# Esercizi di Probabilità (070AA), a.a. 2021-2022

Rita Giuliano, Dario Trevisan

1 dicembre 2021

**Problema 1**

Dati due spazi misurabili $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$ e $X : E \to F$, mostrare che $\sigma(X) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\}$ è una $\sigma$-algebra ed è generata da $\mathcal{I} = \{X^{-1}(A)\}_{A \in I}$ se $I$ genera $\mathcal{F}$. Inoltre $\sigma(X) \subseteq \mathcal{E}$ se e solo se $X$ è misurabile.

**Una soluzione:**

Mostriamo che $\sigma(X)$ è una $\sigma$-algebra.

1. $E \in \sigma(X)$ perché $E = X^{-1}(F)$, e $F \in \mathcal{F}$;
2. Se $B \in \sigma(X)$, allora $B = X^{-1}(A)$, per qualche $A \in \mathcal{F}$. Dato che $B^c = X^{-1}(A^c)$, e $A^c \in \mathcal{F}$, si ha $B^c \in \sigma(X)$;
3. Sia $B_n \in \sigma(X)$. Allora $B_n = X^{-1}(A_n)$, per qualche $A_n \in \mathcal{F}$; dato che $\cup_n B_n = \cup_n \big(X^{-1}(A_n)\big) = X^{-1}\big(\cup_n A_n\big)$, e $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$, si ha $\cup_n B_n \in \sigma(X)$.

Mostriamo che $\mathcal{I}$ genera $\sigma(X)$.

1. Sia $\mathcal{C}$ una $\sigma-$ algebra che contiene $\mathcal{I}$; allora $\mathcal{C}$ contiene tutti gli elementi del tipo $B = X^{-1}(A)$, con $A \in \mathcal{F}$ (e dunque $\mathcal{C}$ contiene $\sigma(X)$): se $A \in \mathcal{F}$, allora esistono $A_n \in I$, tali che $A = \cup_n A_n$ oppure $A = \cap_n A_n$ (la $\sigma$-algebra generata da $I$ contiene solo tutte le unioni e tutte le intersezioni numerabili di insiemi di $I$, perché se contenesse anche insiemi di tipo diverso, la $\sigma$-algebra contenente solo tutte le unioni e tutte le intersezioni numerabili di insiemi di $I$ sarebbe una $\sigma$-algebra strettamente più piccola, e quindi sarebbe questa la $\sigma$-algebra generata da $I$).

   Ricapitolando, tutte le $\sigma-$ algebre che contengono $\mathcal{I}$ contengono $\sigma(X)$, e quindi la $\sigma-$algebra generata da $\mathcal{I}$ contiene $\sigma(X)$.
2. Viceversa, $\sigma(X)$ contiene $\mathcal{I}$, e di conseguenza contiene la $\sigma-$algebra generata da $\mathcal{I}$.

Infine, $X$ è misurabile se e solo se $X^{-1}(A) \in \mathcal{E}$ per ogni $A \in \mathcal{F}$, cioè se e solo se $\sigma(X) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{E}$.

**Problema 2**

Mostrare che la $\sigma$-algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ è generata pure dalle seguenti collezioni di insiemi $I$:

(i) $I = \{C \subseteq \mathbb{R}^d : C \text{ chiuso}\}$,

(ii) $I = \{C \subseteq \mathbb{R}^d : C \text{ compatto}\}$,

(iii) $I = \{C = A_1 \times A_2 \times \dots A_d \subseteq \mathbb{R}^d : A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ (tali insiemi sono anche detti rettangoli misurabili)

**Una soluzione:**

1. Dato che ogni chiuso è complementare di un aperto, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ contiene $I$, e dunque contiene la $\sigma-$ algebra generata da $I$. Viceversa, poiché ogni aperto è complementare di un chiuso, la $\sigma-$ algebra generata da $I$ contiene la $\sigma-$ algebra generata dagli aperti, e cioè $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

2. Poiché i compatti sono chiusi, la $\sigma-$ algebra generata da $I$ è contenuta in quella generata dai chiusi, che come abbiamo appena visto è $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Viceversa, gli insiemi aperti sono unione numerabile di insiemi chiusi e limitati, dunque la $\sigma-$ algebra generata dagli aperti, e cioè $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, è contenuta in quella generata dai compatti (cioè dai chiusi e limitati).

3. $I$ è contenuto in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dunque la $\sigma-$ algebra generata da $I$ è contenuta in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Viceversa, ogni aperto è unione numerabile di insiemi di $I$, quindi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ contiene la $\sigma-$ algebra generata da $I$.

**Problema 3**

Date due misure di probabilità $P$, $P'$ su $\mathbb{R}^d$, dire se coincidono qualora coincidano su una delle collezioni $I$ del punto precedente.

**Una soluzione:**

Ciascuna delle collezioni del punto precedente è stabile per intersezione, e due probabilità $P$ e $P'$ su $(\Omega, \mathcal{F})$ che coincidano su una famiglia di generatori $I$ stabile per intersezione coincidono dappertutto: infatti, prima di tutto possiamo supporre che $I$ contenga $\Omega$ (se non è così, si prende la famiglia $I' = I \cup \{\Omega\}$, che ovviamente è ancora stabile per intersezione). Poi si considera la classe

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{F} : P(A) = P'(A)\}$$

Allora

1. $\mathcal{M}$ contiene $I$;

2. $\mathcal{M}$ è stabile per unione crescente;

3. $\mathcal{M}$ è stabile per differenza insiemistica.

Dunque, per il Teorema delle Classi Monotone, $\mathcal{M}$ contiene la $\sigma-$ algebra generata da $I$, ovvero $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{F}$. Poiché è ovvia l'inclusione inversa, si conclude che $\mathcal{M} = \mathcal{F}$.

**Problema 4**

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^d$, definiamo $d(x, A) := \inf_{y \in A} |x - y|$. Mostrare che $d$ è continua e $d(x, A) = 0$ se e solo se $x \in \bar{A}$.

**Una soluzione:**

Sia $\{x_n\}$ una successione convergente a $x$. Si ha, per la disuguaglianza triangolare,

$$|x_n - y| = |x_n - x + x - y| \le |x - y| + |x_n - x|,$$

da cui

$$\inf_{y \in A} |x_n - y| \le \inf_{y \in A} |x - y| + |x_n - x|,$$

cioè

$$d(x_n, A) - d(x, A) \le |x_n - x|.$$

Scambiando i ruoli di $x_n$ e $x$ si ottiene anche

$$d(x_n, A) - d(x, A) \ge -|x_n - x|,$$

e quindi

$$\big|d(x_n, A) - d(x, A)\big| \le |x_n - x|,$$

da cui segue la continuità della funzione $d(\cdot, A)$.

Supponiamo che $x \in \bar{A}$. Allora esiste una successione $\{x_n\}$ di elementi di $A$, con $x_n \to x$. Per la continuità della funzione $d(\cdot, A)$, si ha allora

$$0 = d(x_n, A) \to d(x, A),$$

il che implica che $d(x, A) = 0$. Viceversa, se $d(x, A) = 0$, allora esiste una successione $\{y_n\}$ di elementi di $A$, con $|y_n - x| \to \inf_{y \in A} |x - y| = d(x, A) = 0$, cioè $y_n \to x$, e di conseguenza $x \in \bar{A}$.

**Problema 5**

Dimostrare la formula di integrazione rispetto alla misura immagine $P_X = X(P)$, dove $X$ è una variabile aleatoria a valori in uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$.

**Problema 6**

Siano $P$, $P'$ misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$ tali che

$$\int \varphi dP = \int \varphi dP'$$

per ogni $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continua e limitata. Dimostrare che $P = P'$. *Suggerimento: dato $C$ chiuso, approssimare puntualmente la funzione $I_C$ usando una successione ottenuta a partire dalla funzione $d(\cdot, C)$.*

**Una soluzione:**

Si approssima $I_C$ con la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nd(x, C) & 0 \leq d(x, C) < \frac{1}{n} \\ 0 & d(x, C) \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

**Problema 7**

Dare un esempio di classe monotona $\mathcal{M}$ in cui

1. manca la proprietà di unione numerabile;
2. manca la proprietà di intersezione numerabile;
3. manca la proprietà di passaggio al complementare.

Di conseguenza in ciascuno di questi casi $\mathcal{M}$ non è una $\sigma-$algebra.

**Una soluzione:**

1. Prendiamo $\Omega = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{M} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \Omega\}$. Si ha $\{1\} \in \mathcal{M}$, $\{2\} \in \mathcal{M}$ ma $\{1, 2\} \notin \mathcal{M}$.
2. Prendiamo $\Omega = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{M} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \Omega\}$. Si ha $\{1, 2\} \in \mathcal{M}$, $\{2, 3\} \in \mathcal{M}$ ma $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} = \{2\} \notin \mathcal{M}$.
3. Prendiamo $\Omega = \{1, 2\}$ e $\{\emptyset, \{1\}, \Omega\}$. Si ha $\{1\} \in \mathcal{M}$ ma $\{2\} = \{1\}^c \notin \mathcal{M}$.

**Problema 8**

Siano $P$ e $P^*$ due probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ e sia

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{F} : P(A) = P^*(A)\}.$$

$\mathcal{M}$ è una classe monotona ma non necessariamente una $\sigma-$algebra. Per trovare un esempio, si può considerare come $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ il lancio (ripetuto $n$ volte) di due monete equilibrate indipendenti, e come $P^*$ il risultato di due monete delle quali la prima è lanciata regolarmente ($n$ volte) e la seconda eguale alla prima.

**Una soluzione:**

Prendiamo $n = 2$. Si ha $\Omega = \{0,1\}^2$, e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Poniamo

$$A_1 = \{\text{esce testa sulla prima moneta}\} = \{(1,1),(1,0)\}$$

$$A_2 = \{\text{esce testa sulla seconda moneta}\} = \{(1,1),(0,1)\}$$

$$B_1 = \{\text{esce croce sulla prima moneta}\} = \{(0,1),(0,0)\}$$

$$B_2 = \{\text{esce croce sulla seconda moneta}\} = \{(1,0),(0,0)\}$$

È facile vedere che

$$\mathcal{M} = \{\emptyset, \Omega, A_1, A_2, B_1, B_2\}$$

e che $\mathcal{M}$ è una classe monotona. Tuttavia, per esempio, $A_1 \in \mathcal{M}$, $A_1 \in \mathcal{M}$ ma $A_1 \cap A_2 = \{(1,1)\} \notin \mathcal{M}$, e dunque $\mathcal{M}$ non è stabile per intersezione, quindi non è una $\sigma-$algebra.

**Problema 9**

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità, fissiamo $A \in \mathcal{F}$ e sia

$$\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{F} : A \text{ e } B \text{ sono indipendenti}\}.$$

$\mathcal{M}$ è una classe monotona ma non necessariamente una $\sigma-$algebra.

**Una soluzione:**

$\mathcal{M}$ è stabile per unione crescente: infatti, se $\{A_n\}$ sono una successione crescente di elementi di $\mathcal{M}$ e $A = \cup_n A_n$, si ha

$$P(A \cap B) = P\big((\cup_n A_n) \cap B\big) = P\big(\cup_n (A_n \cap B)\big) \underbrace{=}_{\substack{pass. al\, lim.\\ sulle\, succ. cresc.}}$$

$$= \lim_n P(A_n \cap B) \underbrace{=}_{\substack{indip.\\ di\, A_n\, e\, B}} \left\{\lim_n P(A_n)\right\} P(B) \underbrace{=}_{\substack{pass. al\, lim.\\ sulle\, succ. cresc.}} P(A)P(B).$$

Per vedere che $\mathcal{M}$ può non essere una $\sigma-$algebra, prendiamo lo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ per ogni $\omega \in \Omega$. Fissato $A = \{1,2\}$, è immediato vedere che

$$\mathcal{M} = \{\Omega, \emptyset, \{1,3\}, \{1,4\}\}.$$

$\mathcal{M}$ non è stabile per intersezione, perché, come si verifica subito, $\{1,3\} \cap \{1,4\} = \{1\} \notin \mathcal{M}$.

**Problema 10**

Provare che per ogni variabile aleatoria $X$ a valori non-negativi vale la formula (*di Cavalieri*)

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty P(X \geq t)dt = \int_0^\infty P(X > t)dt,$$

e più in generale, per ogni $p > 0$,

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty P(X > t)pt^{p-1}dt.$$

**Una soluzione:**

Sia $X$ una v.a.reale su $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e sia $\mu$ la sua legge.Sia $\lambda$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, e si consideri l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x\}.$$

Le sezioni di $A$ secondo le rette verticali e orizzontali sono rispettivamente

$$A(x) = \begin{cases} \{y \in \mathbb{R} : y \in (0, x)\} & x > 0 \\ \emptyset & x \leq 0 \end{cases}$$

e

$$A^{-1}(y) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} : x \in (y, +\infty)\} & y > 0 \\ \emptyset & y \leq 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\lambda(A(x)) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} = x^+,$$

$$\mu(A^{-1}(y)) = \begin{cases} \mu((y, +\infty)) = P(X > y) & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Si ha allora

$$\int_0^\infty dyP(X > y) = \int \lambda(dy)\mu(A^{-1}(y)) = \int \mu(dx)\lambda(A(x)) = \int \mu(dx)x^+ = E[X^+].$$

Partendo dall'insieme

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$$

si arriva alla formula

$$E[X^+] = \int_0^\infty dyP(X \geq y).$$

Ovviamente se $X$ è positiva quasi certamente, al posto di $X^+$ possiamo mettere $X$. Più in generale, applicando la formula si ha

$$E[|X|^p] = \int_0^\infty dyP(|X|^p > y) = \int_0^\infty dyP(|X| > y^{\frac{1}{p}}),$$

e con il cambio di variabili $y^{\frac{1}{p}} = z$ ($y = z^p$, $dy = pz^{p-1}dz$) si ottiene

$$E[|X|^p] = \int_0^\infty pz^{p-1} P(|X| > z) dz.$$

Se $X$ è a valori in $\mathbb{N}$, la funzione $y \mapsto P(X > y)$ è costante su ciascun intervallo del tipo $[n, n+1)$ ($n$ intero positivo, e quindi la formula diventa

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$$

**Problema 11**

Provare il seguente rafforzamento della disuguaglianza di Markov: per ogni variabile aleatoria $X$ integrabile si ha

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda P(|X| > \lambda) = 0.$$

**Una soluzione:**

$$\lambda P(|X| > \lambda) = E[\lambda 1_{\{|X| > \lambda\}}] \leq E[|X| 1_{\{|X| > \lambda\}}] \to 0, \qquad \lambda \to +\infty,$$

perché $X$ è integrabile.

Notare che, se $X$ ha momento di ordine $p > 1$, per la disuguaglianza di Markov si ha

$$\lambda P(|X| > \lambda) = \lambda P(|X|^p > \lambda^p) \leq \lambda \frac{E[|X|^p]}{\lambda^p} = \frac{E[|X|^p]}{\lambda^{p-1}},$$

e dunque si può stimare la velocità con cui $\lambda P(|X| > \lambda)$ tende a 0.

**Problema 12**

Si chiama densità di Cauchy la funzione

$$f(x) = \frac{c}{1 + x^2},$$

dove $c > 0$ è tale che $f$ sia una densità di probabilita (rispetto alla misura di Lebesgue su tutta la retta reale). Determinare $c$ ed esaminare per quali $p > 0$ si ha $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$, dove $X$ è una variabile aleatoria con legge di Cauchy.

**Problema 13**

Sia $E$ un insieme numerabile, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ e $\mu$, $\nu$ misure $\sigma$-finite su $E$. Mostrare (senza usare il teorema di Radon-Nikodym) che se $\nu \ll \mu$, allora $\nu$ ammette densità rispetto a $\mu$ e fornirne una espressione.

**Una soluzione:**

Sia $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ e poniamo

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \begin{cases} \dfrac{\nu(\{e_k\})}{\mu(\{e_k\})} & \text{se } x = e_k \text{ e } \mu(\{e_k\}) \neq 0 \\ 0 & \text{in caso contrario.} \end{cases}$$

Per ogni $A \subseteq E$ si ha subito

$$\nu(A) = \sum_{e_k \in A} \nu(\{e_k\}) = \sum_{e_k \in A, \nu(\{e_k\}) \neq 0} \nu(\{e_k\}) = \sum_{\substack{e_k \in A, \nu(\{e_k\}) \neq 0 \\ \mu(\{e_k\}) \neq 0}} \nu(\{e_k\}),$$

per l'assoluta continuità di $\nu$ rispetto a $\mu$. Continuando

$$\sum_{\substack{e_k \in A, \nu(\{e_k\}) \neq 0 \\ \mu(\{e_k\}) \neq 0}} \nu(\{e_k\}) = \sum_{\substack{e_k \in A, \nu(\{e_k\}) \neq 0 \\ \mu(\{e_k\}) \neq 0}} \frac{\nu(\{e_k\})}{\mu(\{e_k\})} \cdot \mu(\{e_k\}) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}(x) d\mu(x).$$

**Problema 14**

Sia X una variabile geometrica di parametro $p$ : provare che si ha

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{p \log p}{p-1}$$

**Una soluzione:**

Si ha

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p x^{k-1} \Big|_{x=1-p}$$

Per i noti teoremi sulle serie di potenze, si può scrivere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p x^{k-1} = \frac{p}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p x^{k} = \frac{p}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x t^{k-1}\, dt$$
$$= \frac{p}{x} \int_0^x \left( \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \right) dt = \frac{p}{x} \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\frac{p}{x} \log(1-x).$$

Calcolando per $x = 1-p$ si ha la formula cercata.

**Problema 15**

Si chiama variabile log–normale (di parametri $\mu$ e $\sigma^2$) una v.a. che ha la legge di probabilità di $e^X$ , dove $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Calcolare la densità ed il valore atteso di una variabile lognormale.

**Una soluzione:**

Per $t \leq 0$ si ha chiaramente $P(e^X \leq t) = 0$. Per $t > 0$, ricordando che $X = \sigma Z + \mu$, con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, si può scrivere

$$P(e^X \leq t) = P(X \leq \log t) = P(\sigma Z + \mu \leq \log t) = P\Big(Z \leq \frac{\log t - \mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\Big),$$

dove $\Phi$ indica la funzione di ripartizione della $\mathcal{N}(0,1)$. Ricapitolando abbiamo trovato

$$P(e^X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ \Phi\Big(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\Big) & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Calcoliamo la densità $f$ per "derivazione"(dove possibile):

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \frac{1}{\sigma t}\phi\Big(\frac{\log t - \mu}{\sigma}\Big) & \text{per } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

Possiamo estendere questa funzione a tutto $\mathbb{R}$ ponendo per esempio $f(0) = 0$. Per quanto riguarda la speranza si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^X\right] &= \mathbb{E}\left[e^{\sigma Z + \mu}\right] = e^{\mu}\mathbb{E}\left[e^{\sigma Z}\right] = e^{\mu}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\sigma)^2}{2}}\,dx = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \end{aligned}$$

perché la funzione integranda è la densità $\mathcal{N}(\sigma, 1)$ (e dunque l'integrale vale 1).

**Problema 16**

Siano $U$, $V$ due variabili indipendenti con densità uniforme sull'intervallo $[0,1]$ : provare che le variabili $X$, $Y$ definite da

$$X = \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V), \quad Y = \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V)$$

sono gaussiane $\mathcal{N}(0,1)$ indipendenti.

**Una soluzione:**

Consideriamo il cambio di variabili

$$\phi(u,v) = \begin{cases} x = \sqrt{-2\log u}\cos(2\pi v) \\ y = \sqrt{-2\log u}\sin(2\pi v) \end{cases},$$

la cui matrice Jacobiana è

$$J\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\cos(2\pi v)}{u\sqrt{-2\log u}} & -2\pi\sqrt{-2\log u}\sin(2\pi v) \\ -\frac{\sin(2\pi v)}{u\sqrt{-2\log u}} & 2\pi\sqrt{-2\log u}\cos(2\pi v) \end{pmatrix},$$

che ha determinante

$$\begin{aligned}&\det J\phi(u,v)\\&=\Big(-\frac{\cos(2\pi v)}{u\sqrt{-2\log u}}\Big)\cdot\Big(2\pi\sqrt{-2\log u}\cos(2\pi v)\Big)-\Big(-\frac{\sin(2\pi v)}{u\sqrt{-2\log u}}\Big)\cdot\Big(-2\pi\sqrt{-2\log u}\sin(2\pi v)\Big)\\&=-\frac{2\pi}{u}.\end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$\phi^{-1}(x,y)=\begin{cases}u=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\\ v=\frac{\arg(x,y)}{2\pi}.\end{cases}$$

Quindi, per la nota formula

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{|\det J\phi(u,v)|}f_{U,V}(u,v)\Big|_{(u,v)=\phi^{-1}(x,y)}$$

si trova

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{u}{2\pi}1_{(0,1)^2}(u,v)\Big|_{u=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},v=\frac{\arg(x,y)}{2\pi}}=\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi},\qquad(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

(notare che $0\le\frac{\arg(x,y)}{2\pi}\le 1$ significa $0\le\arg(x,y)\le 2\pi$, ovvero $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e $0\le e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\le 1$ ugualmente).

