INETTIVITÀ DELLA FUNZIONE CARATTERISTICA

DARIO TREVISAN

In queste pagine proponiamo una dimostrazione leggermente diversa del Teoremi 3.2.2 e del Corollario 3.2.3 degli appunti di M. Pratelli [1], evitando la formula di inversione Proposizione 3.2.1 e usando invece una proprietà di isometria della funzione caratteristica (o della trasformata di Fourier), valida per variabili aleatorie assolutamente continue con densità di quadrato integrabile. Nonostante forse l'approccio risulti leggermente più lungo, riteniamo che la proprietà di isometria vada maggiormente evidenziata.[1]

Osserviamo preliminarmente il seguente risultato generale relativo alla densità della somma di due variabili indipendenti, di cui almeno una assolutamente continua.

Lemma 1. *Siano X, Y variabili aleatorie reali indipendenti e Y assolutamente contina, con densità f. Allora la variabile $Z = X+Y$ è assolutamente continua con densità g data dalla seguente* formula di convoluzione*:*

$$g(z) = \mathbb{E}\left[f(z-X)\right] = \int_{\mathbb{R}} f(z-x)\mathrm{d}P_X(x).$$

Dimostrazione. Dato $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned}
P((X+Y) \in A) &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} I_A(x+y)\mathrm{d}(P_X \otimes P_Y)(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} I_A(x+y)f(y)\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}P_X(x) \quad \text{(teorema di Fubini-Tonelli)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} I_A(z)f(z-x)\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}P_X(x) \quad \text{(cambio di variabile } z = x+y\text{)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} I_A(z) \left[\int_{\mathbb{R}} f(z-x)\mathrm{d}P_X(x)\right] \mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

dove l'ultima identità segue ancora dal teorema di Fubini-Tonelli applicato stavolta alla misura σ-finita $\mathcal{L}^1 \otimes P_X$. Abbiamo quindi trovato che

$$P(Z \in A) = \int_A g(z)\mathrm{d}z,$$

pertanto la tesi è dimostrata. □

Osservazione 2. Un caso particolarmente utile del lemma precedente è dato da $Y = \sqrt{\varepsilon}N$, dove N ha legge gaussiana standard $\mathcal{N}(0,1)$, ed $\varepsilon > 0$. In tal caso si trova

$$g_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(z-x)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\mathrm{d}P_X(x)$$

[1] Questo file sostituisce quindi (ai fini del corso) la sezione 3.2 degli appunti [1].

Usando la diseguaglianza

$$\frac{e^{-(z-x)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}},$$

otteniamo che $g_\varepsilon(z)$ è uniformemente limitata (per ogni $\varepsilon > 0$ fissato)

$$g_\varepsilon(z) \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \mathrm{d}P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}},$$

e anche continua (applicando il teorema di convergenza dominata di Lebesgue).

Osserviamo infine che, se in aggiunta X ammette densità continua e limitata $h(x)$, allora per ogni $z \in \mathbb{R}$,

$$g_\varepsilon(z) \leq \sup_x h(x),$$

e

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(z-x)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} h(x) \mathrm{d}x = h(z).$$

Infatti, notiamo che, per ogni $z \in \mathbb{R}$, la funzione

$$x \mapsto \frac{e^{-(z-x)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}$$

è la densità di una gaussiana $\mathcal{N}(z, \varepsilon)$, quindi possiamo scrivere

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-(z-x)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} h(x) \mathrm{d}x = \mathbb{E}\left[h(z + \sqrt{\varepsilon} N)\right] \leq \sup_x h(x)$$

dove N ha legge gaussiana standard $\mathcal{N}(0,1)$. Al tendere di ε a 0, possiamo applicare il teorema di Lebesgue alle variabili aleatorie $h(z + \sqrt{\varepsilon} N)$ che convergono puntualmente verso $h(z)$ e dominate da $\sup_x h(x)$ (ricordando che h è continua e limitata).

Veniamo quindi al seguente risultato di *isometria*[2] della funzione caratteristica. Esso può essere considerato un analogo della identità di Plancherel per sistemi ortonormali completi in spazi di Hilbert (il sistema in questione sarebbe la famiglia di funzioni $x \mapsto e^{itx}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$, nello spazio $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{L}^2)$, che tuttavia non può essere rigorosamente considerato un tale sistema ortonormale).

