(0|D = 2) = 40 \cdot (1 - (0, 8)^2) = 14, 4.$$

mentre  $\text{Risk}_L(1|D = 2) = 10$ . Quindi la decisione che minimizza il rischio è  $\hat{\theta} = 1$ .

3) Notiamo che, per  $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$ ,

$$P(P = 0|D = k) = (0, 8)^k,$$

perché le  $k$  pillole che sono “difettose” devono essere tutte “inerti” (usando anche l’indipendenza tra le pillole). Poi, con la formula di Bayes,

$$\begin{aligned}P(D = k|P = 0) &= \frac{P(P = 0|D = k)P(D = k|\Omega)}{P(P = 0|\Omega)} \\ &= \frac{(0, 8)^k \binom{10}{k} (0, 1)^k (0, 9)^{10-k}}{(0, 98)^{10}} \\ &= \binom{10}{k} (0, 08)^k (0, 9)^{10-k} \frac{1}{(0, 98)^{10}} \\ &= \binom{10}{k} \left(\frac{8}{98}\right)^k \left(\frac{90}{98}\right)^{10-k}.\end{aligned}$$

Perciò deduciamo che la legge di  $D$  è  $\text{Bin}(10, \frac{8}{98})$ . Quindi

$$\mathbb{E}[D|P = 0] = \frac{80}{98} \sim 0.81, \quad \text{Var } D|P = 0 = 10 \cdot \frac{8}{98} \cdot \frac{90}{98} \sim 0.75.$$

## Problema 22

Un’urna contiene inizialmente una sola pallina, di colore  $\theta \in \{R, B\}$  (rosso o blu), e  $P(\theta =$

$R|\Omega) = P(\theta = B|\Omega) = 1/2$ . Sia  $L : \{R, B\}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la seguente funzione costo (associata a  $\theta$ )

$$L(R, R) = 0, \quad L(R, B) = 1000, \quad L(B, R) = 20, \quad L(B, B) = 10.$$

1. Quale decisione  $\hat{\theta} \in \{R, B\}$  minimizza il rischio associato ad  $L$ , rispetto all'informazione iniziale  $\Omega$ ?
2. Per investigare il contenuto dell'urna, si prende una pallina rossa, del tutto identica a quella contenuta nell'urna eccetto possibilmente per il colore, la si inserisce nell'urna, si agita bene e poi si estrae una pallina senza guardare. Sapendo che la pallina estratta è rossa, quale decisione  $\hat{\theta} \in \{R, B\}$  minimizza il rischio associato ad  $L$ ? (*Suggerimento: calcolare la probabilità di  $\{\theta = R\}$  rispetto alla nuova informazione*)
3. Supponiamo di ripetere l'operazione descritta al secondo punto un numero  $n \geq 1$  di volte, ogni volta inserendo una pallina rossa, agitando, ed estraendo una pallina che si ottiene rossa. Determinare il minimo  $n \geq 1$  in modo tale che la decisione che minimizza il rischio  $L$  sia  $\hat{\theta} = R$ . (*Suggerimento: ragionare prima nei casi  $n = 2, 3 \dots$* )

**Una soluzione:**

1. Calcoliamo il rischio associato alla decisione  $\hat{\theta} = R$

$$\text{Risk}(R|\Omega) = \mathbb{E}[L(R, \theta)|\Omega] = L(R, R)\frac{1}{2} + L(R, B)\frac{1}{2} = 500,$$

e alla decisione  $\hat{\theta} = B$

$$\text{Risk}(B|\Omega) = \mathbb{E}[L(B, \theta)|\Omega] = L(B, R)\frac{1}{2} + L(B, B)\frac{1}{2} = 15,$$

per cui  $\hat{\theta} = B$  minimizza il rischio.

2. Sia  $X_1 \in \{R, B\}$  la variabile aleatoria che indica l'esito della prima estrazione. Si tratta di calcolare  $P(\theta = R|X_1 = R)$  e  $P(\theta = B|X_1 = R) = 1 - P(\theta = R|X_1 = R)$ . Usiamo la formula di Bayes

$$P(\theta = R|X_1 = R) = \frac{P(X_1 = R|\theta = R)P(\theta = R|\Omega)}{P(X_1 = R|\Omega)}$$

e calcoliamo

$$P(X_1 = R|\theta = R) = 1 \quad \text{e} \quad P(X_1 = R|\theta = B) = \frac{1}{2}$$

perché nelle due situazioni si tratta di estrarre da un'urna con due palline rosse e rispettivamente una rossa e una blu. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} P(X_1 = R|\Omega) &= P(X_1 = R|\theta = R)P(\theta = R|\Omega) + P(X_1 = R|\theta = B)P(\theta = B|\Omega) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

e infine

$$P(\theta = R|X_1 = R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Di conseguenza,  $P(\theta = B|X_1 = R) = 1/3$  e

$$\text{Risk}(R|X_1 = R) = \mathbb{E}[L(R, \theta)|X_1 = R] = L(R, R)\frac{2}{3} + L(R, B)\frac{1}{3} = \frac{1000}{3} \approx 333,$$

mentre

$$\text{Risk}(B|X_1 = R) = \mathbb{E}[L(B, \theta)|X_1 = R] = L(B, R)\frac{2}{3} + L(B, B)\frac{1}{3} = \frac{50}{3} \approx 16,$$

per cui  $\hat{\theta} = B$  ancora minimizza il rischio.

3. Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n \in \{R, B\}$  variabili aleatorie che indicano l'esito delle  $n$  estrazioni. Poniamo l'evento  $A = \{X_1 = X_2 = \dots = X_n = R\}$  e calcoliamo con la formula di Bayes

$$P(\theta = R|A) = \frac{P(A|\theta = R)P(\theta = R|\Omega)}{P(A|\Omega)}.$$

Osserviamo che

$$P(A|\theta = R) = 1, \quad \text{e} \quad P(A|\theta = B) = \frac{1}{2^n},$$

perché nel primo caso stiamo effettuando  $n$  estrazioni da un'urna che contiene solo palline rosse, nel secondo invece facciamo  $n$  estrazioni con rimpiazzo da un'urna che contiene una rossa e una blu. Otteniamo allora

$$P(A|\Omega) = P(A|\theta = R)P(\theta = R|\Omega) + P(A|\theta = B)P(\theta = B|\Omega) = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \frac{1}{2},$$

e infine

$$P(\theta = R|A) = \frac{1}{1 + 2^{-n}} \quad P(\theta = B|A) = \frac{2^{-n}}{1 + 2^{-n}}.$$

Di conseguenza,

$$\text{Risk}(R|A) = \mathbb{E}[L(R, \theta)|A] = \frac{2^{-n}1000}{1 + 2^{-n}}$$

mentre

$$\text{Risk}(B|A) = \mathbb{E}[L(B, \theta)|A] = \frac{20 + 10 \cdot 2^{-n}}{1 + 2^{-n}}.$$

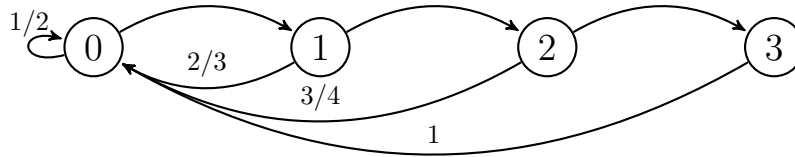
Per concludere, basta capire per quali  $n$  si ha

$$2^{-n}1000 < 20 + 10 \cdot 2^{-n} \quad \text{ossia} \quad 2^n > \frac{99}{2} \approx 50.$$

Siccome  $2^5 = 32$  e  $2^6 = 64$ , si trova che  $n = 6$ .

### Problema 23

Un programma segue una procedura di aggiornamento in tre fasi (scaricamento (1), decompressione (2), installazione (3)) al termine del quale ritorna nello stato iniziale (0), come pure se qualcosa va storto nella procedura. Possiamo schematizzare il processo con una catena di Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  rappresentata graficamente come segue:



1. Completare con le probabilità mancanti, scrivere la matrice di transizione  $Q$  della catena, e calcolarne tutte le distribuzioni invarianti.
2. Supponendo al tempo  $n = 0$  la catena  $(X_n)_{n \geq 0}$  sia nello stato 0, si osserva poi che  $X_4 = 0$ . Qual è la probabilità che sia  $X_3 = 3$ ?
3. Posta  $X_0 = \theta \in \Theta = \{0, 1, 2, 3\}$ , si consideri la funzione di costo  $L : \Theta^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L(\hat{\theta}, \theta) = |\hat{\theta} - \theta|$ . Quale decisione  $\hat{\theta}$  minimizza il rischio associato ad  $L$ , sapendo che la catena è stazionaria? e sapendo invece che la distribuzione di  $X_0$  è uniforme su  $\{0, 1, 2, 3\}$ ?