**Problema 17**

Siano $X$ e $Y$ due v.a. di densità congiunta $f$, tali che $P(X>0,Y>0)=1$.

(i) Calcolare la densità congiunta della coppia $U=X+Y$, $V=\frac{X}{Y}$.

(ii) Supponiamo che $X$ e $Y$ siano due v.a. indipendenti, di densità rispettivamente $\Gamma(\alpha_1,\lambda)$ e $\Gamma(\alpha_2,\lambda)$. Dimostrare che $U=X+Y$ e $V=\frac{X}{Y}$ sono indipendenti, e calcolarne le leggi.

**Una soluzione:**

(i) Consideriamo il cambio di variabili biunivoco $\phi:\mathbb{R}^{+2}\to\mathbb{R}^{+2}$

$$\phi:\begin{cases}u=x+y\\ v=\frac{x}{y};\end{cases}$$

il suo inverso è

$$\phi^{-1}:\begin{cases}x=\frac{uv}{v+1}\\ y=\frac{u}{v+1}.\end{cases}$$

Inoltre la matrice Jacobiana di $\phi$ è

$$J_\phi=\begin{pmatrix}1&1\\ \frac{1}{y}&-\frac{x}{y^2}\end{pmatrix},$$

e quindi

$$\big|\det J_\phi(x,y)\big| = \frac{x+y}{y^2} = \frac{(v+1)^2}{u}.$$

Con il teorema di cambio di variabili si ottiene allora

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{|\det J_\phi(x,y)|} f_{(X,Y)}(x,y)\Big|_{(x,y)=\phi^{-1}(u,v)} = \frac{u}{(v+1)^2} f\Big(\frac{uv}{v+1}, \frac{u}{v+1}\Big).$$

(b) La densità congiunta di $(X,Y)$ è

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} e^{-\lambda(x+y)} & x,y>0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Dalla formula del punto precedente si ottiene allora, sostituendo

$$f_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} u^{\alpha_1+\alpha_2-1} \frac{v^{\alpha_1-1}}{(v+1)^{\alpha_1+\alpha_2}} e^{-\lambda u} & u,v>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

e si vede che $f_{(U,V)}$ è il prodotto tensoriale delle due densità

$$h_1(u) = \begin{cases} \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} u^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\lambda u} & u>0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

e

$$h_2(v) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{v^{\alpha_1-1}}{(v+1)^{\alpha_1+\alpha_2}} & v>0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Dunque $U$ e $V$ sono indipendenti, e di densità rispettive $h_1$ e $h_2$; $h_1$ è (come è noto) la densità $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$. Non è necessario controllare che la costante di normalizzazione di $h_2$ è proprio $\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$.

**Problema 18**

Sia $X$ variabile aleatoria reale indipendente da se stessa. Mostrare che $X$ è costante (q.c.).

**Una soluzione:**

Se $X$ è indipendente da se stessa, allora

$$P(X \le s) = P(X \le s, X \le s) = P(X \le s)P(X \le s),$$

da cui $P(X \le s) = 0$ oppure 1.

**Problema 19**

Siano $X$, $Y$ indipendenti e supponiamo che si abbia $P(X+Y=\alpha)=1$ (con una opportuna costante $\alpha$): provare che $X$ e $Y$ sono costanti (q.c.).

**Una soluzione:**

$$P(X \le s) = P(X \le s, X \le s) = P(X \le s, \alpha - X \ge \alpha - s) = P(X \le s, Y \ge \alpha - s)$$
$$= P(X \le s)P(Y \ge \alpha - s) = P(X \le s)P(X \le s)$$

e quindi $P(X \le s) = 0$ oppure 1.

**Problema 20**

Sia $X_1$, $X_2$,... una successione di variabili i.i.d. tali che

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2,$$

e sia, per ogni $i$, $Z_i = X_1 \cdot \ldots \cdot X_i$. Provare che le variabili $Z_1$, $Z_2$, ... sono indipendenti.

**Una soluzione:**

Intanto è ovvio che le $Z_n$ prendono i soli valori 1 e $-1$. Per ogni $n$ e per ogni $n-$upla $(z_1, \ldots, z_n) \in \{-1, 1\}^n$ si ha

$$P(Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) = P\Big(X_1 = z_1, X_2 = \frac{z_2}{z_1}, X_n = \frac{z_n}{z_{n-1}}\Big)$$
$$= P(X_1 = z_1)P\Big(X_2 = \frac{z_2}{z_1}\Big) \cdots P\Big(X_n = \frac{z_n}{z_{n-1}}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$

Dunque, per ogni $k = 1, \ldots, n$

$$P(Z_k = z_k) = \sum_{(z_1,\ldots,z_{k-1},z_{k+1},\ldots,z_n)\in\{-1,1\}^{n-1}} P(Z_1 = z_1, \ldots, Z_k = z_k, \ldots Z_n = z_n)$$
$$= \sum_{(z_1\ldots,z_{k-1},z_{k+1},\ldots,z_n)\in\{-1,1\}^{n-1}} \Big(\frac{1}{2}\Big)^n = 2^{n-1}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n = \frac{1}{2}.$$

Si conclude che

$$P(Z_1 = z_1, \ldots, Z_n = z_n) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n = P(Z_1 = z_1) \cdot \ldots \cdot P(Z_n = z_n),$$

cioè la tesi.

**Problema 21**

Con le notazioni dell'esercizio precedente, siano $X = X_1$ $Y = X_2$ e $Z = X_1 \cdot X_2$. Provare che le variabili $X, Y, Z$ sono a due a due indipendenti, ma che non formano una terna di variabili indipendenti.

**Una soluzione:**

Che le variabili $X, Y, Z$ sono a due a due indipendenti è ovvio dall'esercizio precedente. Mostriamo che non sono globalmente indipendenti. Infatti

$$P(X = 1, Y = 1, Z = -1) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 1)P(Z = -1) = \frac{1}{8}.$$

**Problema 22**

Siano $X$ e $Y$ due v.a. reali indipendenti. Provare che $XY$ è integrabile se $X$ e $Y$ lo sono, e vale

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].$$

Se $XY$ è integrabile, ne segue che $X$ e $Y$ sono integrabili?

**Una soluzione:**

**Problema 23**

Siano $X$ e $Y$ due v.a. a valori reali: provare che sono indipendenti se e solo se, per ogni coppia $(f, g)$ di funzioni reali continue e limitate, vale l'eguaglianza

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{E}[g(Y)]$$

**Problema 24**

Siano $X_1, X_2, \dots$ variabili aleatorie reali indipendenti con funzione di ripartizione rispettivamente $F_1$, $F_2$, $\dots$; provare che

$$P(\sup_n X_n < \infty) = 1 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \quad \sum_n (1 - F_n(x)) < \infty.$$

**Una soluzione:**

$\Leftarrow$. Dato che $1 - F_n(x) = P(X_n > x)$, la relazione $\sum_{n\geq1}(1 - F_n(x)) < \infty$ significa $\sum_{n\geq1} P(X_n > x) < \infty$ e, per il lemma di BC (prima parte) implica che

$$P(X_n > x \ i.o.) = 0,$$

ovvero che il suo complementare ha probabilità 1, cioè esiste un $x$ tale che

$$P(X_n \leq x \ definitivamente) = 1,$$

e quindi $P(\sup X_n < \infty) = 1$.

$\Rightarrow$. Se per assurdo per ogni $x$ si avesse $\sum_{n\geq1}(1 - F_n(x)) = \infty$, allora il lemma di BC (seconda parte, con l'indipendenza), per ogni $x$ si avrebbe $P(X_n > x \ i.o.) = 1$. Dalla relazione

$$\bigcap_{M\in\mathbb{N}} (X_n > M \ i.o.) \subseteq \{\sup_n X_n = \infty\}$$

seguirebbe allora che

$$1 = P\Big( \bigcap_{M \in \mathbb{N}} (X_n > M \ i.o.) \Big) \le P(\sup_n X_n = \infty) = 1,$$

e quindi $P(\sup_n X_n < \infty) = 0$.

Nota. Osserviamo che per avere l'assurdo basterebbe supporre che $P(\sup_n X_n < \infty) > 0$.

**Problema 25**

Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di v.a. indipendenti uniformemente distribuite sull'intervallo $[-1, 1]$ : provare che con probabilità 1 la successione di numeri $\{nX_n\}$ è densa in $\mathbb{R}$ , mentre sempre con probabilità 1 la successione di numeri $\{n^2 X_n\}$ non è densa in $\mathbb{R}$.

**Una soluzione:**

Se $nX_n$ fosse densa in $\mathbb{R}$ con probabilità minore di 1, il complementare avrebbe probabilità strettamente positiva, cioè:

$$P(\{\omega : \exists (a,b) \quad \text{con } a < b : nX_n(\omega) \notin (a,b)\}) > 0.$$

Dunque, poiché

$$\sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \\ a<b}} P\big(nX_n \notin (a,b)\big) \ge P\Big( \bigcup_{\substack{(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \\ a<b}} \{nX_n \notin (a,b)\} \Big) > 0,$$

esisterebbe un intervallo $(a,b)$ tale che $P\big(nX_n \notin (a,b)\big) > 0$. Ma questo non è possibile; infatti

$$\sum_{n \ge 1} P(a < nX_n < b) = \sum_{n \ge 1} P\Big( \frac{a}{n} < X_n < \frac{b}{n} \Big) = (b-a) \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n} = \infty.$$

Dunque per BC (seconda parte)

$$P(a < nX_n < b \ i.o.) = 1.$$

Invece

$$\sum_{n \ge 1} P(a < n^2 X_n < b) = \sum_{n \ge 1} P\Big( \frac{a}{n^2} < X_n < \frac{b}{n^2} \Big) = (b-a) \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

che significa che ha probabilità 1 l'evento $P(n^2 X_n \notin (a,b) \ definitivamente.)$ D'altra parte, se solo un numero finito di elementi della successione $n^2 X_n(\omega)$ stanno in $(a,b)$, è facile trovare un sottointervallo di $(a,b)$ che non contiene nessuno di questi elementi, e dunque nessun elemento della successione $n^2 X_n(\omega)$ (perché gli altri stanno fuori di $(a,b)$).

**Problema 26**

Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di variabili i.i.d. con densità esponenziale di parametro $\lambda$: provare che si ha q.c.

$$\liminf_n \frac{X_n}{\log n} = 0, \qquad \limsup_n \frac{X_n}{\log n} = \frac{1}{\lambda}.$$

**Una soluzione:**

Dimostro che

$$\limsup_n \frac{X_n}{\log n} = \frac{1}{\lambda}$$

(a) Dimostro che, per ogni $\epsilon > 0$

$$P\Big(\frac{X_n}{\log n} < \frac{1}{\lambda} + \epsilon, \qquad definitivamente\Big) = 1$$

cioè, in alternativa

$$P\Big(\frac{X_n}{\log n} > \frac{1}{\lambda} + \epsilon, \qquad i.o.\Big) = 0.$$

Si ha

$$\sum_n P\Big(\frac{X_n}{\log n} > \frac{1}{\lambda} + \epsilon\Big) = \sum_n \mathrm{e}^{-\lambda(\frac{1}{\lambda}+\epsilon)\log n} = \sum_n \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty$$

e si conclude con BC.

(b) Dimostro che, per ogni $\epsilon > 0$,

$$P\Big(\frac{X_n}{\log n} > \frac{1}{\lambda} - \epsilon, \qquad i.o.\Big) = 1.$$

Si ha

$$\sum_n P\Big(\frac{X_n}{\log n} > \frac{1}{\lambda} - \epsilon\Big) = \sum_n \mathrm{e}^{-\lambda(\frac{1}{\lambda}-\epsilon)\log n} = \sum_n \frac{1}{n^{1-\epsilon}} = \infty$$

e si conclude con BC.

La dimostrazione che

$$\liminf_n \frac{X_n}{\log n} = 0$$

si fa in modo simile:

(c) Dimostro che, per ogni $\epsilon > 0$

$$P\Big(\frac{X_n}{\log n} > -\epsilon, \qquad definitivamente\Big) = 1$$

Si ha

$$\sum_n P\Big(\frac{X_n}{\log n} > -\epsilon\Big) = \sum_n \mathrm{e}^{-\lambda(-\epsilon)\log n} = \sum_n n^{\lambda\epsilon} = \infty$$

e si conclude con BC.

(d) Dimostro che, per ogni $0 < \epsilon < \frac{1}{\lambda}$,

$$P\Big(\frac{X_n}{\log n} < \epsilon, \qquad definitivamente\Big) = 1,$$

cioè, in alternativa

$$P\Big(\frac{X_n}{\log n} > \epsilon, \qquad i.o.\Big) = 0.$$

Si ha

$$\sum_n P\Big(\frac{X_n}{\log n} > \epsilon\Big) = \sum_n \mathrm{e}^{-\lambda(\epsilon)\log n} = \sum_n \frac{1}{n^{\lambda\epsilon}} = \infty,$$

dato che $\lambda\epsilon < 1$, e si conclude con BC.

**Problema 27**

Sia $A_n$ una successione di eventi indipendenti due a due. Supponiamo che $\sum_n P(A_n) = \infty$. Allora $P(\limsup_n A_n) = 1$. *(sugg: vedere Osservazione 2.4.4 appunti Pratelli)*

**Una soluzione:**

Sia $Z_n = \sum_{k=1}^n 1_{A_k}$. Si ha $Z_n \uparrow Z = \sum_n 1_{A_n}$. Osserviamo anche che $\{A_n i.o.\} = \{Z = +\infty\}$. Osserviamo anche che

$$VarZ_n = Var\Big(\sum_n 1_{A_n}\Big) = \sum_n Var 1_{A_n} + 2\sum_{1\le i<j\le n} \underbrace{Cov(1_{A_i}, 1_{A_j})}_{=0} = \sum_n Var1_{A_n}.$$

In generale si ha

$$VarX = E[X^2] - E^2[X] \le E[X^2]$$

e per una v.a. indicatrice

$$Var1_A \le E[1_A^2] = E[1_A].$$

Dunque

$$VarZ_n = \sum_n Var1_{A_n} \le \sum_n E[1_{A_n}] = E[\sum_n 1_{A_n}] = E[Z_n].$$

Inoltre $\lim_n E[Z_n] = E[Z] = \sum_n E[1_{A_n}] = \sum_n P(A_n) = \infty$ per ipotesi. Fissato $\lambda$, esiste dunque $n_0$ tale che, per ogni $n > n_0$ si ha $E[Z_n] > \lambda$. Inoltre per ogni $n$, $\{Z \le \lambda\} \subseteq \{Z_n \le \lambda\}$. Pertanto

$$0 \le P(Z \le \lambda) \le P(Z_n \le \lambda) = P(Z_n - E[Z_n] \le \underbrace{\lambda - E[Z_n]}_{\le 0}) \le P(Z_n - E[Z_n] \ge E[Z_n] - \lambda)$$

$$\underbrace{\le}_{Chebicev} \frac{VarZ_n}{(E[Z_n]-\lambda)^2} = \frac{\frac{VarZ_n}{E[Z_n]}}{(E[Z_n]-\lambda)(1-\frac{\lambda}{E[Z_n]})} \le \frac{1}{(E[Z_n]-\lambda)(1-\frac{\lambda}{E[Z_n]})} \to 0,$$

Dunque

$$P(Z = \infty) = P\Big(\bigcap_n \{Z > n\}\Big) = 1 - P\Big(\bigcup_n \{Z \le n\}\Big) = 1.$$

**Problema 28**

Siano $X$ e $Y$ due v.a. di densità congiunta $f$ rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale. Calcolare la densità (rispetto alla misura di Lebesgue sulla retta) delle v.a. $Z_1 = XY$ e $Z_2 = \frac{X}{Y}$.

**Una soluzione:**

Sia $\mu$ la legge di $Z_1$ e sia $g$ una funzione boreliana. Per il teorema di integrazione rispetto alla legge immagine, abbiamo

$$E\big[g(Z)\big] = \int g(Z_1)\,\mathrm{d}P = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\,\mathrm{d}\mu(z)$$

D'altra parte

$$E\big[g(Z_1)\big] = E\big[g(XY)\big] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(xy)f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty} g(xy)f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Cambio di variabile $z = xy$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{y}$ nell'integrale interno. Ottengo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty} g(xy)f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{+\infty}^{-\infty} g(z)f\big(\frac{z}{y},y\big)\frac{\mathrm{d}z}{y} + \int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)f\big(\frac{z}{y},y\big)\frac{\mathrm{d}z}{y}$$
$$= \int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)f\Big(\frac{z}{y},y\Big)\frac{\mathrm{d}z}{-y} + \int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)f\Big(\frac{z}{y},y\Big)\frac{\mathrm{d}z}{y} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)f\Big(\frac{z}{y},y\Big)\frac{\mathrm{d}z}{|y|}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\underbrace{\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(\frac{z}{y},y\Big)\frac{1}{|y|}\mathrm{d}y\Big\}}_{=h(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z)h(z)\,\mathrm{d}z.$$

La formula finale ci dice che una densità per (la legge immagine di) $Z_1 = XY$ è data dalla funzione $h$:

$$h_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(\frac{z}{y},y\Big)\frac{1}{|y|}\mathrm{d}y.$$

In modo analogo si vede che una densità per $Z_2 = \frac{X}{Y}$ è

$$h_2(z) = f\Big(zy,y\Big)|y|\mathrm{d}y.$$

In particolare, se $X$ e $Y$ sono indipendenti, di rispettive densità $f_1$ e $f_2$, le due formule precedenti diventano rispettivamente

$$h_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1\Big(\frac{z}{y}\Big)f_2(y)\frac{1}{|y|}\mathrm{d}y$$

e

$$h_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(zy)f_2(y)|y|\mathrm{d}y.$$

Se il vettore $(X, Y)$ prende valori in $(\mathbb{R}^+)^2$, le due formule precedenti diventano rispettivamente

$$h_1(z) = 1_{\mathbb{R}^+}(z) \int_0^{+\infty} f\Big(\frac{z}{y}, y\Big) \frac{1}{y} \mathrm{d}y$$

$$h_2(z) = 1_{\mathbb{R}^+}(z) \int_0^{+\infty} f(zy, y) y \mathrm{d}y.$$

**Problema 29**

Sia $X_n$ una qualsiasi successione di v.a. finite. Allora esiste una successione di numeri $c_n \to \infty$ tale che $\frac{X_n}{c_n} \to 0$, q.c.

**Una soluzione:**

Se $Y$ è una qualsiasi v.a. finita, si ha

$$\lim_{t\to\infty} P(|Y| > t) = 0.$$

Dunque, per ogni $\delta > 0$, esiste $t$ tale che

$$P(|Y| > t) < \delta.$$

Fissato $n$, considero $Y = X_n$ e $\delta = \frac{1}{2^n}$. Esiste allora $t_n$ tale che

$$P(|X_n| > t_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Ponendo $c_n = nt_n$, la relazione precedente si scrive

$$P\Big(\frac{|X_n|}{c_n} > \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{2^n}.$$

Il Lemma di Borel Cantelli implica allora che

$$P\Big(\frac{|X_n|}{c_n} > \frac{1}{n} i.o.\Big) = 0,$$

ovvero, passando al complementare

$$P\Big(\frac{|X_n|}{c_n} \le \frac{1}{n}\ definitivamente\Big) = 1,$$

e quindi la tesi. Ovviamente la successione $\frac{1}{n}$ può essere sostituita da una qualunque altra successione infinitesima.

**Problema 30**

(i) Sia $(A_n)$ una successione di eventi tali che

$$\lim_n P(A_n) \to 0; \qquad \sum_n P(A_n^c \cap A_{n+1}) < \infty.$$

(i1) Dimostrare che

$$\bigcup_{k \geq n} A_k = A_n \cup \Big( \bigcup_{k \geq n} (A_k^c \cap A_{k+1}) \Big)$$

(i2) Dimostrare che

$$P(A_n \text{ si realizza infinite volte}) = 0.$$

(ii) Trovare un esempio in cui (i) è applicabile, mentre il Lemma di Borel-Cantelli classico non lo è.