Teorema 3. *Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua, con densità continua e limitata f. Posta φ la funzione caratteristica di X, vale l'identità*

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Osserviamo che la tesi dipende solamente dalla legge di X. Pertanto possiamo anche assumere che X sia definita in uno spazio di probabilità in cui esiste una variabile N indipendente da X avente legge gaussiana standard (basta usare la costruzione della probabilità prodotto). Per ogni

[2] a meno di un fattore costante 2π.

$\varepsilon > 0$, indichiamo con g_ε la densità della variabile $X + \sqrt{\varepsilon/2}N$ e con φ_ε la sua funzione caratteristica, per cui sappiamo valere l'identità

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t)e^{-\varepsilon t^2/4},$$

ricordando la funzione caratteristica delle gaussiane. Studiamo quindi la tesi per ogni $\varepsilon > 0$ e successivamente faremo tendere $\varepsilon \to 0$. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\varphi_\varepsilon(t)|^2 \mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\overline{\varphi(t)}e^{-\varepsilon t^2/2}\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\varphi(-t)e^{-\varepsilon t^2/2}\mathrm{d}t \quad (\text{perché } \varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-ity}\mathrm{d}y e^{-\varepsilon t^2}\mathrm{d}t \quad (\text{per definizione di } \varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x)f(y)\left[\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2/2}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

avendo applicato il teorema di Fubini-Tonelli. Infatti basta verificare che il seguente integrale è finito:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x)f(y)e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2}|\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} < \infty.$$

Per proseguire notiamo che l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2/2}\mathrm{d}t$$

è, a meno di un fattore $\sqrt{\varepsilon/(2\pi)}$, la funzione caratteristica di una variabile gaussiana $\mathcal{N}(0, 1/\varepsilon)$ valutata in $(x-y)$. Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)}e^{-\varepsilon t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}}e^{-(x-y)^2/(2\varepsilon)} = (2\pi)\frac{e^{-(x-y)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}.$$

Abbiamo quindi trovato

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\varphi_\varepsilon(t)|^2\mathrm{d}t &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x)f(y)\frac{e^{-(x-y)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\pi\int_{\mathbb{R}} f(y)\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-(x-y)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

avendo usato nuovamente il teorema di Fubini-Tonelli (notiamo che in questo caso l'integrando è positivo). Per l'osservazione 2, abbiamo che, per ogni y,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-(x-y)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}f(x)\mathrm{d}x = f(y),$$

inoltre possiamo applicare il teorema di Lebesgue per passare al limite nell'integrale rispetto alla variabile y, sfruttando la dominazione

$$f(y)\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-(x-y)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}f(x)\mathrm{d}x \le f(y)\sup_x f(x).$$

Ne segue che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi\int_{\mathbb{R}} f(y)\left[\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-(x-y)^2/(2\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = (2\pi)\int_{\mathbb{R}} f(y)^2\mathrm{d}y.$$

D'altra parte, per ogni $t \in \mathbb{R}$, per $\varepsilon \to 0$, abbiamo la convergenza monotona

$$|\varphi_\varepsilon(t)|^2 = |\varphi(t)|^2 e^{-\varepsilon t^2} \uparrow |\varphi(t)|^2$$

e quindi il teorema di Beppo-Levi assicura che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_\varepsilon(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 \mathrm{d}t$$

completando la dimostrazione. □

Osservazione 4. Chiaramente il risultato appena visto si può anche leggere in termini di trasformata di Fourier di funzioni f positive, continue e limitate con $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2 \mathrm{d}t = (2\pi) \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Osserviamo che la condizione $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$ si può facilmente rilassare in $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x < \infty$, ossia f integrabile (basta applicare il risultato ad $f / \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$).

In realtà, anche se non lo useremo, anche l'ipotesi di positività di f si può rimuovere (basta ripetere con cura la dimostrazione in particolare nelle applicazioni di Fubini-Tonelli). Infine con un argomento di approssimazione, si otterrebe la tesi per ogni f integrabile e pure di quadrato integrabile, rimuovendo l'ipotesi di continuità e la limitatezza.

Vediamo come ottenere di conseguenza il Corollario 3.2.3 di [1] (formula di inversione nel caso di funzione caratteristica integrabile).

