UNA COSTRUZIONE DEL PROCESSO DI POISSON

DARIO TREVISAN

In queste pagine proponiamo una dimostrazione alternativa rispetto alla sezione 7.3 di [1]del risultato di esistenza di un processo di Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ definito su un opportuno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sia $\lambda > 0$ un parametro. Ricordiamo che un processo di Poisson di intensità λ, $(N_t)_{t\geq 0}$, è tale che

(i) $N_0 = 0$ ($\mathbb{P}$-q.c.)
(ii) ha incrementi indipendenti: dati comunque $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, le variabili
$$N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$
sono indipendenti,
(iii) ha incrementi stazionari con legge Poisson: $N_t - N_s$ ha legge Poisson di parametro $\lambda(t-s)$ per ogni $s \leq t$,
(iv) le traiettorie $t \mapsto N_t(\omega)$ sono continue a destra (per $\mathbb{P}$-quasi ogni $\omega \in \Omega$).

Costruiamo prima un processo $(N_t)_{t\in[0,1]}$ che soddisfi le condizioni sopra (limitandoci però ai tempi $t \leq 1$) poi si procede "incollando" opportunamente infinite copie indipendenti della costruzione. Sia M una variabile Poisson di parametro λ e siano $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ variabili aleatorie uniformi su $[0,1]$. Supponiamo inoltre che M e le X_i siano tutte indipendenti tra loro. Uno spazio $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ in cui siano definite esiste per la costruzione della misura prodotto infinito. Definiamo, per $t \in [0,1]$,
$$N_t(\omega) := \sum_{j=1}^{M(\omega)} I_{\{X_j(\omega)\leq t\}} = \sum_{m=0}^{\infty} I_{\{M(\omega)=m\}} \sum_{j=1}^{m} I_{\{X_j(\omega)\leq t\}},$$
(nell'evento in cui $M(\omega) < \infty$, altrimenti poniamo $N_t(\omega) = 0$). Osserviamo che la traiettoria
$$t \mapsto N_t(\omega) \in \mathbb{N}$$
è crescente, continua a destra (similmente al caso di una funzione di ripartizione), e vale
$$N_0(\omega) = 0, \quad N_1(\omega) = M(\omega)$$
per $\mathbb{P}$-q.o. $\omega \in \Omega$. Le proprietà (i) e (iv) sono quindi soddisfatte. Per mostrare le rimanenti (ii) e (iii) iniziamo con un lemma elementare.

Lemma 1. *Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t_n = 1$ ed m variabili $(X_j)_{j=1}^m$ indipendenti ciascuna con legge uniforme su $[0,1]$. Dati $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ con $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$, l'evento*

$$A = \left\{ \text{ per ogni } i = 1, \ldots, n, \text{ esattamente } k_i \text{ tra le } (X_j)_{j=1}^m \text{ sono in } (t_{i-1}, t_i] \right\}$$

ha probabilità

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!}\prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{k_i}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che nel caso $n = 2$ ci si riconduce esattamente alla densità binomiale, infatti si tratta di contare il numero di variabili che appartengono all'intervallo $(0, t_1]$, e quindi abbiamo m esperimenti indipendenti in cui la probabilità di successo in ciascun esperimento è $\mathbb{P}(X_1 \in (0, t_1]) = t_1$. Nel caso generale basta procedere similmente alla dimostrazione per la densità binomiale. Data una sequenza $(c_j)_{j=1}^m \in \{1, \dots, n\}^m$ in cui appare esattamente k_i volte il numero i per ogni $i = 1, \dots, n$, allora la probabilità di

$$\big\{X_j \in (t_{c_{j-1}}, t_{c_j}] \text{ per ogni } j = 1, \dots, m\big\}$$

vale $t_1^{k_1}(t_2 - t_1)^{k_2} \dots (1 - t_{n-1})^{k_n}$ (in particolare non dipende dalla sequenza). Sommando sulle possibili sequenze $(c_j)_{j=1}^m$, che sono $\frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$ si ottiene la tesi. □

Dati quindi $t_0 = 0 \le t_1 \le \dots \le t_{n-1} \le t_n = 1$ e $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, mostriamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n) = \\ = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}\frac{((t_i - t_{i-1})\lambda)^{k_i}}{k_i!},\end{aligned}$$

ottenendo quindi sia l'indipendenza che la legge Poisson cercata per gli incrementi.

In tale evento, si ha quasi certamente che

$$M = N_1 = N_{t_n} = \sum_{i=1}^n N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = \sum_{i=1}^n k_i.$$

Pertanto, posto $m = \sum_{i=1}^n k_i$, abbiamo che, nell'evento,

$$N_t = \sum_{i=1}^m I_{\{X_i \le t\}}, \quad \text{e} \quad N_t - N_s = \sum_{i=1}^m I_{\{s < X_i \le t\}}$$

conta quindi il numero delle $(X_i)_{i=1}^m$ nell'intervallo $(s, t]$. Ne segue, usando il lemma,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n)\\ &= \mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = k_1, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n | M = m)\mathbb{P}(M = m)\\ &= \mathbb{P}(\ \forall i = 1, \dots, n,\ k_i \text{ tra le } (X_j)_{j=1}^m \text{ sono in } (t_{i-1}, t_i] | M = m)\mathbb{P}(M = m)\\ &= \mathbb{P}(\ \forall i = 1, \dots, n,\ k_i \text{ tra le } (X_j)_{j=1}^m \text{ sono in } (t_{i-1}, t_i])\mathbb{P}(M = m)\\ &= \frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!}\prod_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^{k_i}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},\end{aligned}$$

che è la probabilità cercata (ricordando che $m = \sum_{i=1}^n k_i$ e $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = 1$).

Per costruire un processo di Poisson definito su tutti i tempi $t \geq 0$, consideriamo una successione $(N^k)_{k=0}^{\infty}$ di variabili aleatorie indipendenti, ciascuna con la stessa legge della variabile $(N_t)_{t\in[0,1]}$ (pensata come variabile a valori nelle traiettorie $\mathbb{N}^{[0,1]}$). Di nuovo, usiamo la costruzione della probabilità prodotto infinita per costruire tale successione di variabili. Definiamo quindi, per ogni $t \geq 0$,

$$N_t := \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor -1} N_1^k + N_{t-\lfloor t \rfloor}^{\lfloor t \rfloor}.$$

Le proprietà (i) e (iv) sono evidenti, mentre per le proprietà (ii) e (iii), osserviamo che poiché la somma di Poisson indipendenti è Poisson (e i parametri si sommano), è sufficiente mostrarla per una successione di tempi $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ contenente tutti i tempi naturali compresi tra t_0 e t_n (basta infatti aggiungerli se non vi appartengono). Ma allora la (iii) è immediata mentre la (ii) segue da note proprietà dell'indipendenza (componendo separatamente tramite funzioni variablili aleatorie tra loro indipendenti, l'indipendenza è mantenuta).

Riferimenti bibliografici

[1] M. Pratelli: "Un corso di Calcolo delle Probabilità." Disponibile alla pagina http://people.dm.unipi.it/trevisan/didattica/2019-2020/AppuntiProb15-16.pdf

Università degli studi di Pisa, Italy
Email address, D. Trevisan: dario.trevisan@unipi.it