**Una soluzione:**

(i2) Da (i1) si deduce che

$$P\Big(\bigcup_{k \geq n} A_k\Big) \leq P(A_n) + \sum_{k \geq n} P(A_k^c \cap A_{k+1})$$

e il secondo addendo tende a 0 per le ipotesi. Dunque

$$P(A_n\, i.o.) = P\Big(\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k\Big) = \lim_n P\Big(\bigcup_{k \geq n} A_k\Big) = 0.$$

**Problema 31**

Sia $X$ una v.a. reale con densità $f$ e supponiamo che la densità sia strettamente positiva ovunque: data $\varphi$ boreliana limitata, calcolare

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X) | X^2\right].$$

**Una soluzione:**

Euristica: caso discreto. Supponiamo che $X$ sia una v.a.discreta con densità $f$. Indicheremo con $x_k$ i valori di $X^2$. Ricordiamo che, se $\{\Omega_k\}_k$ è una partizione di $\Omega$ con $P(\Omega_k) > 0$ per ogni $k$, e $\mathcal{E}$ è la $\sigma-$algebra generata da $\{\Omega_k\}_k$, si ha

$$E[X|\mathcal{E}] = \sum_k 1_{\Omega_k} \frac{E[X 1_{\Omega_k}]}{P(\Omega_k)}.$$

Nel nostro caso abbiamo $\Omega_k = \{X^2 = x_k\}$ e $\mathcal{E} = \sigma(X^2)$; quindi

$$P(\Omega_k) = P(X^2 = x_k) = P(X = \sqrt{x_k}) + P(X = -\sqrt{x_k})$$

$$
\begin{aligned}
E[X1_{\Omega_k}] &= E[X1_{\{X^2=x_k\}}] = \sum_h y_h P(X1_{\{X^2=x_k\}} = y_h) \\
&= \sqrt{x_k} P(X = \sqrt{x_k}) - \sqrt{k} P(X = -\sqrt{x_k}),
\end{aligned}
$$

osservando che

$$
P(X1_{\{X^2=k\}} = y_h) \begin{cases} P(X = \sqrt{x_k}) & y_h = \sqrt{x_k} \\ P(X = -\sqrt{x_k}) & y_h = -\sqrt{x_k} \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}
$$

Pertanto

$$
\frac{E[X1_{\Omega_k}]}{P(\Omega_k)} = \frac{\sqrt{x_k} P(X = \sqrt{x_k}) - \sqrt{x_k} P(X = -\sqrt{x_k})}{P(X = \sqrt{x_k}) + P(X = -\sqrt{x_k})}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
E[X|X^2] &= \sum_k 1_{\{X^2=x_k\}} \frac{\sqrt{x_k}\{P(X = \sqrt{x_k}) - P(X = -\sqrt{x_k})\}}{P(X = \sqrt{x_k}) + P(X = -\sqrt{x_k})} \\
&= \sum_k 1_{\{X^2=x_k\}} \frac{\sqrt{x_k}\{f(\sqrt{x_k}) - f(-\sqrt{x_k})\}}{f(\sqrt{x_k}) + f(-\sqrt{x_k})} = \frac{|X|\{f(|X|) - f(-|X|)\}}{f(|X|) + f(-|X|)};
\end{aligned}
$$

osservare che $|X| = \sqrt{X^2}$, dunque il risultato è funzione di $X^2$, come deve essere.

Per trattare il caso continuo, andiamo per analogia con il caso discreto, e affermiamo che

$$
E[X|X^2] = \frac{|X|\{f(|X|) - f(-|X|)\}}{f(|X|) + f(-|X|)} =: Y,
$$

dove ora $f$ rappresenta la densità (caso assolutamente continuo) di $X$. Dimostriamo l'asserto verificando le proprietà caratteristiche della speranza condizionale. Ovviamente $Y$ è funzione di $X^2$, quindi basta controllare che, per ogni $A \in \sigma(X^2)$, si ha

$$
\int_A Y \, \mathrm{d}P = \int_A X \, \mathrm{d}P.
$$

Basta verificare la relazione qui sopra per $A = \{X^2 \le t\} = \{-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}\}$,

$t \in \mathbb{R}^+$. Si ha (teorema di integrazione rispetto alla legge immagine)

$$
\begin{aligned}
\int_A Y \,\mathrm{d}P &= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{|x|\{f(|x|) - f(-|x|)\}}{f(|x|) + f(-|x|)} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\sqrt{t}}^{0} \frac{-x\{f(-x) - f(x)\}}{f(-x) + f(x)} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x\{f(x) - f(-x)\}}{f(x) + f(-x)} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\sqrt{t}}^{0} \frac{y\{f(y) - f(-y)\}}{f(y) + f(-y)} f(-y)\,\mathrm{d}y + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x\{f(x) - f(-x)\}}{f(x) + f(-x)} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{y\{f(y) - f(-y)\}}{f(y) + f(-y)} f(-y)\,\mathrm{d}y + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x\{f(x) - f(-x)\}}{f(x) + f(-x)} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x\{f(x) - f(-x)\}}{f(x) + f(-x)} \{f(x) + f(-x)\}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{t}} x\{f(x) - f(-x)\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\sqrt{t}} xf(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{t}} xf(-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{t}} xf(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\sqrt{t}}^{0} yf(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_A X\,\mathrm{d}P.
\end{aligned}
$$

*Osservazione: nel caso discreto, osservando che* $\frac{E[X1_{\Omega_k}]}{P(\Omega_k)} = E[X|X^2 = x_k]$ *è la speranza di* $X$ *fatta rispetto alla legge condizionale* $P(\cdot|X^2 = x_k)$*, il calcolo di* $\frac{E[X1_{\Omega_k}]}{P(\Omega_k)}$ *si può fare nel modo seguente*

$$
\begin{aligned}
&\frac{E[X1_{\Omega_k}]}{P(\Omega_k)} = E[X|X^2 = x_k] = \sum_h y_h P(X = y_h|X^2 = x_k) = \sum_h y_h \frac{P(X = y_h, X^2 = x_k)}{P(X^2 = x_k)} \\
&= \sum_{h: {y_h}^2 = x_k} \frac{P(X = y_h)}{P(X^2 = x_k)} = \frac{\sqrt{x_k}P(X = \sqrt{x_k}) - \sqrt{x_k}P(X = -\sqrt{x_k})}{P(X = \sqrt{x_k}) + P(X = -\sqrt{x_k})}
\end{aligned}
$$

**Problema 32**

Sia $Y$ di quadrato integrabile e supponiamo che si abbia $\mathbb{E}[Y|X] = X$ e $\mathbb{E}[Y^2|X] = X^2$: provare che $Y = X$ q.c. Esibire viceversa un esempio nel quale si ha $\mathbb{E}[Y|X] = X$ e tuttavia $Y \neq X$.

**Una soluzione:**

$$
\begin{aligned}
&E[(Y-X)^2] = E\big[E[(Y-X)^2|X]\big] = E\big[E[Y^2 + X^2 - 2XY|X]\big] \\
&= E\big[E[Y^2|X]\big] + E\big[E[X^2|X]\big] - 2E\big[E[XY|X]\big] = E\big[X^2\big] + E\big[X^2\big] - 2E\big[X^2\big] = 0,
\end{aligned}
$$

per ipotesi. Dunque la v.a. positiva $(Y - X)^2$ è q.c. nulla, e quindi la tesi.

Per rispondere alla seconda domanda, basta considerare $Y = X + Z$, dove $Z$ è una v.a. indipendente da $X$ e centrata, non nulla q.c. Si ha infatti

$$\mathbb{E}\left[Y|X\right] = \mathbb{E}\left[X + Z|X\right] = X + \mathbb{E}\left[Z|X\right] = X + \mathbb{E}\left[Z\right] = X.$$

**Problema 33**

Sia $Y$ una v.a. con momento secondo finito e sia $\mathcal{G}$ una sotto $\sigma-$algebra di $\mathcal{F}$. Posto $X = E[Y|\mathcal{G}]$, supponiamo che $E[X^2] = E[Y^2]$. Allora $Y = X$, $P-$q.c.

**Una soluzione:**

Si ha

$$\begin{aligned}
&E[(Y-X)^2] = E\big[E[(Y-X)^2|\mathcal{G}]\big] = E\big[E[Y^2 + X^2 - 2XY|\mathcal{G}]\big] \\
&= E\big[E[Y^2|\mathcal{G}] + E[X^2|\mathcal{G}] - 2E[XY|\mathcal{G}]\big] = E\big[E[Y^2|\mathcal{G}] + X^2 - 2XE[Y|\mathcal{G}]\big] \\
&= E\big[E[Y^2|\mathcal{G}]\big] + E\big[X^2\big] - 2E\big[X^2\big] = E\big[Y^2\big] - E\big[X^2\big] = 0
\end{aligned}$$

per ipotesi. Dunque la v.a. positiva $(Y - X)^2$ è q.c. nulla, e quindi la tesi.

**Problema 34**

Sia $X$ una v.a. esponenziale (di parametro $\lambda$) e sia $t > 0$: calcolare $\mathbb{E}\left[X|X \wedge t\right]$.

**Una soluzione:**

Dato che su $\{X < t\}$ si ha $X \wedge t = X$, mentre su$\{X \geq t\}$ si ha $X \wedge t = t$ è naturale supporre che

$$\mathbb{E}\left[X|X \wedge t\right] = X1_{\{X<t\}} + g(t)1_{\{X \geq t\}} = (X \wedge t)1_{\{X \wedge t < t\}} + g(t)1_{\{X \wedge t \geq t\}} =: Y,$$

dove $g(t)$ è una funzione di $t$ da determinare (la seconda formula mostra che la variabile $Y$ è $X \wedge t-$misurabile, come deve essere). Per trovare l'espressione di $g$, integriamo su un generico evento del tipo $\{X \wedge t \leq s\}$, utilizzando la relazione che definisce la speranza condizionale:

$$\int_{\{X \wedge t \leq s\}} Y \, \mathrm{d}P = \int_{\{X \wedge t \leq s\}} X \, \mathrm{d}P$$

e distinguendo due casi:

(1) $s < t$. Si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{\{X \wedge t \leq s\}} Y \, \mathrm{d}P = \int_{\{X \leq s\}} Y \, \mathrm{d}P = \int_{\{X \leq s\}} X1_{\{X<t\}} \, \mathrm{d}P + \int_{\{X \leq s\}} g(t)1_{\{X \wedge t \geq t\}} \, \mathrm{d}P \\
&= \int_0^s xf(x) \, \mathrm{d}x + 0 = \int_0^s xf(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\{X \wedge t \leq s\}} X \, \mathrm{d}P;
\end{aligned}$$

cioè, per $s < t$, la relazione che definisce la speranza condizionale è soddisfatta per qualsiasi valore di $g(t)$.

(2) $s \geq t$. Si ha

$$\int_{\{X \wedge t \leq s\}} Y \,\mathrm{d}P = \int_\Omega Y \,\mathrm{d}P = \int_\Omega X 1_{\{X<t\}} \,\mathrm{d}P + g(t) \int_\Omega 1_{\{X \geq t\}} \,\mathrm{d}P$$
$$= \int_0^t x f(x) \,\mathrm{d}x + g(t) \int_t^\infty f(x) \,\mathrm{d}x$$

uguagliando con $\int_{\{X \wedge t \leq s\}} X \,\mathrm{d}P = \int_\Omega X \,\mathrm{d}P = E[X]$ si ottiene la relazione

$$\int_0^t x f(x) \,\mathrm{d}x + g(t) \int_t^\infty f(x) \,\mathrm{d}x = E[X],$$

da cui

$$g(t) = \frac{E[X] - \int_0^t x f(x) \,\mathrm{d}x}{\int_t^\infty f(x) \,\mathrm{d}x}.$$

Osservando che

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}; \qquad \int_t^\infty f(x) \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda t}; \qquad \int_t^\infty f(x) \,\mathrm{d}x = \frac{-t\mathrm{e}^{-\lambda t} + 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda},$$

si ottiene infine

$$g(t) = \frac{t+1}{\lambda}.$$

**Problema 35**

Siano $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ due $\sigma$-algebre, sia $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ la $\sigma$-algebra generata da $\mathcal{G}$ e da $\mathcal{H}$ e supponiamo che $\mathcal{H}$ sia indipendente dalla $\sigma$-algebra generata da $X$ e da $\mathcal{G}$. Provare che, se $X$ è integrabile, vale l'eguaglianza $\mathbb{E}[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

**Una soluzione:**

Poniamo $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. $Z$ è $\mathcal{G}$-misurabile, e dunque è $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$-misurabile e indipendente da $\mathcal{H}$. Dobbiamo verificare che vale la relazione

$$\int_F X \,\mathrm{d}P = \int_F Z \,\mathrm{d}P$$

per ogni $F \in \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Basta fare il conto per $F$ del tipo $F = A \cap B$, con $A \in \mathcal{H}$ e $B \in \mathcal{G}$ (gli $F$ di questo tipo sono una famiglia di generatori di $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ stabile per intersezione finita, dunque si può applicare il Teorema delle Classi Monotone). Si ha, per l'indipendenza di $\mathcal{H}$ da $\mathcal{G}$ e da $\sigma(X)$

$$\int_{A\cap B} X\,\mathrm{d}P = \int 1_{A\cap B}X\,\mathrm{d}P = \int 1_A 1_B X\,\mathrm{d}P \underbrace{=}_{ind.\,di\mathcal{H}\,da\,\mathcal{G}\,e\,da\,\sigma(X)} \int 1_A\,\mathrm{d}P \int 1_B X\,\mathrm{d}P$$

$$= \int 1_A\,\mathrm{d}P \int_B X\,\mathrm{d}P \underbrace{=}_{def.\,di\,sper.\,cond.} \int 1_A\,\mathrm{d}P \int_B Z\,\mathrm{d}P = \int 1_A\,\mathrm{d}P \int \underbrace{1_B Z}_{\mathcal{G}-mis.}\,\mathrm{d}P$$

$$\underbrace{=}_{ind.\,di\mathcal{H}\,da\,\mathcal{G}} = \int 1_A 1_B Z\,\mathrm{d}P = \int 1_{A\cap B} Z\,\mathrm{d}P = \int_{A\cap B} Z\,\mathrm{d}P.$$

**Problema 36**

Sia $X_1$, $X_2$, ... una successione di v.a. indipendenti integrabili, poniamo $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ e sia $\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$. Provare che vale, per $1 \le i \le n$, l'eguaglianza $\mathbb{E}[X_i|\mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[X_i|S_n]$; provare inoltre che se le v.a. $X_i$ sono equidistribuite, si ha

$$\mathbb{E}[X_i|S_n] = \frac{S_n}{n}.$$

**Una soluzione:**

Il primo punto è conseguenza dell'esercizio precedente, dove si pone $X = X_i$, $\mathcal{G} = \sigma(S_n)$, $\mathcal{H} = \sigma(X_{n+1}, \ldots)$, osservando che $\mathcal{G}_n = \sigma(S_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Infatti $\mathcal{H}$ è indipendente da $\sigma(X_i)$ e da $\mathcal{G}$. Quindi

$$E[X_i|\sigma(S_n, X_{n+1,\ldots})] = E[X_i|S_n].$$

Per il secondo punto: dato che le $X_i$ sono equidistribuite

$$S_n = E[S_n|S_n] = E\Big[\sum_{i=1}^n X_i|S_n\Big] = \sum_{i=1}^n E[X_i|S_n] = \sum_{i=1}^n E[X_1|S_n] = nE[X_1|S_n]$$
$$= nE[X_i|S_n].$$

**Problema 37**

Dimostrare la seguente versione condizionale della diseguaglianza di Markov: Se $X$ è integrabile e $Y$ è $\mathcal{E}$-misurabile e non negativa, allora vale quasi certamente

$$\mathbb{E}\left[I_{\{|X|\ge Y\}}|\mathcal{E}\right] \le \frac{\mathbb{E}[|X||\mathcal{E}]}{Y}.$$

**Problema 38**

Sia $(X, Y)$ una variabile aleatoria con densità uniforme su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. Calcolare la densità di $Y$ e, per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[I_B(X)|Y]$.

**Una soluzione:**

Ricordiamo che, se $(X, Y)$ ha densità congiunta $f(x, y)$, $\phi$ è boreliana limitata e si pone

$$g(y) = \int \phi(x) \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \, dx$$

allora si ha $E[\phi(X)|Y] = g(Y)$. Cerchiamo allora prima di tutto la densità condizionale di $X$, dato $Y = y$ (cioè la funzione $x \mapsto f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ che compare nell'integrale). Si ha

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{per } (x, y) \in \mathcal{C} := \{x^2 + y^2 \leq 1\} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}.$$

Perciò

$$f_Y(y) = \int f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx & \text{per } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - y^2} & \text{per } |y| \leq 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Di conseguenza, se $|y| \leq 1$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & \text{per } -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

e si riconosce la densità uniforme sull'intervallo $D_y := (-\sqrt{1 - y^2}, \sqrt{1 - y^2})$. Per $|y| > 1$ si pone $f_{X|Y}(x|y) = 0$, $\forall x$. Dunque abbiamo ($\lambda$ = misura di Lebesgue)

$$g(y) = \int I_B(x) \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} \, dx = \int I_{B \cap D_y}(x) \frac{1}{2\sqrt{1 - y^2}} \, dx = \int_{B \cap D_y} \frac{1}{2\sqrt{1 - y^2}} \, dx$$
$$= \frac{\lambda(B \cap D_y)}{2\sqrt{1 - y^2}},$$

e

$$\mathbb{E}\left[I_B(X)|Y\right] = g(Y) = \frac{\lambda(B \cap D_Y)}{2\sqrt{1 - Y^2}}.$$

**Problema 39**

Sia $n \in \mathbb{N}$ fissato. Costruire due variabili aleatorie $(X, N)$ tali che $X$ abbia legge uniforme su $[0, 1]$ e per q.o. ogni $x \in [0, 1]$, la legge condizionale di $N$ sapendo $X = x$ sia Binomiale di parametri $(n, x)$. Calcolare poi la legge condizionale di $X$ sapendo $N$.

**Una soluzione:**

Sullo spazio di misura $\big(\mathbb{R}\times\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}(\mathbb{N}), \lambda\times m\big)$ ($\lambda =$ misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, $m =$ misura che conta i punti di $\mathbb{N}$) consideriamo la funzione

$$f(x,k) = \begin{cases} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} & \text{per } x\in(0,1), k\in\{0,1,\dots,n\} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Si tratta di una densità di probabilità rispetto alla misura $\lambda\times m$, in quanto

$$\iint f(x,k)\, d(\lambda\times m)(x,k) = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\Big)\, dx = \int_0^1 1\, dx = 1.$$

Sullo spazio $\big(\mathbb{R}\times\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}(\Omega), f.(\lambda\times m)\big)$ sia allora $(X,N)$ una v.a. bivariata con densità congiunta $f$ (la costruzione si fa in modo ovvio). Si ha

$$f_X(x) = \sum_k f(x,k) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} & \text{per } x\in(0,1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{per } x\in(0,1) \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

e, per ogni $k\in\{0,1,\dots,n\}$

$$p_{N|X}(k|x) = \begin{cases} \frac{f(x,k)}{f_X(x)} = \frac{\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}{1} = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} & \text{per } x\in(0,1) \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Dunque la coppia $(X,N)$ così costruita rispetta le condizioni richieste.

La densità di $N$ è data da

$$p_N(k) = \int f(x,k)\, dx = \begin{cases} \binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\, dx & \text{per } k\in\{0,1,\dots,n\} \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Ricordiamo ora la formula ($\Gamma =$funzione Gamma di Eulero)

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

da cui otteniamo

$$\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\, dx = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Quindi

$$p_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{per } k\in\{0,1,\dots,n\} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

e si riconosce la densità (discreta) della legge uniforme sull'insieme $\{0,1,\dots,n\}$.

La legge condizionale di $X$, noto $N = k$, si calcola ora nel modo seguente. Per ogni $x \in (0,1)$ si ha

$$f_{X|N}(x|k) = \begin{cases} \frac{f(x,k)}{p_N(k)} & \text{per } k \in \{0,1,\ldots,n\} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}{\frac{1}{n+1}} & \text{per } k \in \{0,1,\ldots,n\} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} & \text{per } k \in \{0,1,\ldots,n\} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} x^k (1-x)^{n-k} & \text{per } k \in \{0,1,\ldots,n\} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

Si riconosce in questa formula la densità della distribuzione $B(k+1, n-k+1)$.

**Problema 40**

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una $\sigma$-algebra. Sia $\mathcal{I} \neq \emptyset$ un insieme di parti di $\Omega$ che (i) contiene $\Omega$, (ii) è stabile per intersezione, (iii) genera $\mathcal{G}$, i.e.,

$$\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{I}).$$

Siano $X$ una v.a. integrabile e $Y$ una v.a. integrabile e $\mathcal{G}$-misurabile t.c.

$$\mathbb{E}[X 1_A] = \mathbb{E}[Y 1_A], \qquad \forall A \in \mathcal{I}.$$

Allora si ha

$$\mathbb{E}[X 1_A] = \mathbb{E}[Y 1_A], \qquad \forall A \in \mathcal{G}$$

e quindi

$$Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \quad q.c.$$

**Una soluzione:**

Si verifica subito che la famiglia $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{G} : \mathbb{E}[X 1_A] = \mathbb{E}[Y 1_A]\}$ è una classe monotona stabile per differenza. Dunque si può applicare il Teorema delle Classi Monotone, che permette di concludere che $\mathcal{M}$ contiene $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{G}$. Poiché $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$, si conclude che $\mathcal{M} = \mathcal{G}$. Con i soliti passaggi (linearità, lemma di Fatou e scomposizione $f = f^+ - f^-$) si ottiene la relazione $\mathbb{E}[Xf] = \mathbb{E}[Yf]$ a tutte le funzioni misurabili limitate, e di conseguenza si ottiene la tesi.