Corollario 5. *Sia X una variabile aleatoria tale che la sua funzione caratteristica φ sia integrabile, ossia $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\mathrm{d}t < \infty$. Allora X è assolutamente continua con densità (continua e limitata)*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-itx} \mathrm{d}t.$$

È facile osservare che il membro a destra è un numero reale: vale infatti

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-itx} \mathrm{d}t\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \varphi(-t) e^{itx} \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(t)} e^{itx} \mathrm{d}t = \overline{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-itx} \mathrm{d}t}.$$

Anche la continuità di $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-itx} \mathrm{d}t$ segue facilmente dal teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Dimostrazione. Mostriamo prima la validità della formula nel caso in cui sappiamo già che X abbia densità continua e limitata f, e poi la estendiamo nel caso generale. Data una funzione g integrabile, continua, limitata e non-negative (ad esempio g continua non-negativa e a supporto compatto) usiamo l'identità (1) con $f + g$ invece di f:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t) + \hat{g}(t)|^2 \mathrm{d}t = (2\pi) \int_{\mathbb{R}} |f(x) + g(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

Sviluppando i quadrati e usando le rispettive identità per f e g, ne segue che

$$\Re \left\{ \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) \overline{\hat{f}(t)} \mathrm{d}t \right\} = (2\pi) \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Possiamo anche scrivere, usando il legame tra transformata di Fourier e funzione caratteristica,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t)\overline{\hat{f}}(t)\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx}\mathrm{d}x\right]\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-itx}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

dove la seconda identità segue dal teorema di Fubini-Tonelli, perché

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |g(x)\varphi(t)e^{-itx}|\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\mathrm{d}t < \infty.$$

Non serve quindi considerare la parte reale nell'identità (2), che possiamo anche riscrivere come

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-itx}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = (2\pi)\mathbb{E}\left[g(X)\right],$$

ricordando che f è la densità di X. In particolare, siccome $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-itx}\mathrm{d}t$ è continua, dall'identità segue che deve essere non-negativa (altrimenti potremmo scegliere una g supportata su un intervallo in cui è strettamente negativa e trovare un assurdo). Infine, scegliendo una successione g_n di funzioni continue e a supporto compatto tali che $g_n(x) \uparrow 1$, per Beppo-Levi deduciamo che

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-itx}\mathrm{d}t$$

è una densità di probabilità. A questo punto basta ricordare che se due probabilità μ, ν sulla retta reale sono tali per cui i rispettivi integrali di ogni funzione continua a supporto compatto g coincidano, allora $\mu = \nu$. Questo conclude la dimostrazione nel caso in cui sappiamo già che X abbia densità continua e limitata f.

Per concludere nel caso generale, basta considerare le variabili ausiliarie $X + \sqrt{\varepsilon}N$, dove N è gaussiana standard, per ogni $\varepsilon > 0$. Di queste sappiamo già che hanno ciascuna densità continua e limitata, inoltre la funzione caratteristica è data da

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t)e^{-\varepsilon t^2/2}.$$

Al tendere di $\varepsilon \to 0$, per convergenza dominata (da $|\varphi(t)|$) si ottiene quindi che per ogni $x \in \mathbb{R}$, le densità convergono:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t)e^{-itx}\mathrm{d}t \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-itx}\mathrm{d}t.$$

Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t)e^{-itx}\mathrm{d}t \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\mathrm{d}t.$$

Di conseguenza, data una funzione continua a supporto compatto g, ancora per convergenza dominata,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left[g(X+\sqrt{\varepsilon}N)\right] &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} g(x)\left[\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t)e^{-itx}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\left[\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-itx}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

e la tesi è mostrata anche nel caso generale. □

Vediamo infine come mostrare il teorema di iniettività della funzione caratteristica (Teorema 3.2.2 in [1]).

Teorema 6. *Siano X, Y variabili aleatorie reali tali che $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora X e Y sono equidistribuite, ossia $P_X = P_Y$.*

Notiamo che l'enunciato riguarda solamente le leggi di X ed Y, e che le due variabili non devono essere necessariamente definite sullo stesso spazio di probabilità (anche se noi lo supporremo nella dimostrazione).