**Una soluzione:**

1. La matrice di transizione (completata con le probabilità mancanti) è

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare le distribuzioni invarianti, risolviamo il sistema  $(Q^T - I)v = 0$ , con  $v \in \mathbb{R}^4$ , tramite riduzione a gradini

$$\begin{aligned} Q^T - I &= \begin{pmatrix} -1/2 & 2/3 & 3/4 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 2/3 & 3/4 & 1 \\ 0 & -1/3 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 2/3 & 3/4 & 1 \\ 0 & -1/3 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 2/3 & 3/4 & 1 \\ 0 & -1/3 & 3/4 & 1 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 2/3 & 0 & 4 \\ 0 & -1/3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & -1/3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui  $v = (24, 12, 4, 1)t$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Imponendo che la somma delle componenti sia 1, troviamo  $t = 1/(24+12+4+1) = 1/41$ , ossia l'unica distribuzione invariante è associata al vettore riga

$$\mu = \frac{1}{41}(24, 12, 4, 1)$$

2. Dobbiamo calcolare

$$P(X_3 = 3|X_0 = 0 \text{ e } X_4 = 0) = \frac{P(X_4 = 0|X_0 = 0 \text{ e } X_3 = 3)P(X_3 = 3|X_0 = 0)}{P(X_4 = 0|X_0 = 0)},$$

avendo usato la formula di Bayes. Per la proprietà di Markov,

$$P(X_4 = 0|X_0 = 0 \text{ e } X_3 = 3) = P(X_4 = 0|X_3 = 3) = 1.$$

Inoltre, se la catena al tempo 0 si trova in 0, l'unico modo (con probabilità non nulla) per raggiungere lo stato 3 al tempo  $X_3 = 3$  è di seguire il percorso  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ , quindi

$$\begin{aligned} P(X_3 = 3|X_0 = 0) &= P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(X_2 = 2|X_1 = 1)P(X_3 = 3|X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

avendo usato anche la proprietà di Markov. Per calcolare  $P(X_4 = 0|X_0 = 0)$  possiamo usare potenze di  $Q$ : precisamente, è data dalla prima componente del vettore riga  $(1, 0, 0, 0)Q^4$ . Per risparmiare qualche calcolo, possiamo calcolare prima

$$Q^2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che

$$(1, 0, 0, 0)Q^4 = (1, 0, 0, 0)Q^2 \cdot Q^2 = \left(\frac{7}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, 0\right)Q^2 = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{6} \cdot \frac{17}{24}.$$

In conclusione, abbiamo

$$P(X_3 = 3|X_0 = 0 \text{ e } X_4 = 0) = \frac{6}{5 \cdot 17} \approx 0,07.$$

3. Si tratta di calcolare i rischi associati a ciascuna decisione  $\hat{\theta}$ . Consideriamo il caso, in cui la catena è stazionaria, quindi la legge di  $X_0$  è data dal vettore  $\frac{1}{41}(24, 12, 4, 1)$  trovato prima. Calcoliamo

$$\text{Risk}(\hat{\theta} = 0|\text{staz.}) = \frac{1}{41} \cdot (|0 - 0| \cdot 24 + |1 - 0| \cdot 12 + |2 - 0| \cdot 4 + |3 - 0| \cdot 1) = \frac{23}{41}$$

$$\text{Risk}(\hat{\theta} = 1|\text{staz.}) = \frac{1}{41} \cdot (|0 - 1| \cdot 24 + |1 - 1| \cdot 12 + |2 - 1| \cdot 4 + |3 - 1| \cdot 1) = \frac{30}{41}$$

$$\text{Risk}(\hat{\theta} = 2|\text{staz.}) = \frac{1}{41} \cdot (|0 - 2| \cdot 24 + |1 - 2| \cdot 12 + |2 - 2| \cdot 4 + |3 - 2| \cdot 1) = \frac{61}{41}$$

$$\text{Risk}(\hat{\theta} = 3|\text{staz.}) = \frac{1}{41} \cdot (|0 - 3| \cdot 24 + |1 - 3| \cdot 12 + |2 - 3| \cdot 4 + |3 - 3| \cdot 1) = \frac{100}{41},$$



da cui la decisione minimizzante è  $\hat{\theta} = 0$ . Nel secondo caso, la legge di  $X_0$  è data dal vettore  $\frac{1}{4}(1, 1, 1, 1)$ , e calcoliamo

$$\text{Risk}(\hat{\theta} = 0|\text{unif.}) = \frac{1}{4} \cdot (|0 - 0| + |1 - 0| + |2 - 0| + |3 - 0|) = \frac{6}{4}$$

$$\text{Risk}(\hat{\theta} = 1|\text{unif.}) = \frac{1}{4} \cdot (|0 - 1| + |1 - 1| + |2 - 1| + |3 - 1|) = \frac{4}{4}$$

$$\text{Risk}(\hat{\theta} = 2|\text{unif.}) = \frac{1}{4} \cdot (|0 - 2| + |1 - 2| + |2 - 2| + |3 - 2|) = \frac{4}{4}$$

$$\text{Risk}(\hat{\theta} = 3|\text{unif.}) = \frac{1}{4} \cdot (|0 - 3| + |1 - 3| + |2 - 3| + |3 - 3|) = \frac{6}{4}.$$

In questo caso troviamo che sia  $\hat{\theta} = 1$  sia  $\hat{\theta} = 2$  sono decisioni minimizzanti.