**Problema 41**

Provare che la funzione caratteristica $\varphi_X$ di una v.a. reale $X$ è a valori reali se e solo se la legge di probabilità di $X$ è simmetrica (cioè $X$ e $-X$ sono equidistribuite).

**Una soluzione:**

Supponiamo che $X$ sia simmetrica. Allora

$$\varphi_X(t) = \varphi_{-X}(t) = E\big[e^{-itX}\big] = E\big[\overline{e^{itX}}\big] = \overline{E\big[e^{itX}\big]} = \overline{\varphi_X(t)},$$

da cui segue che $\varphi_X$ è a valori reali.

Viceversa, se $\varphi_X$ è a valori reali, si ha

$$\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)} = \overline{E\big[e^{itX}\big]} = E\big[\overline{e^{itX}}\big] = E\big[e^{-itX}\big] = \varphi_{-X}(t),$$

da cui segue che $X$ e $-X$ hanno la stessa legge.

**Problema 42**

Sia $\varphi$ una funzione caratteristica e supponiamo che si abbia, intorno a 0, $\varphi(t) = 1 + o(t^2)$: provare che necessariamente $\varphi$ è la costante 1.

**Una soluzione:**

Vale il

**Theorem 1.** *Se*

$$\limsup_{h\to 0} \frac{\varphi(h) - 2\varphi(0) + \varphi(-h)}{h^2} > -\infty,$$

*allora* $E\big[X^2\big] < \infty$.

D'altra parte, se $E\big[X^2\big] < \infty$, allora vale lo sviluppo

$$\varphi(t) = 1 + itE[X] - \frac{t^2}{2}E\big[X^2\big] + o(t^2),$$

da cui segue

$$\frac{\varphi(t)-1}{t^2} = \frac{itE[X]}{t^2} - \frac{E\big[X^2\big]}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2} \to \begin{cases} \infty & \text{se } E[X] \neq 0 \\ -\frac{E\left[X^2\right]}{2} & \text{se } E[X] = 0, \end{cases} \quad \text{per } t \to 0.$$

Ora, se $\varphi(t) = 1 + o(t^2)$, l'ipotesi del Teorema è verificata, e inoltre abbiamo $\frac{\varphi(t)-1}{t^2} = \frac{o(t^2)}{t^2} \to 0$. Quindi deve essere $E[X] = 0$ e anche $E\big[X^2\big] = 0$. Allora $VarX = 0$, cioè $X =$ costante$= E[X] = 0$ (e la f. car. vale 1).

**Problema 43**

Perchè la funzione $\varphi(t) = e^{t^4}$ non può essere una funzione caratteristica?

**Una soluzione:**

La funzione $\varphi(t) = e^{t^4}$ ammette intorno a 0 uno sviluppo del tipo $\varphi(t) = 1 + o(t^2)$; ma l'unica funzione caratteristica con questo sviluppo è la costante 1, come abbiamo visto nel problema precedente.

### Problema 44

(i) Calcolare la funzione caratteristica di una variabile $X$ con densità $\mathcal{E}(lambda)$.

(ii) Si chiama densità esponenziale doppia (o anche densità di Laplace) la funzione $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Calcolare la funzione caratteristica di una variabile $X$ con densità esponenziale doppia.

(iii) Dedurre da (ii) la funzione caratteristica di una variabile $Y$ con densità di Cauchy.

**Una soluzione:**

(i) Si ha

$$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{itx}\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - it)x}\,dx = -\lambda \lim_{c\to\infty} \frac{e^{-(\lambda-it)x}}{\lambda - it}\Big|_0^c$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Dai calcoli precedenti si deduce che

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} e^{itx}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{x} e^{itx}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} e^{itx}\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} e^{-itx}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} e^{itx}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x(1+it)}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x(1-it)} e^{itx}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it}\Big) = \frac{1}{1+t^2}.$$

(iii) Con la formula di inversione per la densità esponenziale doppia si trova che

$$\frac{1}{2} e^{-|y|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(s) e^{-isy}\,ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+s^2} e^{-isy}\,ds.$$

Ora ponendo $-y = t$ e moltiplicando per 2 si trova

$$e^{-|t|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(1+s^2)} e^{its}\,ds = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx}\,dx = \varphi_Y(t),$$

perché

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

è la densità di Cauchy.

**Problema 45**

Siano $X_1, \dots X_n$ v.a. indipendenti con legge di Cauchy. Mostrare che $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ ha ancora legge di Cauchy.

**Una soluzione:**

Calcoliamo la f. car. di $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Per noti risultati

$$\varphi_{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}}(t) = \varphi_{X_1}\Big(\frac{t}{n}\Big) \cdot \dots \cdot \varphi_{X_n}\Big(\frac{t}{n}\Big) = \Big(e^{-\frac{|t|}{n}}\Big)^n = e^{-|t|}.$$

Si riconosce la f. car. della distribuzione di Cauchy, e quindi $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ ha legge di Cauchy perché, come è noto, la f. car. individua la legge.

**Problema 46**

(i) Calcolare la f. car. di una v.a. $X$ avente *distribuzione triangolare,* cioè con densità

$$f(x) = (1-|x|)1_{[-1,1]}(x) = (1-|x|)^+.$$

(ii) Dedurne la f. car. della *distribuzione di Polya*, cioè con densità

$$g(x) = \frac{1-\cos x}{\pi x^2}.$$

**Una soluzione:**

(i) Come è noto, la distribuzione triangolare è la distribuzione della somma di due v. a. $S$ e $T$ tra loro indipendenti ed entrambe di legge $\mathcal{U}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Quindi, per $t \neq 0$, (ved. dopo Probl. 48 (vi))

$$\varphi_X(t) = \varphi_S(t)\varphi_T(t) = \varphi_S^2(t) = \Big(\frac{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}{it}\Big)^2 = \Big(\frac{2\sin\frac{t}{2}}{t}\Big)^2 = \frac{2(1-\cos t)}{t^2}.$$

(ii) Con la formula di inversione si ha

$$(1-|y|)^+ = f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(1-\cos s)}{s^2} e^{-isy} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos s}{s^2} e^{-isy} ds.$$

Ponendo come prima $y = -t$ si trova

$$(1-|t|)^+ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos s}{s^2} e^{ist} ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{itx} dx.$$

Dunque la f. car. della densità di Polya è $\varphi(t) = (1-|t|)^+$.

**Problema 47**

Perchè la funzione $\varphi(t) = e^{i|t|}$ non può essere una funzione caratteristica? Viceversa, la funzione $\psi(t) = e^{it}$ è una funziona caratteristica: di quale variabile aleatoria?

**Problema 48**

Dimostrare che, se $\varphi$ è una f. car., lo sono anche (i) $\mathcal{R}e\varphi$ e (ii) $|\varphi|^2$.

**Una soluzione:**

(i) Sia $X$ con f. car. $\varphi$, e sia $Y$ una v.a. indipendente da $X$ e tale che $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$. Posto $Z = XY$, si ha, per l'indipendenza,

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}\left[e^{itXY}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itXY}1_{\{Y=1\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{itXY}1_{\{Y=-1\}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX}1_{\{Y=1\}}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-itX}1_{\{Y=-1\}}\right]$$
$$= P(Y = 1)\mathbb{E}\left[e^{itX}\right] + P(Y = -1)\mathbb{E}\left[e^{-itX}\right] = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2}\varphi(-t) = \frac{1}{2}\big(2\mathcal{R}e\varphi(t)\big) = \mathcal{R}e\varphi(t),$$

ricordando che $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$.

(ii) Sia $X$ come sopra e $Y$ una v.a. indipendente da $X$ e avente la stessa legge di $-X$. Posto $Z = X + Y$, si ha, per l'indipendenza,

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}\left[e^{it(X+Y)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]\mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]\mathbb{E}\left[e^{-itX}\right] = \varphi(t)\varphi(-t) = \varphi(t)\overline{\varphi(t)} = |\varphi(t)|^2.$$

Oppure: entrambi i risultati sono una conseguenza immediata del Teorema di Bochner (v. dopo)

**Problema 49**

Trovare un esempio di una probabilità $P$ che abbia densità e tale che $\int |\varphi(t)|\, dt = \infty$.

**Una soluzione:**

Notiamo che il teorema di inversione dice fra l'altro che, se $\int |\varphi(t)|\, dt < \infty$, allora la densità è continua. Dunque è cosa saggia andare a cercare una densità discontinua. Un esempio è $X \sim \mathcal{E}(1)$, la cui f. car. è $\varphi(t) = \frac{1}{1-it}$. Infatti

$$|\varphi(t)| = \sqrt{\varphi(t)\overline{\varphi(t)}} = \sqrt{\frac{1}{1-it} \cdot \frac{1}{1+it}} = \sqrt{\frac{1}{1+t^2}} \sim \frac{1}{t}, \qquad t \to \infty.$$

Un altro esempio è $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$, che ha $\varphi(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$, per cui

$$|\varphi(t)| = \sqrt{\varphi(t)\overline{\varphi(t)}} = \sqrt{\frac{e^{it}-1}{it} \cdot \frac{e^{-it}-1}{-it}} = \sqrt{\frac{2-2\cos t}{t^2}} = \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2} = \left|\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right|,$$

che come è noto non è integrabile all'infinito.

**Problema 50**

Sia $(X, Y)$ un vettore gaussiano a valori in $\mathbb{R}^2$: provare che esiste una costante $\rho$ tale che le variabili $X$ e $(Y - \rho X)$ siano indipendenti. Qual è l'unico caso in cui $\rho$ non è univocamente determinata?

**Problema 51**

Siano $X = (X_i)_{i=1}^d$, $Y = (Y_j)_{j=1}^n$ vettori aleatori tali che la variabile vettoriale $(X, Y)$ sia un vettore aleatorio gaussiano a valori in $\mathbb{R}^{d+n}$. Mostrare che se $\mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, d\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, allora $X$ e $Y$ sono variabili aleatorie indipendenti.

**Problema 52**

Sia $X = (X_i)_{i=1}^d$ un vettore aleatorio e sia $Y$ una variabile aleatoria reale, tali che $(X, Y)$ siano un vettore aleatorio gaussiano (a valori in $\mathbb{R}^{d+1}$). Mostrare che $\mathbb{E}\left[Y|\sigma(X)\right]$ è combinazione lineare affine delle variabili $X_i$ (a coefficient costanti).

**Problema 53**

Calcolare la funzione generatrice dei momenti di una variabile reale $X$, nel caso in cui abbia legge

(i) Binomiale di parametri $(n, p)$,

(ii) Poisson di parametro $\lambda$,

(iii) Geometrica di parametro $p$,

(iv) Gamma di parametri $(\alpha, \lambda)$,

(v) Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$,

(vi) Uniforme sull'intervallo $(a, b)$.

**Problema 54**

Mostrare che se $X$, $Y$ sono variabili indipendenti, allora la funzione generatrice dei momenti della somma $X + Y$ è il prodotto delle funzioni generatrici di $X$ ed $Y$.

**Una soluzione:**

Si ha

$$g_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left[t^{X+Y}\right] = \mathbb{E}\left[t^X t^Y\right] = \mathbb{E}\left[t^X\right]\mathbb{E}\left[t^Y\right] = g_X(t) g_Y(t).$$

**Problema 55**

Provare che una funzione caratteristica $\varphi$ è semidefinita positiva nel senso seguente: scelti comunque $n$ numeri reali $t_1, \ldots, t_n$ ed $n$ complessi $z_1, \ldots, z_n$ si ha

$$\sum_{h,k=1}^{n} \varphi(t_h - t_k) z_h \bar{z}_k \geq 0.$$

**Una soluzione:**

$$\sum_{h,k=1}^{n} \varphi(t_h - t_k) z_h \bar{z}_k = \sum_{h,k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{i(t_h-t_k)X}\right] z_h \bar{z}_k = \mathbb{E}\left[\sum_{h,k=1}^{n} e^{i(t_h-t_k)X} z_h \bar{z}_k\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\Big(\sum_{h=1}^{n} e^{it_hX} z_h\Big)\overline{\Big(\sum_{h=1}^{n} e^{it_hX} z_h\Big)}\right] = \mathbb{E}\left[\Big\|\sum_{h=1}^{n} e^{it_hX} z_h\Big\|^2\right] \geq 0.$$

**Problema 56**

*(molto facoltativo)* Un importante teorema di Bochner afferma il viceversa, cioè se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua, semidefinita positiva, con $\varphi(0) = 1$, allora $\varphi$ è la funzione caratteristica di una opportuna misura di probabilità su $\mathbb{R}$. Per dimostrarlo, si può argomentare nel seguente modo:

(i) Sfruttando le proprietà della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \varphi(t) \\ \varphi(-t) & 1 \end{pmatrix}$$

dedurre che $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ e inoltre $|\varphi(t)| \leq 1$, per ogni $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Mostrare che per ogni $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua, limitata e integrabile, ossia $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|dt < \infty$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t-s)h(t)\bar{h}(s)dtds \geq 0.$$

(approssimare l'integrale usando somme alla Riemann e passare al limite usando ad esempio il teorema di convergenza dominata di Lebesgue).

(iii) Posta $h(t) = e^{itx-t^2\varepsilon}$, con $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, dedurne che

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u)e^{-u^2\varepsilon/2}e^{-ixu}du \geq 0.$$

(iv) Mostrare $f_\varepsilon$ è una densità di probabilità $\mathbb{R}$ e che la funzione caratteristica di una variabile $X_\varepsilon$ con tale densità è data da

$$\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t)e^{-t^2\varepsilon/2}.$$

(Serve sapere che $\int_{\mathbb{R}} \frac{sin^2 s}{s^2}\, ds = \pi$).

(v) Per concludere, usiamo il teorema di Paul Lévy (Teorema 4.3.6 appunti di Pratelli): al tendere di $\varepsilon \to 0$ le funzioni caratteristiche di $X_\varepsilon$ convergono puntualmente a $\varphi$ (continua), che quindi è la funzione caratteristica di una variabile $X$.

**Una soluzione:**

(i)Prendiamo $n = 2$, $t_1 = 0$ e $t_2 = t$. La proprietà di semidefinitezza dà allora (con $\phi(0) = 1$)

$$z_1\bar{z}_1 + \phi(-t)z_1\bar{z}_2 + \phi(t)\bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 \geq 0, \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Ponendo $z_1 = 1$, $z_2 = i$ essa diventa

$$2 - i\phi(-t) + i\phi(t) \geq 0,$$

il che implica che $\phi(t) - \phi(-t) \in \mathbb{C}$. Ponendo invece $z_1 = z_2 = i$ si trova

$$2 + \phi(-t) + \phi(t) \geq 0$$

e questa implica che $\phi(t)+\phi(-t) \in \mathbb{R}$. Scrivendo ora $\phi(t) = a+ib$, $\phi(-t) = c+id$, le due condizioni trovate diventano rispettivamente

$$(a - c) + i(b - d) \in \mathbb{C}$$

$$(a + c) + i(b + d) \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$c = a, \quad d = -b.$$

Quindi

$$\phi(t) = a + ib, \quad \phi(-t) = c + id = a - ib = \overline{\phi(t)}.$$

Oppure: dalla relazione di semidefinitezza, ponendo $z_1 = 1$ e $z_2 = z$ otteniamo

$$2 + \phi(-t)\bar{z} + \phi(t)z \geq 0, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

da cui $\phi(-t)\bar{z} + \phi(t)z \in \mathbb{R}$. D'altra parte anche $\overline{\phi(t)}\bar{z} + \phi(t)z \in \mathbb{R}$ e dunque, sottraendo, si ottiene che $\bar{z}\big(\overline{\phi(t)} - \phi(-t)\big) \in \mathbb{R}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Prendendo $z = 1$ si trova che $\overline{\phi(t)} - \phi(-t) \in \mathbb{R}$. Prendendo invece $z = -i$ si trova $\overline{\phi(t)} - \phi(-t) \in \mathbb{C}$, da cui segue che $\overline{\phi(t)} - \phi(-t) = 0$.

La matrice assegnata è semidefinita positiva, e dunque ha determinante $\geq 0$, e cioè

$$1 - \phi(t) \cdot \phi(-t) = 1 - \phi(t) \cdot \overline{\phi(t)} = 1 - \big|\phi(t)\big|^2 \geq 0,$$

e quindi $\big|\phi(t)\big| \leq 1$.

Oppure: Scriviamo $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, $\phi(t) = a+ib$. Sostituendo, la relazione di semidefinitezza diventa

$$\rho_1^2 + (a + ib)\rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1-\theta_2)} + (a - ib)\rho_1\rho_2 e^{i(\theta_2-\theta_1)} + \rho_2^2 \geq 0;$$

dividendo per $\rho_2^2$ e ponendo $t = \frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\theta_1 - \theta_2 = \alpha$ otteniamo

$$t^2 + 2t(a\cos\alpha - b\sin\alpha) + 1 \geq 0, \qquad \forall t.$$

Dunque dovrà essere

$$\frac{\Delta}{4} = (a\cos\alpha - b\sin\alpha)^2 - 1 \leq 0.$$

Ponendo $a = \rho\cos\beta$, $b = \rho\sin\beta$, questa relazione diventa

$$\rho^2\cos^2(\alpha + \beta) \leq 1.$$

Essa deve essere valida per ogni valore di $\alpha$, e in particolare per $\alpha = -\beta$. Si ottiene allora

$$\left|\phi(t)\right|^2 = a^2 + b^2 = \rho^2 \le 1.$$

(ii) Si approssima l'integrale con le somme di Riemann, e si passa al limite utilizzando il Teorema di Lebesgue (conv. dominata) in quanto

$$|\varphi(t-s)h(t)\bar{h}(s)| \le |h(t)||\bar{h}(s)| = |h(t)||h(s)|,$$

che è integrabile per ipotesi.

(iii) Con il cambio di variabili

$$\begin{cases} u = t - s \\ v = t + s, \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{u+v}{2} \\ s = \frac{u-v}{2} \end{cases}, \qquad J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad t^2 + s^2 = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

si trova

$$0 \le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t-s)e^{itx-t^2\varepsilon}e^{-isx-s^2\varepsilon}dtds = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t-s)e^{ix(t-s)}e^{\ \varepsilon(t^2+s^2))}dtds$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u)e^{iux}e^{-\varepsilon\frac{u^2+v^2}{2}}dudv = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} dve^{-\varepsilon\frac{v^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u)e^{iux}e^{-\varepsilon\frac{u^2}{2}}du = \pi f_\varepsilon(x)\int_{\mathbb{R}} dve^{-\varepsilon\frac{v^2}{2}}$$

Per la positività dell'integrale, si deduce che $f_\varepsilon(x) \ge 0$.

(iv) Dato che $f_\varepsilon \ge 0$, basta dimostrare che $\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,dx = 1$. Consideriamo le funzioni

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{n} & |x| \le n \\ 0 & |x| > n \end{cases} \qquad \uparrow 1, \qquad n \to \infty.$$

Per Beppo Levi abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)f_\varepsilon(x)\,dx = \lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dx\,\psi_n(x)\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t)e^{-ixt}\,dt \underbrace{=}_{Fubini}$$
$$= \lim_n \int_{\mathbb{R}} dt\,\varphi_\varepsilon(t)\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)e^{-ixt}\,dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}} dt\,\varphi_\varepsilon(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\Big(1 - \frac{|x|}{n}\Big)e^{-ixt}\,dx$$
$$\underbrace{=}_{\substack{cambio\,di\,var.\,y=-\frac{x}{n} \\ nell'int.\,interno}} n\lim_n \int_{\mathbb{R}} dt\,\varphi_\varepsilon(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-|y|)e^{iy(tn)}\,dy.$$

Si riconosce nell'integrale interno la f. car. di una distribuzione triangolare, calcolata nel punto $tn$; quindi, dal Problema 45 otteniamo che l'ultima quantità qui sopra è uguale a

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t)\frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{n\frac{t^2}{4}}\,dt \underbrace{=}_{\substack{cambio\,di\,var. \\ s=\frac{tn}{2}}} \frac{1}{\pi}\lim_n \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon\Big(\frac{2s}{n}\Big)\frac{\sin^2 s}{s^2}\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\varphi_\varepsilon(0)}_{=1}\frac{\sin^2 s}{s^2}\,ds = 1.$$

Calcoliamo ora la f. car. di una variabile $X_\varepsilon$ con densità $f_\varepsilon$.