Dimostrazione. Chiamiamo $\varphi = \varphi_X = \varphi_Y$ la (comune) funzione caratteristica. Osserviamo che se φ è integrabile, allora il risultato precedente ci assicura che le due variabili hanno la stessa densità, e quindi la stessa legge. Nel caso generale, possiamo considerare per ogni $\varepsilon > 0$ le solite variabili $X + \sqrt{\varepsilon}N$, $Y + \sqrt{\varepsilon}N'$, dove N è indipendente da X e N' indipendente da Y e sono entrambe gaussiane standard. Avremo allora che le funzioni caratteristiche continuano a coincidere e sono date da $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t)e^{-\varepsilon t^2/2}$, che è integrabile perché $|\varphi(t)| \leq 1$. Di conseguenza, $X + \sqrt{\varepsilon}N$ ha la stessa legge di $Y + \sqrt{\varepsilon}N'$ e quindi per ogni funzione g continua e limitata,

$$\mathbb{E}\left[g(X)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[g(X + \sqrt{\varepsilon}N)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\left[g(Y + \sqrt{\varepsilon}N')\right] = \mathbb{E}\left[g(Y)\right],$$

dove i rispettivi limiti sono giustificati tramite convergenza dominata. □

Citiamo l'applicazione dell'iniettività della funzione caratteristica al problema dei momenti (Corollario 3.2.5 in [1]).

Corollario 7. *Siano X, Y variabili aleatorie reali tali che, per ogni $n \geq 1$, $\mathbb{E}\left[X^n\right] = \mathbb{E}\left[Y^n\right]$ e valga la maggiorazione*

$$\frac{\mathbb{E}\left[|X|^n\right]}{n!} \leq \frac{M}{r^n},$$

per qualche $M > 0$, $r > 0$ (indipendenti da n). Allora X e Y sono equidistribuite.

Dimostrazione. Abbiamo già visto nel Corollario 3.1.6 [1] che le ipotesi implicano $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. □

Osservazione 8 (caso vettoriale). È importante poter estendere i risultati appena visti dal caso reale al caso di vettori aleatori $X = (X_j)_{j=1}^d$ a valori in $\mathbb{R}^d$, dove la funzione caratteristica φ_X è definita per $t = (t_j)_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle t, X\rangle}\right],$$

e $\langle t, X\rangle = \sum_{j=1}^d t_j X_j$. Non vi sono particolari differenze concettuali, l'unico punto tecnico consiste nell'usare gaussiane vettoriali standard, ossia vettori costituiti da d variabili gaussiane reali standard e indipendenti. Una differenza sta nel fatto che i fattori 2π andranno sostituiti con $(2\pi)^d$, sia nel Teorema 3 che nel Corollario 5.

Un'osservazione meno banale che segue dall'estensione del Teorema 6 nel caso vettoriale e il seguente risultato.

Corollario 9. *Siano X, Y variabili aleatorie vettoriali a valori in $\mathbb{R}^d$. Se, per ogni $t \in \mathbb{R}^d$, le variabili reali $\langle t, X\rangle$, $\langle t, Y\rangle$ sono equidistribuite, allora X e Y sono equidistribuite.*

Dimostrazione. È sufficiente notare che dall'ipotesi segue direttamente che $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}^d$. □

Osserviamo che in generale, anche se X è un vettore aleatorio tale che per ogni $j \in \{1, \ldots, d\}$, la legge della variabile *marginale* X_j sia nota, non possiamo "ricostruire" la legge di X in modo unico. Il corollario invece dice che tale operazione è possibile (almeno in teoria) se conosciamo la legge di tutte le proiezioni $\langle t, X\rangle$, $t \in \mathbb{R}^d$. Si pone quindi il seguente problema generale: con quanta precisione/incertezza possiamo individuare la legge di un vettore aleatorio X conoscendo la legge delle proiezioni $\langle t, X\rangle$ al variare di t in una data famiglia di direzioni? Tale problema è strettamente collegato con lo studio della *tomografia*, in cui si vuole ricostruire un oggetto a partire da una collezione di sue proiezioni (ottenute ad esempio misurando l'assorbimento di una radiazione fisica puntata opportunamente sull'oggetto).

In particolare otteniamo il seguente utile criterio di indipendenza.

Corollario 10. *Siano X, Y variabili aleatorie reali tali che*

$$\varphi_{(X,Y)}(s,t) = \varphi_X(s)\varphi(t)$$

per ogni s, $t \in \mathbb{R}$. Allora X e Y sono indipendenti.

Dimostrazione. Il membro a destra è la funzione caratteristica di un vettore aleatorio avente le stesse marginali di X e Y ed indipendenti. □

Riferimenti bibliografici

[1] M. Pratelli: "Un corso di Calcolo delle Probabilità." Disponibile alla pagina http://people.dm.unipi.it/trevisan/didattica/2019-2020/AppuntiProb15-16.pdf

Università degli studi di Pisa, Italy
Email address, D. Trevisan: dario.trevisan@unipi.it