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x) e^{itx}\, dx \underbrace{=}_{\substack{f_\varepsilon integrabile\\ +conv.dominata}} \lim_n \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) f_\varepsilon(x) e^{itx}\, dx$$

$$= \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx\, \psi_n(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(u) e^{-ix(u-t)}\, du \underbrace{=}_{Fubini} \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} du\, \varphi_\varepsilon(u) \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) e^{-ix(u-t)}\, dx$$

$$= \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} du\, \varphi_\varepsilon(u) \int_{-n}^{n} \Big(1 - \frac{|x|}{n}\Big) e^{-ix(u-t)}\, dx = \lim_n \int_{\mathbb{R}} du\, \varphi_\varepsilon(u) \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{n(u-t)}{2}}{n \frac{(u-t)^2}{4}} \underbrace{=}_{\substack{cambio\ di\ var.\\ s=\frac{(t-u)n}{2}}}$$

$$= \lim_n \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon\Big(t - \frac{2s}{n}\Big) \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 s}{s^2}\, ds = \varphi_\varepsilon(t).$$

**Problema 57**

Siano $(Y_n)$ una successione di v.a. i.i.d. con media $\mu$ e varianza $\sigma^2$ (finite) e sia $N$ una v.a. a valori interi, con $E[N^2] < \infty$, indipendente da $(Y_n)$. Posto $X = Y_1 + \cdots + Y_N$, dimostrare che

$$Var(X) = \sigma^2 E[N] + \mu^2 Var(N).$$

**Una soluzione:**

Useremo le formule

$$\mathrm{Var}\,(X|N) = E[X^2|N] - \big(E[X|N]\big)^2, \qquad \mathrm{Var}\,(X) = E[\mathrm{Var}\,(X|N)] + \mathrm{Var}\,(E[X|N]).$$

Abbiamo, per noti risultati sulle speranze condizionali

$$\begin{aligned} 1_{\{N=n\}} E[X^2|N] &= \frac{E[X^2 1_{\{N=n\}}]}{P(N=n)} = \frac{E[(Y_1 + \cdots + Y_N)^2 1_{\{N=n\}}]}{P(N=n)} \\ &= \frac{E[(Y_1 + \cdots + Y_n)^2 1_{\{N=n\}}]}{P(N=n)} = E[(Y_1 + \cdots + Y_n)^2], \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale per l'indipendenza di $N$ da $(Y_n)$. Conti analoghi danno anche

$$1_{\{N=n\}} E[X|N] = E[Y_1 + \cdots + Y_n].$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,(X|N) &= \sum_n 1_{\{N=n\}} \Big( E[(Y_1 + \cdots + Y_n)^2] - E^2[Y_1 + \cdots + Y_n] \Big) \\ &= \sum_n 1_{\{N=n\}} \mathrm{Var}\,(Y_1 + \cdots + Y_n) = \sigma^2 \sum_n 1_{\{N=n\}} n = \sigma^2 N, \end{aligned}$$

da cui si ricava $E[\mathrm{Var}\,(X|N)] = \sigma^2 E[N]$. Analogamente

$$E[X|N] = \sum_n 1_{\{N=n\}} E[X|N] = \sum_n 1_{\{N=n\}} E[Y_1+\cdots+Y_n] = \mu \sum_n 1_{\{N=n\}} n = \mu N,$$

da cui $\mathrm{Var}\,(E[X|N]) = \mu^2\,\mathrm{Var}\,(N)$. Sommando e usando la seconda delle formule sopra ricordate si ottiene il risultato.

**Problema 58**

Sia $(X,Y)$ una normale bivariata con medie $\mu_1$ e $\mu_2$, varianze $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ e correlazione $\rho$. Dimostrare che

(i)

$$E[X|Y] = E[X] + \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}(Y - E[Y]) = \mu_1 + \rho\sigma_1\Big(\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\Big);$$

(ii)

$$Var(X|Y) = \sigma_1^2(1-\rho^2).$$

**Una soluzione:**

*Prima soluzione.* Senza ledere la generalità, possiamo supporre che $X$ e $Y$ siano centrate e ridotte, e dimostreremo che $E[X|Y] = \rho Y$. La densità condizionale di $X$ data $Y$ è

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{y^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right).$$

Si tratta evidentemente della densità $\mathcal{N}(\rho y, 1-\rho^2)$. Dunque $E[X|Y=y] = \rho y$, e quindi $E[X|Y] = \rho Y$ e $\mathrm{Var}\,(X|Y) = 1-\rho^2$.

*Seconda soluzione.* Dimostriamo dapprima che, se $X = \phi(Z,Y)$ con $Z$ e $Y$ indipendenti tra loro, allora $E[X|Y=y] = E[\phi(Z,y)] =: h(y)$.

Euristica: caso discreto.

$$E[X|Y=y] = \sum_x xP(X=x|Y=y) = \sum_x x\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = \sum_x x\frac{P(\phi(Z,Y)=x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$= \sum_x x\frac{P(\phi(Z,y)=x,Y=y)}{P(Y=y)} \underbrace{=}_{Z\,e\,Y\,indip.} \sum_x xP(\phi(Z,y)=x) = E[\phi(Z,y)].$$

Dimostrazione rigorosa. Sia $A \in \sigma(Y)$. Allora $1_A = 1_B(Y)$ per qc. boreliano $B$. Si ha

$$\int_A h(Y)\,\mathrm{d}P = \int 1_B(Y)h(Y)\,\mathrm{d}P = \int_{\mathbb{R}} 1_B(y)h(y)\,\mathrm{d}\mu_Y(y) = \int_B h(y)\,\mathrm{d}\mu_Y(y)$$
$$= \int_B \Big( \int \phi(Z,y)\,\mathrm{d}P \Big)\,\mathrm{d}\mu_Y(y) = \int_B \Big( \int_{\mathbb{R}} \phi(z,y)\,\mathrm{d}\mu_Z(z) \Big)\,\mathrm{d}\mu_Y(y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \Big( \int_{\mathbb{R}} 1_B(y)\phi(z,y)\,\mathrm{d}\mu_Y(y) \Big)\,\mathrm{d}\mu_Z(z) \underbrace{=}_{Z\,e\,Y\,indip.} \iint_{\mathbb{R}^2} 1_B(y)\phi(z,y)\,\mathrm{d}\mu_{Z,Y}(z,y)$$
$$= \int_\Omega 1_B(Y)\phi(Z,Y)\,\mathrm{d}P = \int 1_A\phi(Z,Y)\,\mathrm{d}P = \int_A \phi(Z,Y)\,\mathrm{d}P.$$

Passiamo all'esercizio.

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $(X - aY, Y)$ è un vettore gaussiano. Determiniamo $a$ in modo che $X - aY$ e $Y$ siano non correlate, e di conseguenza indipendenti (in quanto gaussiane).

$$0 = Cov(V - aY, Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) - a\,\mathrm{Var}\,(Y)$$

implica $a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(Y)} = \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}$ Con questa scelta di $a$, posto $Z = X - aY$, si ha $X = Z + aY$, con $Z$ e $Y$ indipendenti fra loro. Si ha

$$h(y) := E[X|Y=y] = E[Z+ay] = E[Z+ay] = E[X - aY + ay] = E[X] + a(y - E[Y])$$
$$= E[X] + \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}\,(Y)}(y - E[Y]) = \mu_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2).$$

Dunque, per il risultato visto sopra,

$$E[X|Y] = h(Y) = \mu_1 + \rho\sigma_1\frac{Y - \mu_2}{\sigma_2}.$$

Passiamo al calcolo della varianza condizionale.

Prima di tutto

$$\mathrm{Var}\,(X|Y=y) = \mathrm{Var}\,(Z+ay) = \mathrm{Var}\,(Z) = \mathrm{Var}\,(X - aY)$$
$$= \mathrm{Var}\,(X) + a^2\,\mathrm{Var}\,(Y) - 2a\,\mathrm{Cov}\,(X,Y) = \mathrm{Var}\,(X) + \Big(\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}\,(Y)}\Big)^2\,\mathrm{Var}\,(Y) - 2\frac{\mathrm{Cov}^2(X,Y)}{\mathrm{Var}\,(Y)}$$
$$= \mathrm{Var}\,(X) - \frac{\mathrm{Cov}^2(X,Y)}{\mathrm{Var}\,(Y)} = \sigma_1^2 - \frac{\rho^2(\sigma_1^2\sigma_2^2)}{\sigma_2^2} = \sigma_1^2(1-\rho^2).$$

Dato che questa quantità non dipende da $y$, si ha anche

$$\mathrm{Var}\,(X) = \sigma_1^2(1-\rho^2).$$

**Problema 59**

Sia $(X, Y_1, \dots, Y_n)$ un vettore gaussiano $(n+1)-$dimensionale, con $(Y_1, \dots, Y_n)$ indipendenti. Dimostrare che

$$E[X|Y_1, \dots, Y_n] = E[X] + \sum_{k=1}^{n} \frac{Cov(X, Y_k)}{Var(Y_k)}(Y_k - E[Y_k]).$$

Inoltre $E[X|Y_1, \dots, Y_n]$ è la proiezione ortogonale di $X$ sul sottospazio lineare generato da $Y_1, \dots, Y_n$

**Una soluzione:**

La dimostrazione del primo punto si può fare come la seconda dell'esercizio precedente, imponendo l'indipendenza fra $Z = X - \sum_{k=1}^{n} a_k Y_k$ e il vettore $(Y_1, \dots, Y_n)$ e osservando che basta imporre che $Z$ sia indipendente da ciascuna delle $Y_k$ singolarmente.

Per il secondo punto: per semplicità supponiamo le variabili centrate e ridotte, e sia $\sum_{j=1}^{n} \beta_j Y_j$ un elemento del sottospazio lineare generato da $Y_1, \dots, Y_n$. Si ha

$$E\Big[\sum_{j=1}^{n} \beta_j Y_j \Big(X - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Cov}(X, Y_k) Y_k\Big)\Big] = E\Big[\sum_{j=1}^{n} \beta_j X Y_j\Big] - E\Big[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_j \,\mathrm{Cov}(X, Y_k) Y_j Y_k\Big)\Big]$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \,\mathrm{Cov}(X, Y_j) - \sum_{j,k} \beta_j \,\mathrm{Cov}(X, Y_k) \underbrace{E[Y_j Y_k]}_{=\delta_{j,k}} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \,\mathrm{Cov}(X, Y_j) - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \,\mathrm{Cov}(X, Y_j)$$
$$= 0.$$

*Osservazione. In generale (cioè anche senza l'indipendenza di $Y_1, \dots, Y_n$), si può dimostrare che $E[X|Y_1, \dots, Y_n]$ appartiene al sottospazio lineare generato da $Y_1, \dots, Y_n$ ed è la proiezione ortogonale di $X$ su di esso.*

**Problema 60**

È data la densità

$$f(x, y) = c \exp\big(-(1 + x^2)(1 + y^2)\big), \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

dove $c$ è la costante normalizzatrice. Calcolare le densità condizionali $f_{X|Y}(x|y)$ e $f_{Y|X}(y|x)$. In particolare, tali densità sono gaussiane. Dunque le densità condizionali di normali multivariate sono gaussiane, ma tali densità possono essere gaussiane anche se la densità congiunta non lo è, come in questo caso.

**Una soluzione:**

Basta calcolare $f_{X|Y}(x|y)$. Cominciamo con il calcolare $f_Y(y)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= c\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-(1+x^2)(1+y^2)\big)\,dx \\ &= c\exp\big(-(1+y^2)\big)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-x^2(1+y^2)\big)\,dx. \end{aligned}$$

Posto $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2(1+y^2)}}$, l'espressione precedente diventa

$$c\exp\big(-(1+y^2)\big)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\big)\,dx$$
$$= c\sqrt{2\pi}\sigma\exp\big(-(1+y^2)\big)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\big)\,dx}_{+1} = c\sqrt{2\pi}\sigma\exp\big(-(1+y^2)\big)$$
$$= c\sqrt{\frac{\pi}{1+y^2}}\exp\big(-(1+y^2)\big).$$

Ora

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{c\exp\big(-(1+x^2)(1+y^2)\big)}{c\sqrt{\frac{\pi}{1+y^2}}\exp\big(-(1+y^2)\big)} = \sqrt{\frac{1+y^2}{\pi}}\exp\big(-x^2(1+y^2)\big),$$

e si tratta della densità $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2(1+y^)})$.

**Problema 61**

Sia $X$ una v.a. centrata e ridotta, e siano $Y$ e $Z$ due v.a. indipendenti, e con la stessa legge di $X$. Supponiamo che la v.a. $\frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$ abbia anch'essa la legge di $X$. Dimostrare che $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

**Una soluzione:**

Sia $\phi_X$ la f.c. di $X$ e indichiamo in modo simile le f.c. delle altre v.a. in gioco. Si ha allora

$$\phi_X(t) = \phi_{\frac{Y+Z}{\sqrt{2}}}(t) = \phi_{\frac{Y}{\sqrt{2}}}(t)\phi_{\frac{Z}{\sqrt{2}}}(t) = \phi_Y\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big)\phi_Z\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) = \Big\{\phi_X\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big)\Big\}^2$$

Iterando si ha

$$\phi_X\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) = \Big\{\phi_X\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big\}^2$$

e quindi

$$\phi_X(t) = \Big\{\phi_X\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big)\Big\}^2 = \Big\{\Big[\phi_X\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big]^2\Big\}^2 = \Big\{\phi_X\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big\}^4.$$

Per induzione si ottiene, per ogni $n$

$$\phi_X(t) = \left\{\phi_X\Big(\frac{t}{2^n}\Big)\right\}^{4^n}.$$

D'altra parte si ha lo sviluppo

$$\phi_X(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

da cui si ricava

$$\phi_X\Big(\frac{t}{2^n}\Big) = 1 - \frac{t^2}{2\cdot 4^n} + o\Big(\frac{t^2}{4^n}\Big).$$

Quindi

$$\phi_X(t) = \left\{1 - \frac{t^2}{2\cdot 4^n} + o\Big(\frac{t^2}{4^n}\Big)\right\}^{4^n} \to \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \quad n \to \infty,$$

per la relazione

$$\lim_{x\to\infty}\left\{1 + \frac{\alpha}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big)\right\} = \mathrm{e}^{\alpha}.$$

**Problema 62**

Siano $X$ una v.a. con legge $\mathcal{N}(0,1)$ e $a > 0$ una costante. Poniamo

$$Y = X1_{\{|X|\le a\}} - X1_{\{|X|>a\}}.$$

(i) Mostrare che $Y$ ha legge $\mathcal{N}(0,1)$. (ii) Calcolare $P(X+Y=0)$ (iii) Dedurre che il vettore $(X,Y)$ non è gaussiano e che le v.a. $X$ e $Y$ non sono indipendenti.

**Una soluzione:**

(i) Si ha

$$\begin{aligned} P(Y \le t) &= P(Y \le t, |X| \le a) + P(Y \le t, |X| > a) \\ &= P(X \le t, |X| \le a) + P(-X \le t, |X| > a) \\ &= P(X \le t, |X| \le a) + P(-X \le t, |-X| > a) \\ &= P(X \le t, |X| \le a) + P(X \le t, |X| > a) = P(X \le t). \end{aligned}$$

La penultima uguaglianza segue dal fatto che $X$ è una v.a. simmetrica. Dunque $Y$ ha la stessa legge di $X$, cioè è gaussiana standard.

(ii) Si ha

$$X+Y = X+X1_{\{|X|\le a\}}-X1_{\{|X|>a\}} = X+X1_{\{|X|\le a\}}-X\big(1-1_{\{|X|\le a\}}\big) = 2X1_{\{|X|\le a\}}.$$

Dunque

$$P(X+Y=0) = P\big(1_{\{|X|\le a\}} = 0\big) = P(|X| > a) = 2\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

(iii) Se il vettore $(X, Y)$ fosse gaussiano, ogni combinazione lineare di $X$ e $Y$ sarebbe gaussiana, ma non è così per $X + Y$, dato che si tratta di una v.a. neppure continua, in quanto $P(X + Y = 0) > 0$. Se $X$ e $Y$ fossero indipendenti, la legge della loro somma sarebbe $\mathcal{N}(0, 2)$, il che non è, come mostra il punto precedente.

**Problema 63**

Trovare un vettore gaussiano avente matrice di covarianza

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

**Una soluzione:**

Come suggerisce il teorema che dimostra l'esistenza della densità (nel caso di matrice definita positiva), conviene partire da due v.a. indipendenti $X$ e $Y$ aventi legge $\mathcal{N}(0, 1)$ e cercare un vettore gaussiano $(U, V)$ del tipo $U = aX + bY$, $V = cX + dY$, con $a$, $b$, $c$, $d$ costanti reali. Deve essere $1 = VarU = a^2 + b^2$, $1 = VarV = c^2 + d^2$, $\rho = Cov(U, V) = ac + bd$. Per esempio, $a = 1$, $b = 0$, $c = \rho$, $d = \sqrt{1 - \rho^2}$.

**Problema 64**

Sia $(X, Y)$ un vettore gaussiano centrato con matrice di covarianza

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

con $|\rho| < 1$. Calcolare la legge di $Z = \frac{X}{Y}$.

**Una soluzione:**

La densità congiunta di $(X, Y)$ è

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\Big( - \frac{1}{2(1 - \rho^2)} \Big\{ \frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} \Big\} \Big).$$

Calcoliamo la densità $f_Z$, data dalla formula (ved. es....)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy, y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\Big( - \frac{1}{2(1 - \rho^2)} y^2 \Big\{ \frac{z^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho z}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \Big\} \Big)\, dy.$$

Poniamo per semplicità

$$c(z) = \frac{z^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho z}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_2^2} = \Big( \frac{z}{\sigma_1} - \frac{\rho}{\sigma_2} \Big)^2 + \frac{1 - \rho^2}{\sigma_2^2} > 0$$

Con il cambio di var. $y = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{c(z)}}u$, $dy = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{c(z)}}du$ si ha allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y| \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \exp\Big(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}y^2 c(z)\Big)\,dy$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\sigma_1\sigma_2} \cdot \frac{1-\rho^2}{c(z)} \int_{-\infty}^{+\infty} |u| \exp(-\frac{u^2}{2})\,du = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi\sigma_1\sigma_2 c(z)} \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} u\exp(-\frac{u^2}{2})\,du}_{=1}$$
$$= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi\sigma_1\sigma_2 c(z)} = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi\sigma_1\sigma_2\left\{(\frac{z}{\sigma_1}-\frac{\rho}{\sigma_2})^2 + \frac{1-\rho^2}{\sigma_2^2}\right\}} = \frac{\sqrt{1-\rho^2}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\pi\left\{(z-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho)^2 + (1-\rho^2)\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right\}}$$
$$= \frac{\gamma}{\pi\left\{(z-x_0)^2+\gamma^2\right\}}.$$

Si tratta della densità di Cauchy con parametri $\gamma = \sqrt{1-\rho^2}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ e $x_0 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho$.

**Problema 65**

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità. Mostrare che se $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$ sono due sotto-$\sigma$-algebre di $\mathcal{F}$, si ha

$$E[\{X - E[X|\mathcal{E}]\}^2] + E[\{E[X|\mathcal{E}] - E[X|\mathcal{G}]\}^2] = E[\{X - E[X|\mathcal{G}]\}^2].$$

In particolare, si ha

$$E[\{X - E[X|\mathcal{E}]\}^2] \le E[\{X - E[X|\mathcal{G}]\}^2]$$

(più grande è il sottospazio ($L^2(\mathcal{E}) \supset L^2(\mathcal{G})$), più vicina a $X$ è la proiezione (di $X$ stessa) su di esso; in altre parole più informazione dà un errore più piccolo (in media quadratica).

**Una soluzione:**

Scriviamo

$$E[\{X - E[X|\mathcal{G}]\}^2] = E[\{(X - E[X|\mathcal{E}]) + (E[X|\mathcal{E}] - E[X|\mathcal{G}])\}^2]$$
$$= E[\{X - E[X|\mathcal{E}]\}^2] + E[\{X - E[X|\mathcal{G}]\}^2] + 2E[(X - E[X|\mathcal{E}])(E[X|\mathcal{E}] - E[X|\mathcal{G}])].$$

L'ultimo addendo è nullo, perché

- $E[X|\mathcal{E}] - E[X|\mathcal{G}]$ appartiene a $E[X|\mathcal{E}]$ ($E[X|\mathcal{G}] \in L^2(\mathcal{G}) \subset L^2(\mathcal{E})$, $E[X|\mathcal{E}] \in L^2(\mathcal{E})$)
- $X - E[X|\mathcal{E}]$ è ortogonale a $L^2(\mathcal{E})$: se $Y \in L^2(\mathcal{E})$, si ha

$$E\big[(X - E[X|\mathcal{E}])Y\big] = E[XY] - E\big[E[X|\mathcal{E}]Y\big]$$
$$= E[XY] - E\big[E[XY|\mathcal{E}]\big] = E[XY] - E[XY] = 0$$

**Problema 66**

Mostrare che, se $X \in L^p$ e $y \in L^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), si ha

$$E\big[XE[Y|\mathcal{E}]\big] = E\big[YE[X|\mathcal{E}]\big]$$

> **Una soluzione:**
> Infatti
> $$E\big[XE[Y|\mathcal{E}]\big] = E\left[E\big[XE[Y|\mathcal{E}]|\mathcal{E}\big]\right] = E\big[E[Y|\mathcal{E}]E[X|\mathcal{E}]\big]$$
> e, scambiando i ruoli di $X$ e $Y$, si trova
> $$E\big[YE[X|\mathcal{E}]\big] = E\big[E[X|\mathcal{E}]E[Y|\mathcal{E}]\big]$$

**Problema 67**

Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili indipendenti con $X_i \sim \mathcal{U}(0,1)$.

(i) Calcolare la funzione generatrice dei momenti di $X = X_1 + \cdots + X_n$.

(ii) Dedurne che la densità di $X$ è data la distribuzione di Irvin-Hall, per $x \in [0, n]$,

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} I_{\{k \le x\}} \frac{(x-k)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

(iii)

> **Una soluzione:**

**Problema 68**

Calcolare la densità di $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \ge 2$, dove $X_i \sim \mathcal{U}(-1,1)$ e indipendenti tra loro.

> **Una soluzione:**
> Si ha, per $t \neq 0$
> $$\varphi_{X_1}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t},$$
> e quindi
> $$\varphi_{S_n}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n,$$

che è integrabile per $n \geq 2$. Applicando la formula di inversione, si ha allora che la densità di $S_n$ è

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n e^{-itx}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos(tx)\, dx,$$

dato che la funzione $\frac{\sin t}{t}$ è pari (e quindi $\frac{\sin t}{t} \sin(tx)$ è dispari).

Anche se non sembra, si tratta di un polinomio in ciascun intervallo $(k, k+1)$ (ved. Problema precedente) e si annulla fuori dell'intervallo $(-n, n)$ (ovviamente, dato che la legge di $S_n$ ha supporto in $(-n, n)$).

**Problema 69**

Sia $X$ una v.a. a valori interi (relativi), con funzione caratteristica $\phi$. Dimostrare che, per ogni $h \in \mathbb{Z}$, si ha

$$P(X = h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ht} \phi(t) \mathrm{d}t.$$

**Una soluzione:**

Si ha

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(X = k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},$$

e sostituendo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ht} \phi(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ht} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(X = k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(X = k) \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(k-h)} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P(X = k)(2\pi \delta_{hk}),$$

dove $\delta_{hk}$ è il simbolo di Kronecker, dato che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(k-h)} \mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & h = k \\ 0 & h \neq k. \end{cases}.$$

Lo scambio tra sommatoria e integrale è giustificato dal teorema di convergenza dominata, in quanto

$$\Big| \sum_{k=-n}^{n} P(X = k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} Big| \leq \sum_{k=-n}^{n} P(X = k) \leq 1.$$

**Problema 70**

Mostrare che

1. se $z \in \mathbb{C}$ con $\mathcal{R}ez > 0$ e $\alpha > 0$ si ha

$$\int_0^{+\infty} z^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-zx} \mathrm{d}x = \Gamma(\alpha);$$

2. se $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, si ha

$$\varphi_X(t) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}t}\Big)^\alpha.$$

**Una soluzione:**

1. Sia $\gamma$ la semiretta del primo quadrante del piano complesso uscente dall'origine e avente la direzione di $z$. É facile vedere che

$$\int_0^{+\infty} z^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-zx} \mathrm{d}x = \int_\gamma z^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-zx} \mathrm{d}x;$$

(considerare la curva chiusa delimitata dal segmento $\gamma_{n,\epsilon}$ che va dal punto $P_\epsilon$ di $\gamma$ di ascissa $\epsilon$ al punto $P_n$ di $\gamma$ con ascissa $n$, dal segmento verticale che congiunge $P_n$ con il punto $Q_n = (n, 0)$, dal segmento dell'asse delle ascisse che congiunge $Q_n$ con il punto $Q_\epsilon = (\epsilon, 0)$ e infine dal segmento verticale che congiunge $Q_\epsilon$ con $P_\epsilon$. L'integrale sulla curva chiusa è nullo perché la funzione integranda è analitica nell'insieme racchiuso dalla curva; l'integrale sui segmento $P_nQ_n$ e $Q_\epsilon P_\epsilon$ è nullo perché su di essi la $x$ è costante. Dunque $\int_{\gamma_{n,\epsilon}} + \int_{Q_n}^{Q_\epsilon} = 0$, e quindi

$$\int_\gamma + \int_{+\infty}^0 = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \Big( \int_{\gamma_{n,\epsilon}} + \int_{Q_n}^{Q_\epsilon} \Big) = 0).$$

Usando il cambio di variabili $zx = y$ ($\mathrm{d}y = z\mathrm{d}x$), si ha poi

$$\int_\gamma z^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-zx} \mathrm{d}x = \int_\gamma z^\alpha \Big(\frac{y}{\beta}\Big)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-y} \frac{\mathrm{d}y}{\beta} = \int_\gamma y^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}y = \Gamma(\alpha).$$

La penultima uguaglianza si giustifica come abbiamo fatto sopra.

2.

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \mathrm{d}x = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-(\lambda-\mathrm{i}t)x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\lambda - \mathrm{i}t)^\alpha} \underbrace{\int_0^{+\infty} (\lambda - \mathrm{i}t)^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-(\lambda-\mathrm{i}t)x} \mathrm{d}x}_{=\Gamma(\alpha)} = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}t}\Big)^\alpha. \end{aligned}$$

Oppure (senza l'uso del punto 1.)

$$\begin{aligned} &\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \mathrm{d}x = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+k-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\lambda^{k+\alpha}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha)} x^{\alpha+k-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x}_{=1} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \Big(\frac{\mathrm{i}t}{\lambda}\Big)^k \frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Ora

$$\frac{(\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!} = \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!}(-1)^k = \binom{-\alpha}{k}(-1)^k$$

e quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\mathrm{it}}{\lambda}\Big)^k\frac{\Gamma(k+\alpha)}{k!\Gamma(\alpha)} = \sum_{k=0}\binom{-\alpha}{k}\Big(-\frac{\mathrm{it}}{\lambda}\Big)^k = \Big(1-\frac{\mathrm{it}}{\lambda}\Big)^{-\alpha} = \Big(\frac{\lambda}{\lambda-\mathrm{it}}\Big)^{\alpha}.$$

**Problema 71**

(i) Usando ripetutamente l'identità

$$\sin t = 2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} = 4\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{4}\sin\frac{t}{4} = \dots$$

dimostrare che

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(\cos\frac{t}{2^k}\Big).$$

(ii) Interpretare questa uguaglianza in termini di f. car.

**Una soluzione:**

(i) Per induzione si trova, per ogni $n$

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{n}\Big(\cos\frac{t}{2^k}\Big)\cdot\frac{\sin\frac{t}{2^n}}{\frac{t}{2^n}}$$

e passando al limite per $n\to\infty$ si ha l'uguaglianza cercata tenuto conto che $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{t}{2^n}}{\frac{t}{2^n}} = 1$.

(ii) Sia $T$ una v. a. uniforme tra $[-1,1]$. Allora abbiamo visto che la sua f. car. è

$$\frac{e^{it}-e^{-it}}{2it} = \frac{\sin t}{t}.$$

D'altra parte $\cos\frac{t}{2^k}$ è la f. car. di $X_k$, dove

$$P\Big(X_k = \frac{1}{2^k}\Big) = P\Big(X_k = -\frac{1}{2^k}\Big) = \frac{1}{2}.$$

Infatti

$$\phi_{X_k}(t) = \frac{1}{2}e^{i\frac{t}{2^k}} + \frac{1}{2}e^{-i\frac{t}{2^k}} = \cos\frac{t}{2^k}.$$

La formula trovata suggerisce che la somma "infinita" $\sum_{k=1}^{\infty}X_k$, dove le $X_k$ sono indipendenti e hanno la legge descritta sopra, ha la stessa funzione caratteristica, e dunque la stessa legge, di una v.a. uniforme tra $[-1,1]$. Questo fatto si può precisare nel modo seguente: se $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, allora il Teorema di P. Lévy implica che $S_n$ converge in legge ad una v.a. $S_\infty$ uniforme tra $[-1,1]$.

Osserviamo che, posto

$$Y_k = \frac{2^k X_k + 1}{2}, \Longrightarrow X_k = \frac{2Y_k - 1}{2^k}$$

allora le $Y_k$ sono indipendenti e

$$P(Y_k = 0) = P(Y_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

Se poniamo

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{2^k},$$

allora $Z$ rappresenta la scelta di un punto nell'intervallo $(0,1)$ con cifre binarie, e non è difficile vedere che $Z \sim \mathcal{U}(0,1)$. D'altra parte

$$S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} X_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2Y_k - 1}{2^k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2Z - 1.$$

Dato che $Z \sim \mathcal{U}(0,1)$, con semplici conti si vede che $2Z - 1 \sim \mathcal{U}(-1,1)$, e la sua f. car. è appunto $\frac{\sin t}{t}$.

**Problema 72**

Siano $X_k$ sono indipendenti con $P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$ e poniamo

$$X = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{3^k}.$$

(i) Mostrare che $X$ Ha la *distribuzione di Cantor*, cioè la sua f.d.r. è $F(x) = 0$ per $x \leq 0$, $F(x) = 1$ per $x \geq 1$, $F(x) = \frac{1}{2}$ per $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$, $F(x) = \frac{1}{4}$ per $\frac{1}{9} \leq x < \frac{2}{9}$, $F(x) = \frac{3}{4}$ per $\frac{7}{9} \leq x < \frac{8}{9}$, e così via.

(ii) Calcolare la f. car. di $X$.

**Una soluzione:**

(i) (a) Sia $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$. Mostriamo che

$$\{X_1 = 0\} \subset \left\{X \leq \frac{1}{3}\right\} \subset \{X \leq t\} \subset \left\{X \leq \frac{2}{3}\right\} \subset \{X_1 = 0\}$$

e quindi $\{X_1 = 0\} = \{X \leq t\}$, da cui

$$P(X \leq t) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Infatti

1) Se $X_1 = 0$, allora

$$X = 2\Big(\frac{0}{3} + \frac{*}{3^2} + \frac{*}{3^3} + \cdots\Big) \le 2\Big(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots\Big) = \frac{2}{9}\Big(1 + \frac{1}{3} + \cdots\Big) = \frac{1}{3}.$$

2) Se $X < \frac{2}{3}$, allora $X_1 = 0$ perché, se fosse $X_1 = 1$, allora

$$X = 2\Big(\frac{1}{3} + \frac{*}{3^2} + \frac{*}{3^3} + \cdots\Big) \ge \frac{2}{3}.$$

(b) Sia $\frac{1}{9} \le x < \frac{2}{9}$. Mostriamo che

$$\{X_1 = 0, X_2 = 0\} \subset \left\{X \le \frac{1}{9}\right\} \subset \{X \le t\} \subset \left\{X \le \frac{2}{9}\right\} \subset \{X_1 = 0, X_2 = 0\}$$

e quindi $\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = \{X \le t\}$, da cui

$$P(X \le t) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{1}{4}.$$

Infatti

1) Se $X_1 = 0, X_2 = 0$, allora

$$X = 2\Big(\frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{*}{3^3} + \cdots\Big) \le 2\Big(\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots\Big) = \frac{2}{27}\Big(1 + \frac{1}{3} + \cdots\Big) = \frac{1}{9}.$$

2) Se $X < \frac{2}{9}$, allora $X_1 = 0, X_2 = 0$ perché, se fosse $X_1 = 1$ oppure $X_2 = 1$ allora, se $X_1 = 1$, abbiamo già visto che $X \ge \frac{2}{3} > \frac{2}{9}$, mentre, se $X_2 = 1$, allora

$$X = 2\Big(\frac{*}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{*}{3^3} + \cdots\Big) \ge \frac{2}{9}.$$

E così via.

**Problema 73**

(i) Calcolare la f. car. della distribuzione con densità

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 1_{(-1,1)}(x).$$

(ii)Calcolare la f. car. della distribuzione con densità

$$f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2) 1_{(-1,1)}(x).$$

**Una soluzione:**

(i) Si tratta di una densità pari, quindi (cambio di var. $tx = y$)

$$\phi(t) = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} x^2 e^{itx} dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} x^2 \cos(tx) dx = 3 \int_{0}^{1} x^2 \cos(tx) dx = \frac{3}{t^3} \int_{0}^{t} y^2 \cos y dy$$
$$= \frac{3}{t^3} \Big[ y^2 \sin y + 2y \cos y - 2 \sin y \Big]_0^t = \frac{3}{t^3} \Big( t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t \Big).$$

(ii) Anche questa densità è pari, e quindi, come sopra

$$\phi(t) = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} (1 - x^2) e^{itx} dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \cos(tx) dx = \frac{3}{2} \int_{0}^{1} (1 - x^2) \cos(tx) dx$$
$$= \frac{3}{2} \left\{ \int_0^1 \cos(tx) dx - \int_0^1 x^2 \cos(tx) dx \right\} = \frac{3}{2} \left\{ \frac{\sin t}{t} - \frac{t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t}{t^3} \right\}$$
$$= \frac{3 \sin t}{t^3} - \frac{3 \cos t}{t^2}.$$

**Problema 74**

La seguente funzione è una f. caratt.

$$\phi(t) = \frac{3 \sin t}{t^3} - \frac{3 \cos t}{t^2}.$$

Sia $X$ con f. car. $\phi$. Allora

1. $X$ è simmetrica;
2. $$\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] = \frac{3}{(2n+1)(2n+3)};$$
3. $X$ è assolutamente continua;
4. $P(|X| > 1) = 0$.

**Una soluzione:**

(i) $X$ è simmetrica perché $\phi$ è reale (e pari).

(ii) Sviluppo in serie

$$\phi(t) = \frac{3}{t^3}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\} - \frac{3}{t^2}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}\right\}$$
$$= \frac{3}{t^3}\left\{t + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\} - \frac{3}{t^2}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}\right\}$$
$$= 3\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k-2}}{(2k+1)!} - 3\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k-2}}{(2k)!} = 3\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k t^{2k-2}\left\{\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!}\right\}$$
$$= 3\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}\cdot\frac{(2k-2)!}{(2k)!}\left\{\frac{1}{2k+1} - 1\right\}$$
$$= 3\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}\cdot\frac{1}{(2k-1)(2k)}\cdot\frac{-2k}{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{t^{2k-2}}{(2k-2)!}\cdot\frac{3}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(i)^{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{3}{(2n+1)(2n+3)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}t^k$$

da cui si ricava

$$\phi^{(k)}(0) = \begin{cases} (i)^k \frac{3}{(k+1)(k+3)} & k = 2n \\ 0 & k = 2n+1. \end{cases}$$

Per la nota relazione $\mathbb{E}\left[X^k\right] = i^{-k}\phi^{(k)}(0)$ (l'esistenza di $\phi^{(k)}(0)$ implica l'esistenza di $\mathbb{E}\left[X^k\right]$ e la formula precedente),

$$\mathbb{E}\left[X^{2n}\right] = i^{-2n}\phi^{(2n)}(0) = \frac{3}{(2n+1)(2n+3)}.$$

(iii) $X$ è assolutamente continua perch''e

$$|\phi(t)| \leq \frac{3}{t^3} + \frac{3}{t^2},$$

dunque $|\phi(t)|$ è integrabile su $\mathbb{R}$ e quindi esiste la densità, per un noto risultato.

(iv) Per la simmetria di $X$, basta vedere che $P(X > 1) = 0$. Dato che $X$ è assolutamente continua, essa è continua, dunque vale la formula

$$F(b) - F(a) = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\phi(t)dt$$

per ogni $a$ e $b$ (in generale, $a$ e $b$ devono essere punti di continuità per $F$. Si ha

$$P(X > 1) = \lim_{a\to\infty}\big(F(a) - F(1)\big) = \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to\infty}\left\{\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-it} - e^{-ita}}{it}\phi(t)dt\right\}$$

e

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-it} - e^{-ita}}{it}\phi(t)dt = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-it} - 1}{it}\phi(t)dt - \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita} - 1}{it}\phi(t)dt$$
$$= \gamma(1) - \gamma(a),$$

dove

$$\gamma(a) = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-1}{it}\phi(t)dt = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{(1-\cos(ta))+i\sin(ta)}{it}\phi(t)dt$$
$$= \lim_{c\to\infty}\left\{-i\int_{-c}^{c}\frac{1-\cos(ta)}{t}\phi(t)dt+\int_{-c}^{c}\frac{\sin(ta)}{t}\phi(t)dt\right\}$$

Il primo integrale è nullo perché la funzione integranda è dispari, quindi, con il cambio di variabili $ta = y$, si ottiene

$$\gamma(a) = \lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{\sin(ta)}{t}\phi(t)dt = \lim_{c\to\infty}\int_{-ca}^{ca}\frac{\sin(y)}{y}\phi\Big(\frac{y}{a}\Big)dy$$

La funzione integranda è integrabile su $\mathbb{R}$, perché

$$\Big|\frac{\sin(y)}{y}\phi\Big(\frac{y}{a}\Big)\Big| \le 3\left\{\frac{a^3}{y^4}+\frac{a^2}{y^3}\right\}$$

e

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}\phi\Big(\frac{y}{a}\Big) = 1;$$

quindi

$$\lim_{c\to\infty}\int_{-ca}^{ca}\frac{\sin(y)}{y}\phi\Big(\frac{y}{a}\Big)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(y)}{y}\phi\Big(\frac{y}{a}\Big)dy.$$

Ricapitolando, abbiamo ottenuto

$$\gamma(a) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(y)}{y}\phi\Big(\frac{y}{a}\Big)dy,$$

e di conseguenza

$$P(X>1) = \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to\infty}\big(\gamma(1)-\gamma(a)\big) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(y)}{y}\phi(y)dy - \lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(y)}{y}\phi\Big(\frac{y}{a}\Big)dy\right\}.$$

Si ha ora

$$\gamma(1) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(y)}{y}\phi(y)dy = \pi, \qquad \lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(y)}{y}\phi\Big(\frac{y}{a}\Big)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(y)}{y}dy = \pi,$$

e quindi si conclude che $P(X>1) = 0$.

**Problema 75**

Una successione di variabili aleatorie $X_n$ si dice *completamente convergente* a $X$ se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\sum_{n\ge 1} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} < +\infty.$$

Provare che una successione completamente convergente a $X$ converge q.c. ad $X$. Provare che se le variabili $(X_n)_{n\geq 1}$ formano una famiglia di v.a. indipendenti convergente q.c. a $X$, la successione è completamente convergente.

**Problema 76**

Sia $X_n \to X$ q.c. e sia $Y = \sup_n |X_n|$: provare che si ha $Y < +\infty$ q.c. Dedurne che esiste una probabilità equivalente $\widetilde{P}$ sotto la quale $X_n \to X$ in $L^1$. Provare che l'affermazione precedente è falsa se $X_n \to X$ in probabilità.

**Problema 77**

Sia $(\mu_n)_n$ una famiglia di leggi di probabilità su $\mathbb{R}$ per le quali esiste una funzione $f \geq 0$ con $f(x) \to \infty$ per $x \to \pm\infty$ e tale che

$$M = \sup_n \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_n < \infty.$$

Mostrare che $(\mu_n)_n$ è tesa.

**Una soluzione:**

Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}^+$ si ha, per ogni $n$,

$$\mu_n\big(\mathbb{R} \setminus [-t_0, t_0]\big) \inf_{|t|>t_0} f(t) \leq \int_{\mathbb{R}\setminus[-t_0,t_0]} f(x)\, d\mu_n(x) \leq \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_n \leq M,$$

da cui, per l'ipotesi $f(x) \to \infty$ per $x \to \pm\infty$,

$$\lim_{t_0\to\infty} \mu_n\big(\mathbb{R} \setminus [-t_0, t_0]\big) \leq \lim_{t_0\to\infty} \frac{M}{\inf_{|t|>t_0} f(t)} = 0$$

Pertanto, fissato $\epsilon$, esiste $t_0$ tale che, per ogni $n$,

$$\mu_n\big(\mathbb{R} \setminus [-t_0, t_0]\big) < \epsilon.$$

**Problema 78**

Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a. limitata in $L^p$ con $p \in [1, +\infty]$: provare che la famiglia delle leggi di probabilità delle v.a. $X_n$ è tesa.

**Problema 79**

Sia $(\mu_i)_{i\in I}$ una famiglia di probabilità su $\mathbb{R}$. Mostrare che è tesa se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\inf_{i\in I} \int_{\mathbb{R}} e^{-\delta x^2/2} d\mu_i(x) \geq 1 - \varepsilon.$$

**Problema 80**

Dire se le seguenti famiglie di misure di probabilità sono tese:

(i) $\{\mathrm{Bin}(n,p) : n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]\}$,

(ii) $\{\mathrm{Bin}(n,p) : n \in \mathbb{N}, p \in [0,1/n]\}$,

(iii) $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda \in (0,1]\}$,

(iv) $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda \in [1,+\infty)\}$,

(v) $\{\mathcal{N}(0,\sigma^2)\}_{\sigma^2 \in [0,1]}$,

(vi) $\{\mathcal{N}(m,\sigma^2)\}_{m \in [-1,1], \sigma^2 \in [1,+\infty)}$.

**Problema 81**

Sia $\lambda > 0$, e per $n \geq \lambda$ sia $\mu_n$ la legge Binomiale $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$. Sia inoltre $\mu$ la legge Poisson di parametro $\lambda$. Mostrare che $\mu_n \to \mu$ strettamente.

**Problema 82**

Siano $(\mu_n)_n$, $\mu$, misure di probabilità su $\mathbb{R}$. Mostrare che sono equivalenti (usare eventualmente il Teorema 4.2.8):

(i) $\mu_n \to \mu$ strettamente,

(ii) $\mu(A) \leq \liminf_n \mu_n(A)$ per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto,

(iii) $\mu(C) \geq \limsup_n \mu_n(C)$ per ogni $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso,

(iv) $\mu(E) = \lim_n \mu_n(E)$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ boreliano con $\mu(\partial E) = 0$.

**Problema 83**

Siano $(\mu_n)_n$ misure di probabilità su $\mathbb{R}$, sia $I : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ una funzione semicontinua inferiormente ed $(a_n)_n$ una successione con $\lim_n a_n = +\infty$. Si dice che $(\mu_n)_n$ soddisfano un principio di grandi deviazioni con *velocità* (speed) $(a_n)_n$ e *tasso* (rate) $I$ se valgono le seguenti condizioni:

$$-\inf_{x \in A} I(x) \leq \liminf_n \frac{1}{a_n} \log \mu_n(A) \quad \text{per ogni } A \subseteq \mathbb{R} \text{ aperto,}$$

$$-\inf_{x \in C} I(x) \geq \limsup_n \frac{1}{a_n} \log \mu_n(C) \quad \text{per ogni } C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso.}$$

Supponendo che $(\mu_n)$ soddisfino un principio di grandi deviazioni con velocità $(a_n)_n$ e tasso $I$, mostrare che

(i) $I$ è unicamente determinata (ossia se vale un principio con la stessa velocità $(a_n)_n$ ed un tasso $J$, allora $I = J$).

(ii) se $E \subseteq \mathbb{R}$ boreliano è tale che $\inf_{x \in \mathring{E}} I(x) = \inf_{x \in \bar{E}} I(x)$, allora

$$\lim_n \frac{1}{a_n} \log \mu_n(E) = -\inf_{x \in E} I(x).$$

Se inoltre $\lim_{|x| \to \infty} I(x) = +\infty$, si potrebbe mostrare che vale il seguente limite di *Laplace-Varadhan*

$$\lim_n \frac{1}{a_n} \log \int e^{a_n f(x)} d\mu_n(x) = -\inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ I(x) - f(x) \right\}, \quad \text{per ogni } f \in C_b(\mathbb{R}),$$

(che in un certo senso è analogo alla definizione di convergenza stretta di misure).

**Problema 84**

Siano $X_n, X$ v.a. reali, $F_n, F$ le relative funzioni di ripartizione, e sia $g$ una funzione continua integrabile *strettamente positiva* (ad esempio $g(x) = \exp(-|x|)$): provare che le leggi $P_{X_n} \to P_X$ strettamente se e solo se

$$\int_{\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| g(x)\, dx \to 0.$$

Dedurne che la distanza (tra funzioni di ripartizione)

$$d(F, G) = \int_{\mathbb{R}} |F(x) - G(x)| g(x)\, dx$$

è una distanza che induce la convergenza stretta.

**Problema 85**

Siano $X_n, X$ v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$: provare che la successione $(X_n)_n$ converge in legge ad $X$ se e solo se, per ogni $u \in \mathbb{R}^d$, la successione di v.a.r. $(\langle X_n, u\rangle)_n$ converge in legge alla v.a. $\langle X, u\rangle$.

**Una soluzione:**

(i) Se $(X_n)_n$ converge in legge ad $X$, allora, per ogni $f$ continua e limitata, $E[f(X_n)] \to E[f(X)]$. Prendendo $f(x) = e^{it\langle x,u\rangle}$ (con $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^d$ fissati), troviamo

$$\phi_{X_n}(t) = E\big[e^{it\langle X_n,u\rangle}\big] \to E\big[e^{it\langle X,u\rangle}\big] = \phi_X(t),$$

e si conclude utilizzando il Teorema di P. Lévy.

(ii) Viceversa, supponiamo che $(\langle X_n, u\rangle)_n$ converga in legge alla v.a. $\langle X, u\rangle$ per ogni $u \in \mathbb{R}^d$. Prendendo $f(x) = e^{ix}$ si trova

$$E\big[e^{i\langle X_n,u\rangle}\big] \to E\big[e^{i\langle X,u\rangle}\big]$$

e si conclude utilizzando il Teorema di P. Lévy multidimensionale.

**Problema 86**

Sia $(X_n)$ una successione di v.a. iid con densità $\mathcal{E}(1)$. Calcolare il limite in legge di $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n) - \log n$.

**Una soluzione:**

Calcoliamo la funzione di ripartizione di $Y_n$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$P(Y_n \le t) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \le t + \log n) = P(X_1 \le t + \log n, \dots, X_n \le t + \log n)$$
$$= \{P(X_1 \le t + \log n)\}^n$$

Dato che $t + \log n$ è definitivamente positivo, abbiamo

$$\{P(X_1 \le t + \log n)\}^n = \big\{1 - e^{-(t+\log n)}\big\}^n = \left\{1 - \frac{e^{-t}}{n}\right\}^n \to \exp(-e^{-t}).$$

La legge limite, cioè la legge con f.d.r. $\exp(-e^{-t})$, $t \in \mathbb{R}$, si chiama *legge di Gumbel.*

**Problema 87**

Siano $X_n, X$ v.a. a valori interi: provare che $X_n$ converge in legge a $X$ se e solo se, per ogni intero $k$, $\lim_n P\{X_n = k\} = P\{X = k\}$. Viceversa, presa una successione $X_n$ come sopra, è possibile che esista, per ogni intero $k$, $\lim_n P\{X_n = k\}$ ma che la successione non converga in legge.

**Una soluzione:**

(i) Se $X_n$ converge in legge a $X$, allora, essendo le $X_n$ a valori interi, si ha

$$P(X_n = k) = P\Big(X_n < k + \frac{1}{2}\Big) - P\Big(X_n < k - \frac{1}{2}\Big) \to P\Big(X < k + \frac{1}{2}\Big) - P\Big(X < k - \frac{1}{2}\Big)$$
$$= P(X = k),$$

dato che $k + \frac{1}{2}$ e $k - \frac{1}{2}$ sono punti di continuità per la f.d.r. di $X$, che è a valori interi.

(ii) Sia $t$ un numero reale non intero, e quindi punto di continuità per $F$, f.d.r. di $X$. Allora

$$F_n(t) = \sum_{k<t} P(X_n = k) \to \sum_{k<t} P(X = k) = F(t).$$

Sia $(X_n)$ una successione di v.a. con $X_n$ avente legge geometrica di parametro $\frac{1}{n}$. Allora

$$P(X_n = k) = \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^k \to 0, \qquad n \to \infty,$$

ma, evidentemente la funzione nulla non è una densità.

**Problema 88**

Siano $X_n, X, Y$ tutte definite sul medesimo spazio e supponiamo che, per ogni $\sigma > 0$, $(X_n + \sigma Y)_n$ converga in legge a $X + \sigma Y$: provare che $X_n \to X$ in legge.

**Una soluzione:**

Sia $t \in \mathbb{R}$ e mostriamo la convergenza delle funzioni caratteristiche $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$, al tendere di $n \to \infty$. Si ha, per ogni $\sigma > 0$ e per ogni $n$,

$$\begin{aligned}
|\varphi_{X_n}(t) - \varphi_{X_n+\sigma Y}(t)| &= \left|\mathbb{E}\left[e^{itX_n} - e^{it(X_n+\sigma Y)}\right]\right| \\
&\le \mathbb{E}\left[\left|e^{itX_n} - e^{it(X_n+\sigma Y)}\right|\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\left|1 - e^{it\sigma Y}\right|\right]
\end{aligned}$$

Similmente,

$$|\varphi_X(t) - \varphi_{X+\sigma Y}(t)| \le \mathbb{E}\left[\left|1 - e^{it\sigma Y}\right|\right].$$

Pertanto, aggiungendo e togliendo la quantità $\varphi_{X_n+\sigma Y}(t) - \varphi_{X+\sigma Y}(t)$, infinitesima per $n \to \infty$, si ottiene, per ogni $\sigma > 0$,

$$\limsup_n |\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)| \leq 2\mathbb{E}\left[\left|1 - e^{it\sigma Y}\right|\right].$$

Al tendere di $\sigma \downarrow 0$, per convergenza dominata (dalla costante 2), si ha

$$\mathbb{E}\left[\left|1 - e^{it\sigma Y}\right|\right] \to 0.$$

Ne segue quindi che $\lim_n \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$.

**Problema 89**

Siano $X_n, X, Y$ definite sul medesimo spazio, e supponiamo che si abbia

$$\mathbb{E}[f(X_n)g(Y)] \to \mathbb{E}[f(X)g(Y)]$$

ogni volta che $f$ è continua e limitata, $g$ boreliana e limitata: provare che $(X_n, Y) \to (X, Y)$ in legge. Se inoltre $X = h(Y)$ con $h$ boreliana, provare che $X_n \to X$ in probabilità.

**Una soluzione:**

Usiamo la versione vettoriale del teorema di Paul Lévy: scegliamo $f(x) = e^{isx}$, $g(y) = e^{ty}$, così

$$\varphi_{(X_n,Y)}(s,t) = \mathbb{E}\left[f(X_n)g(Y)\right] \to \mathbb{E}\left[f(X)g(Y)\right] = \varphi_{(X,Y)}(s,t).$$

La convergenza in legge quindi segue.

Per la seconda affermazione, usiamo il fatto (noto dalle dispense) che la convergenza in probabilità $X_n \to X$ equivale alla convergenza in legge delle variabili congiunte $(X_n, X) \to (X, X)$. L'ipotesi $X = h(Y)$ si può usare quindi introducendo la funzione boreliana e limitata $g(y) = e^{ith(y)}$ per ottenere la convergenza delle funzioni caratteristiche (usiamo ancora la versione vettoriale del teorema di Paul Lévy)

$$\begin{aligned} \varphi_{(X_n,X)}(s,t) = \varphi_{(X_n,h(Y))} &= \mathbb{E}\left[f(X_n)g(Y)\right] \\ &\to \mathbb{E}\left[f(X)g(Y)\right] = \varphi_{(X,h(Y))}(s,t) = \varphi_{(X,X)}(s,t). \end{aligned}$$

**Problema 90**

Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a.r. gaussiane e supponiamo che, presi comunque $n, m$, $(X_n - X_m)$ sia : se $X_n \to X$ in probabilità, allora $X_n \to X$ in $L^2$ (anzi, più precisamente, in ogni $L^p$ con $p \in [1, +\infty)$).

**Una soluzione:**

Ricordiamo che la convergenza in legge di variabili gaussiane equivale alla convergenza di medie e varianze. In particolare questo implica che anche la successione dei momenti secondi converga. Inoltre il limite è una variabile gaussiana (eventualmente costante).

Per ogni $m$, si ha che $X_n - X_m \to X - X_m$ in probabilità se $n \to \infty$, quindi anche in legge. Segue che $X - X_m$ è gaussiana. Al tendere di $m \to \infty$, abbiamo pure che $X - X_m \to X - X = 0$ in probabilità, quindi anche in legge e per quanto notato sopra

$$\lim_{m\to\infty} E\left[(X - X_m)^2\right] = 0.$$

**Problema 91**

Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di v.a. convergente in legge a $X$ e supponiamo che la successione sia *limitata* in $L^p$ con $p > 1$: allora $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$. Mostrare con un controesempio che questa proprietà non è soddisfatta se la successione è limitata in $L^1$.

**Una soluzione:**

Posta $M = \sup_n \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]$, essendo per ogni $\lambda > 0$, $x \mapsto \min\left(|x|^p, \lambda\right)$ continua e limitata, si ha

$$\mathbb{E}\left[\min\left(|X|^p, \lambda\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\min\left(|X_n|^p, \lambda\right)\right] \leq M.$$

Se $\lambda \uparrow \infty$ otteniamo per Beppo-Levi, $\mathbb{E}\left[|X|^p\right] \leq M$. Per mostrare il limite dei valori attesi, argomentiamo che $\mathbb{E}\left[X_n^+\right] \to \mathbb{E}\left[X^+\right]$ (il caso $X^-$ è analogo). Per ogni $\lambda > 0$, consideriamo la funzione continua e limitata $x \mapsto \min\left(x^+, \lambda\right)$. Allora

$$\mathbb{E}\left[X_n^+\right] = \mathbb{E}\left[\min\left(X_n^+, \lambda\right)\right] + \mathbb{E}\left[(X_n - \lambda) I_{X_n > \lambda}\right].$$

Si ha

$$\left|\mathbb{E}\left[(X_n - \lambda) I_{\{X_n > \lambda\}}\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[|X_n| I_{\{|X_n| > \lambda\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] \lambda^{1-p} \leq M\lambda^{1-p}$$

dove abbiamo usato il fatto che $(|X_n|/\lambda)^{p-1} \geq 1$ nell'evento $\{|X_n| > \lambda\}$. Similmente,

$$\left|\mathbb{E}\left[(X - \lambda) I_{\{X_n > \lambda\}}\right]\right| \leq M\lambda^{1-p}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
&\limsup_n \left|\mathbb{E}\left[X_n^+\right] - \mathbb{E}\left[X^+\right]\right| \\
&\quad \leq \limsup_n \left|\mathbb{E}\left[\min\left(X_n^+, \lambda\right)\right] - \mathbb{E}\left[\min\left(X^+, \lambda\right)\right]\right| + M\lambda^{1-p} \\
&\quad \leq M\lambda^{1-p}.
\end{aligned}$$

Per $\lambda \uparrow \infty$ otteniamo la tesi.

Per il caso $p = 1$ consideriamo delle variabili $nB_n$ dove $B_n$ ha legge Bernoulli di parametro $1/n$. Si ha che $X_n \to 0$ in probabilità (quindi in legge), e $\mathbb{E}\left[X_n\right] = \mathbb{E}\left[nB_n\right] = 1$ è limitata, ma ovviamente $\mathbb{E}\left[0\right] = 0$.

**Problema 92**

Si chiama *spazio gaussiano* un sottospazio vettoriale $\mathcal{H}$ di $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tale che ogni elemento di $\mathcal{H}$ sia una v.a. gaussiana.

(i) Provare che, presi $X_1, \ldots, X_n$ elementi di $\mathcal{H}$, il vettore $(X_1, \ldots, X_n)$ è gaussiano.

(ii) Provare che la chiusura di uno spazio gaussiano è ancora uno spazio gaussiano e che, se $\mathcal{H}$ è uno spazio gaussiano, le chiusure di $\mathcal{H}$ rispetto alla convergenza in $L^2$ e in probabilità coincidono.

(iii) Provare che se $(X_i)_{i\in I}$ è una famiglia di v.a. gaussiane indipendenti, il sottospazio vettoriale generato è uno spazio gaussiano.

(iv) Provare che se lo spazio $\Omega$ è numerabile, l'unico spazio gaussiano definito su $\Omega$ è quello banale costituito dalle sole costanti.

**Problema 93**

Sia $(\mu_n)_n$ una successione di misure di probabilità su $\mathbb{R}$. Mostrare che sono equivalenti:

(i) $(\mu_n)_n$ è tesa

(ii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto tale che

$$\liminf_n \mu_n(K) > 1 - \varepsilon.$$

(iii) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\liminf_n \int_{\mathbb{R}} e^{-\delta x^2/2} d\mu_n(x) > 1 - \varepsilon.$$

**Una soluzione:**

(i) implica (ii) banalmente (con inf invece di lim inf). Supponendo (ii), dato $\varepsilon > 0$, possiamo sempre scegliere $K$ in modo che sia un intervallo, $K = [-M, M]$, e valga

$$\liminf_n \mu_n(K) > 1 - \varepsilon/2.$$

Per ogni $x \in [-M, M]$, si ha $e^{-\delta x^2/2} \geq e^{-\delta M^2/2}$. Pertanto, se scegliamo $\delta > 0$ tale che $e^{-\delta M^2/2} > 1 - \varepsilon/2$, otteniamo che

$$\liminf_n \int_{\mathbb{R}} e^{-\delta x^2/2} d\mu_n(x) \geq \liminf_n \int_{-M}^{M} e^{-\delta x^2/2} d\mu_n(x) > (1 - \varepsilon/2)^2 > 1 - \varepsilon.$$

Supponiamo infine che valga (iii) e mostriamo (i). Dato $\varepsilon > 0$, supponiamo che per qualche $\delta > 0$ valga

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\delta x^2/2} d\mu_n(x) > 1 - \varepsilon/2.$$

Poiché $\mu_n(\mathbb{R}) = 1$, segue che

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-\delta x^2/2}) d\mu_n(x) < \varepsilon/2.$$

Sia $M = M(\delta)$ tale che $1-e^{-\delta M^2/2} > 1/2$ e notiamo che la vale pure $1-e^{-\delta|x|^2 2/2} > 1/2$ per ogni $|x| > M$. Ne segue che

$$\mu_n([-M,M]^c)/2 \leq \int_{[-M,M]^c} (1-e^{-\delta x^2/2}) d\mu_n(x) < \varepsilon/2.$$

L'ipotesi (iii) garantisce quindi che, fissato $\varepsilon > 0$ esista $M > 0$ tale che

$$\mu_n([-M,M]^c) < \varepsilon$$

per ogni $n \geq n(\varepsilon)$ abbastanza grande. D'altra parte ogni famiglia finita di misure di probabilità è tesa, quindi esiste un compatto $K$ tale che

$$\mu_n(K^c) < \varepsilon$$

per ogni $n < n(\varepsilon)$. La condizione (i) segue considerando il compatto $K \cup [-M,M]$.

**Problema 94**

Siano $X_1, X_2, \ldots$ v.a.r. equidistribuite: provare che $\frac{X_n}{n}$ converge in probabilità a 0. Provare che se le v.a. $X_i$ sono integrabili, la convergenza è quasi certa; inoltre nel caso di v.a. indipendenti, se la convergenza è quasi certa allora le v.a. sono integrabili, mentre senza la condizione di indipendenza quest'ultima affermazione è falsa.

**Una soluzione:**

Nel caso che il limite sia una costante, la convergenza in probabilità equivale a quella in legge. Per il Teorema di P. Lévy, basta allora vedere dove convergono le f.c. Si ha

$$\phi_{\frac{X_n}{n}}(t) = \phi_{\frac{X_1}{n}}(t) = \phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \to \phi_{X_1}(0) = 1 = E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t0}].$$

Se le $(X_n)$ sono integrabili, allora la convergenza è q.c. perché, per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \geq \epsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{X_n}{\epsilon} \geq n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{X_1}{\epsilon} \geq n\right) \leq E\left[\frac{X_1}{\epsilon}\right] < \infty$$

dove la prima diseguaglianza è dovuta ad un noto Lemma (quale?) e la seconda all'ipotesi. Per il Lemma di Borel- Cantelli, prima parte, si ottiene che l'evento $\{\frac{X_n}{n} \geq \epsilon \ i.o.\}$ ha probabilità 0, e quindi la tesi.

Viceversa, se le v.a. $(X_n)$ sono indipendenti e $\frac{X_n}{n}$ converge a 0, allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \geq \epsilon\right) < \infty$$

perché, se fosse $= \infty$, allora il Lemma di Borel Cantelli, seconda parte, assicurerebbe che $P(\frac{X_n}{n} \geq \epsilon \ i.o.) = 1$ (assurdo per la convergenza a 0 delle $\frac{X_n}{n}$). Dunque, per il Lemma ricordato sopra, abbiamo

$$E\Big[\frac{X_1}{\epsilon}\Big] \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\frac{X_1}{\epsilon} \ge n\Big) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\frac{X_n}{\epsilon} \ge n\Big) < \infty.$$

Per vedere che senza l'ipotesi di indipendenza la seconda affermazione è falsa, basta Prendere una v.a. $X$ con legge di Cauchy, e porre $X_n = X$ per ogni $n$. Abbiamo evidentemente $\frac{X_n}{n} = \frac{X}{n} \to 0$ q.c., ma $E[X_n] = \infty$.

**Problema 95**

Siano $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, $Y_1, Y_2, \dots$ i.i.d. con $\mathbb{E}[Y_j] = \nu$ (con $\nu \neq 0$): provare che

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{Y_1 + \cdots + Y_n} \to \frac{\mu}{\nu} \qquad \text{q.c.}$$

**Una soluzione:**

Basta osservare che

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{Y_1 + \cdots + Y_n} = \frac{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}}{\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}}$$

e applicare al numeratore e al denominatore la Legge forte dei G.N.

**Problema 96**

Sia, per ogni $n$, $Y_n$ una v.a. con legge di Poisson di parametro $n$: provare che

$$\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \to Z \qquad \text{in legge}$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dedurre che

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}.$$

**Una soluzione:**

Osserviamo che $Y_n$ ha la stessa legge di $X_1 + \cdots + X_n$, dove le $X_n$ sono i.i.d. con legge $\Pi_1$. D'altra parte, per il TLC, si ha subito

$$\frac{(X_1 + \cdots + X_n) - n}{\sqrt{n}} \to Z \qquad \text{in legge}$$

con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ora, la somma indicata non è altro che la

$$P(Y_n \le n) = P\Big(\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \le 0\Big) \to \Phi(0) = \frac{1}{2}, \qquad n \to \infty,$$

($\Phi$ =f.d.r. della $\mathcal{N}(0,1)$).

**Problema 97**

Siano $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con $\mathbb{E}[X_i] = 0$ e $\mathrm{Var}\,(X_i) = \sigma^2$: provare che si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

**Una soluzione:**

Questo problema si svolge esatta mente come il problema n. ..., punto (i).

**Problema 98**

Siano $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con $E[X_n] = 0$ e $\mathrm{Var}\,(X_n) = \sigma^2$: provare che si ha

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ q.c.} \qquad \liminf_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty \text{ q.c.}$$

**Una soluzione:**

Per ogni $k$, per il TLC e il Lemma di Fatou si ha

$$0 < 1 - \Phi(\kappa\sigma) = \lim_n P\Big(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > k\Big) \leq P\Big(\limsup_n \Big\{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > k\Big\}\Big)$$

e quindi $P\Big(\limsup_n \Big\{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > k\Big\}\Big) > 0$. Dato che si tratta di un evento terminale (per la $\sigma$-algebra $\sigma(X_1, X_2, \ldots)$), si ha $P\Big(\limsup_n \Big\{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > k\Big\}\Big) = 1$, cioè

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty \text{ q.c.}$$

La seconda relazione si dimostra in modo analogo (osservare che anche $-\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ converge in legge ad una $\mathcal{N}(0,1)$).

**Problema 99**

Siano $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con densità $f(x) = 3x^2\mathbb{I}_{[0,1]}(x)$ e sia $Y_n = (X_1 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}$: la successione $Y_n$ converge in qualche senso e se sì a quale limite?

**Una soluzione:**

Cominciamo cercando il limite q.c. di

$$-\log Y_n = \frac{(-\log X_1) + \cdots + (-\log X_n)}{n}.$$

Le v.a. $-\log X_n$ sono indipendenti e con legge $\mathcal{E}(3)$: infatti per $t > 0$ si ha

$$P(-\log X_n \le t) = P(X_n \ge t) = \int_{\mathrm{e}^{-t}}^{1} 3x^2 \, \mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-3t}.$$

Per la Legge forte dei G.N. si ha dunque $-\log Y_n \to \frac{1}{3}$, q.c. Di conseguenza $Y_n \to \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$, q.c.

**Problema 100**

(i) Costruire una successione $(X_n)$ convergente in probabilità a 1, ma con $E[X_n] \to -\infty$.

(ii) Sia $(X_n)$ una successione come sopra, e $Y \sim \mathcal{N}(1,1)$, indipendente da $(X_n)$. Posto $Z_n = YX_n$, mostrare che

(a) $Z_n$ converge in probabilità a $Y \sim \mathcal{N}(1,1)$.

(b) $E[Z_n] \to -\infty$;

(c) $VarZ_n \to +\infty$;

**Una soluzione:**

(i) Su $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0,1]\mathcal{B}([0,1]), \lambda$ ($\lambda$= misura di Lebesgue), consideriamo $X_n = 1 - n^2 1_{[0,\frac{1}{n}]}$ . Si ha

$$E[X_n] = 1 - n^2 \lambda\Big(\Big[0, \frac{1}{n}\Big]\Big) = 1 - n \to -\infty.$$

Vediamo la convergenza in probabilità.

$$P(|X_n - 1| > \epsilon) = P(n^2 1_{[0,\frac{1}{n}]} > \epsilon) = \lambda\Big(\Big[0, \frac{1}{n}\Big]\Big) = \frac{1}{n} \to 0.$$

Addirittura si ha convergenza q.c., in quanto

$$\lambda\Big( \{\omega : X_n(\omega) \to 1\} \Big) = \lambda\big((0,1]\big) = 1.$$

(ii)

(a) È noto che se $X_n \to X$ in probabilità e $Y_n \to Y$ in probabilità, allora $X_nY_n \to XY$ in probabilità. In questo caso abbiamo $X_n \to 1$ e $Y$ costante. Dunque $X_nY \to 1Y = Y$ in probabilità.

(b) per l'indipendenza $E[Z_n] = E[X_nY] - E[X_n]E[Y] = (1-n)1 = 1-n \to -\infty$;

(c) sempre per l'indipendenza,

$$\begin{aligned} VarZ_n &= E[X_n^2] \cdot \underbrace{E[Y^2]}_{=VarY+E^2[Y]=2} - E^2[X_n]E^2[Y] \\ &= 2E[X_n^2] - E^2[X_n] = 2(1-n^2)^2 \cdot \frac{1}{n} - (1-n)^2 \to +\infty. \end{aligned}$$

**Problema 101**

(a) Siano $Y_n \sim \Pi_n$. Mostrare che $\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$ in legge.

(b) Dedurne che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} \to \frac{1}{2}, \qquad n \to \infty.$$

**Una soluzione:**

(a) Siano $(X_n)$ indipendenti, tutte con legge $\Pi_1$. Per noti risultati, si ha $X_1 + \cdots + X_n \sim \Pi_n$. Poiché la convergenza in legge fa intervenire solo le leggi delle variabili in gioco, possiamo supporre che sia $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. Ricordando che la legge $\Pi_\lambda$ ha media $\mu$ e varianza $\sigma^2$ entrambe uguali a $\lambda$, applicando il TLC abbiamo

$$\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

in legge.

(b)Per il TLC si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = P(Y_n \le n) = P\Big(\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}} \le 0\Big) \to \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

**Problema 102**

Siano $(X_n)$ i.i.d. con $E[X_i] = 1$, $Var X_n = \sigma^2$. Mostrare che $\frac{2}{\sigma}(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}) \to \mathcal{N}(0,1)$ in legge.

**Una soluzione:**

Osserviamo che

$$\frac{2}{\sigma}(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}) = \frac{\frac{S_n - n}{\sigma\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{S_n}+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}}.$$

Ora, il numeratore di questa frazione converge in legge alla $\mathcal{N}(0,1)$ per il TLC, mentre il denominatore converge q.c. a 1. Infatti

$$\frac{\sqrt{S_n} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{\frac{S_n}{n}} + 1\Big) \to 1, \qquad q.c.$$

perché

$$\frac{S_n}{n} \to 1, \qquad q.c.$$

per la legge forte dei grandi numeri. Vale inoltre il Teorema (di Slutsky): Se $X_n$ converge in legge ad una v.a. $X$ quasi certamente finita e $Y_n$ converge in legge (o in probabilità, che è lo stesso) ad una costante $c$, allora $X_n Y_n$ converge in legge a $cX$. Dunque la tesi.

**Problema 103**

Siano $(X_n)$ i.i.d. $\sim \mathcal{U}([-1,1])$. Calcolare il limite in legge di

$$\sqrt{n}\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sum_{k=1}^n X_k^2 + \sum_{k=1}^n X_k^3}$$

**Una soluzione:**

Scriviamo

$$\sqrt{n}\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sum_{k=1}^n X_k^2 + \sum_{k=1}^n X_k^3} = \frac{\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}}}{\frac{\sum_{k=1}^n X_k^2}{n} + \frac{\sum_{k=1}^n X_k^3}{n}}.$$

Si ha $E[X_k] = E[X_k^3] = 0$ (per motivi di simmetria) e $E[X_k^2] = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{3}$. Dunque, per il TLC,

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$$

in legge, il che equivale a

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{n}} \to \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{3}\Big).$$

Inoltre, per la legge forte dei GN

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k^2}{n} \to \frac{1}{3}, \qquad \frac{\sum_{k=1}^n X_k^2}{n} \to 0,$$

quasi certamente. Dunque il denominatore converge q.c. a $\frac{1}{3}$, quindi il reciproco del denominatore converge a 3, e di conseguenza, ancora per il Teorema di Slutsky, la frazione totale converge a $\mathcal{N}\Big(0, \frac{9}{3}\Big) = \mathcal{N}(0,3)$.

**Problema 104**

Se le $(X_n)$ sono i.i.d. con $E[X_n] = 0$ e $Var X_n = \sigma^2$, allora

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\Big] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

**Una soluzione:**

Osserviamo che, se $X$ è una v.a. con legge $\mathcal{N}(0,1)$, si ha

$$E[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Big[-e^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Dunque basta dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[\frac{|S_n|}{\sigma\sqrt{n}}\Big] = E[|X|].$$

Questo sarebbe automatico se avessimo la convergenza in $L^1$ di $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ a $X$, ma noi abbiamo solo la convergenza in legge (per il TLC), il che implica che, per ogni $t > 0$,

$$\lim_n P\Big(\frac{|S_n|}{\sigma\sqrt{n}} > t\Big) = P(|X| > t).$$

Se avessimo anche

$$\lim_n \int_0^\infty P\Big(\frac{|S_n|}{\sigma\sqrt{n}} > t\Big)dt = \int_0^\infty P(|X| > t)dt,$$

avremmo finito perchè, per la formula di Cavalieri, il primo membro è uguale a $\lim_{n\to\infty} E\Big[\frac{|S_n|}{\sqrt{n}}\Big]$ e il secondo membro a $E[|X|]$. Questo in realtà è vero per convergenza dominata, in quanto, per la disuguaglianza di Chebicev,

$$P\Big(\frac{|S_n|}{\sigma\sqrt{n}} > t\Big) \le \frac{E[S_n^2]}{nt^2\sigma^2} = \frac{nE[X_1^2]}{nt^2\sigma^2} = \frac{1}{t^2}.$$

Ne segue che

$$P\Big(\frac{|S_n|}{\sigma\sqrt{n}} > t\Big) \le 1 \wedge \frac{1}{t^2},$$

e il secondo membro é integrabile su $[0, +\infty)$..

**Problema 105**

Si consideri una successione $(X_n)$ tale che

$$P(X_n = -n-4) = \frac{1}{n+4}, \quad P(X_n = -1) = 1 - \frac{4}{n+4}, \quad P(X_n = n+4) = \frac{3}{n+4}.$$

Mostrare che

(i) $X_n$ converge a $-1$ in probabilità;

(ii) $X_n$ è limitata in $L^1$;

(iii) $\lim_n E[X_n] = 1$.

In particolare non è detto che se $(X_n)$ converge in probabilità o in legge verso $X$, allora $E[X_n]$ converga verso $E[X]$.

**Una soluzione:**

(i) Si ha

$$P(|X_n + 1| > \epsilon) = P(X_n = -n-4) + P(X_n = n+4) = \frac{1}{n+4} + \frac{3}{n+4} \to 0.$$

(ii) Si ha

$$E[|X_n|] = (n+4)\cdot\frac{1}{n+4} + (1)\Big(1 - \frac{4}{n+4}\Big) + (n+4)\cdot\frac{3}{n+4} = 5 - \frac{4}{n+4} \le 5.$$

(iii) Si ha

$$E[X_n] = -(n+4)\cdot\frac{1}{n+4} + (-1)\Big(1-\frac{4}{n+4}\Big) + (n+4)\cdot\frac{3}{n+4} = 1+\frac{4}{n+4} \to 1.$$

**Problema 106**

Siano $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. con densità uniforme su $[0,a]$ (con $a > 0$) e sia $R_n = \prod_{k=1}^n X_k$. Dopo aver constatato che la successione $(R_n)_n$ converge o non converge con probabilità 1, esaminare in funzione di $a$ se esiste il limite della successione $(R_n)_n$.

**Problema 107**

Siano le $(X_n)$ i.i.d. con $E[X_n] = 0$ e $VarX_n = \sigma^2$. Mostrare che

$$\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} = +\infty; \qquad \liminf_n \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$$

**Una soluzione:**

Per ogni $k > 0$ si ha, per Fatou e il TLC

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > k \ i.o.\Big) &= P\Big(\limsup_n \Big\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > k\Big\}\Big) \geq \limsup_n P\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > k\Big) \\ &= \lim_n P\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > k\Big) = P(Z > k\sigma) > 0 \end{aligned}$$

dove $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dunque $P\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > k \ i.o.\Big) > 0$ e, poiché si tratta di un evento terminale, si ha che

$$P\Big(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > k \ i.o.\Big) = 1.$$

L'altra relazione si dimostra nello stesso modo, considerando la successione $-\frac{S_n}{\sqrt{n}}$, che converge ancora in legge alla $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

**Problema 108**

(Un controesempio al teorema della serie). Il Teorema della serie dice che se $(X_n)$ sono indipendenti e centrate, e se $\sum_n VarX_n < \infty$, allora $\sum_n X_n$ converge. Vediamo un esempio che mostra che il viceversa è falso (cioè $\sum_n X_n$ può convergere senza che $\sum_n VarX_n < \infty$). Siano $(X_n)$ indipendenti tali che

$$P(X_n = n^4) = P(X_n = -n^4) = \frac{1}{n^2}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^2}.$$

Mostrare che $\sum_n X_n$ converge ma $\sum_n VarX_n = \infty$

**Una soluzione:**

Le $X_n$ sono evidentemente centrate, quindi

$$VarX_n = E[X_n^2] = 2n^8 \cdot \frac{1}{n^2} = 2n^6.$$

Quindi $\sum_n VarX_n = \sum_n 2n^6 = \infty$. Vediamo che $\sum_n X_n$ converge. Si ha

$$\sum_n P(|X_n| > \frac{1}{2^n}) = \sum_n \left\{P(X_n = n^4) + P(X_n = -n^4)\right\} \sum_n \frac{2}{n^2} < \infty.$$

Dunque, per B.C 1, si ottiene che

$$P(|X_n| > \frac{1}{2^n}\ i.o.) = 0,$$

e cioè, passando al complementare,

$$P(|X_n| \leq \frac{1}{2^n}\ def.) = 1.$$

Pertanto, per q.o. $\omega$, esiste $n_0 (= n_0(\omega))$ tale che

$$|X_n| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad n > n_0.$$

Dunque

$$\sum_n |X_n|(\omega) = \sum_{n \leq n_0(\omega)} |X_n|(\omega) + \sum_{n > n_0(\omega)} |X_n|(\omega) \leq C(\omega) + \sum_n \frac{1}{2^n} < \infty,$$

cioè la serie converge addirittura assolutamente.

**Problema 109**

(Una successione di v.a. indipendenti che soddisfa la legge debole ma non la legge forte dei grandi numeri). Sia $(X_n)$ una successione di v.a. indipendenti tali che

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n \log n}, \qquad n \geq 2.$$

Mostrare che $\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ converge in probabilità a 0, ma non converge q.c. a 0.

**Una soluzione:**

Osserviamo prima di tutto che $E[X_n] = 0$. Mostriamo che $\frac{S_n}{n}$ converge a 0 in $L^2$ (e quindi anche in probabilità). Si ha

$$E\left[\frac{S_n^2}{n^2}\right] = \frac{1}{n^2} E[(X_1 + \cdots + X_n)^2].$$

D'altra parte, per l'indipendenza

$$E[(X_2+\cdots+X_n)^2]=E\Big[\sum_{k=2}^n X_k^2+2\sum_{1\le h<k\le n} X_hX_k\Big]=E\Big[\sum_{k=2}^n X_k^2\Big]+2E\Big[\sum_{2\le h<k\le n} X_hX_k\Big]$$

$$=E\Big[\sum_{k=2}^n X_k^2\Big]+2\sum_{2\le h<k\le n} E\Big[X_h\Big]E\Big[X_k\Big]=\sum_{k=2}^n E\Big[X_k^2\Big],$$

dato che le $X_n$ sono centrate. Dato che

$$E\Big[X_n^2\Big]=\frac{2n^2}{n\log n}=\frac{2n}{\log n},$$

si ottiene in definitiva

$$E[(X_1+\cdots+X_n)^2]=\sum_{k=2}^n E\Big[X_k^2\Big]=\sum_{k=2}^n\frac{2k}{\log k}\le\frac{Cn^2}{\log n}$$

e quindi

$$E\Big[\frac{S_n^2}{n^2}\Big]\le\frac{C}{\log n}\to 0.$$

Vediamo che $\frac{S_n}{n}$ non converge q.c. (ovviamente a 0, vista la convergenza in $L^2$). Se $\frac{S_n}{n}$ convergesse a 0, convergerebbe a 0 anche $\frac{S_{n-1}}{n}=\frac{S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}$, e di conseguenza

$$\frac{X_n}{n}=\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n}\to 0,\quad q.c.$$

il che è impossibile; infatti

$$\sum_n P(|X_n|\ge n)=\sum_n\frac{1}{n\log n}=\infty,$$

dunque, per B.C. 2 (c'è l'indipendenza), $P\Big(\frac{|X_n|}{n}\ge 1\ i.o.\Big)=P(|X_n|\ge n\ i.o.)=1$.

### Problema 110

Mostrare che $\frac{S_n}{n}$ converge a 0 q.c. se le v.a. $(X_n)$ se le v.a. sono i.i.d, centrate e tali che $E[X_1^4]<\infty$.

**Una soluzione:**

Dimostriamo che, per ogni $\epsilon>0$,

$$\sum_n P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big|>\epsilon\Big)<\infty.$$

Per B.C. 1, questo implica che $P(|\frac{S_n}{n}| \leq \epsilon \; definitiv.)$, ovvero la tesi. Per la disuguaglianza di Markov si ha

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| > \epsilon\Big) = P(|S_n^4| > \epsilon^4 n^4) \leq \frac{E[S_n^4]}{\epsilon^4 n^4}$$

Ora, per lo sviluppo della potenza di un polinomio e per il fatto che le $(X_n)$ sono i.i.d. abbiamo

$$E[S_n^4] = \sum_{i_1+\cdots+i_n=4} \frac{4!}{i_1!\cdots i_n!} E[X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}] = \sum_{i_1+\cdots+i_n=4} \frac{4!}{i_1!\cdots i_n!} E[X_1^{i_1}]\cdots E[X_n^{i_n}]$$

$$= nE[X_1^4] + 4\binom{n}{2}E[X_1^3]E[X_2] + \binom{4}{2}\binom{n}{2}E[X_1^2]E[X_2^2] + 3\binom{4}{2}\binom{n}{3}E[X_1^2]E[X_2]E[X_3]$$

$$+ 4!\binom{n}{4}E[X_1]E[X_2]E[X_3]E[X_4].$$

Dato che le v.a. sono centrate, la somma precedente si riduce a

$$nE[X_1^4] + \binom{4}{2}\binom{n}{2}E[X_1^2]E[X_2^2] = O(n^2),$$

e di conseguenza

$$\frac{E[S_n^4]}{\epsilon^4 n^4} = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Dunque

$$\sum_n P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| > \epsilon\Big) = \sum_n O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) < \infty.$$

**Problema 111**

Sia $Y$ una v.a. con legge esponenziale di parametro $\lambda$, e sia $Z$ una v.a. indipendente da $Y$ e tale che $P(Z > 0) > 0$. Mostrare che $P(Y - Z > t | Y \geq Z, Z \geq 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. In particolare, se $Z$ è a valori positivi, si ottiene la proprietà di mancanza di memoria per la legge esponenziale nella sua forma forte, cioè

$$P(Y - Z > t | Y \geq Z) = P(Y > t).$$

**Una soluzione:**

Prima di tutto

$$P(Y \geq Z, Z \geq 0) = E\big[E[1_{[0,+\infty)}(Y-Z)1_{[0,+\infty)}(Z)|Z]\big]$$

e, per l'indipendenza di $Z$ da $Y$,

$$E[1_{[0,+\infty)}(Y-Z)1_{[0,+\infty)}(Z)|Z=z] = E[1_{[0,+\infty)}(Y-z)1_{[0,+\infty)}(z)]$$
$$= 1_{[0,+\infty)}(z)E[1_{[0,+\infty)}(Y-z)] = 1_{[0,+\infty)}(z)E[1_{[z,+\infty)}(Y)] = 1_{[0,+\infty)}(z)P(Y \geq z)$$
$$= 1_{[0,+\infty)}(z)\mathrm{e}^{-\lambda z}$$

Dunque
$$P(Y \geq Z, Z \geq 0) = E\big[1_{[0,+\infty)}(Z)\mathrm{e}^{-\lambda Z}\big].$$
e, se fosse$P(Y \geq Z, Z \geq 0) = 0$, avremmo $1_{[0,+\infty)}(Z)\mathrm{e}^{-\lambda Z} = 0$ $P-$q.c., e di conseguenza anche $1_{[0,+\infty)}(Z) = 0$, $P-$q.c. Questo non è possibile perché, per ipotesi, $E[1_{[0,+\infty)}(Z)] = P(Z \geq 0) > 0$.

Ora

$$P(Y-Z > t, Y \geq Z, Z \geq 0) = P(Y-Z > t, Z \geq 0) = E\big[E[1_{[t,+\infty)}(Y-Z)1_{[0,+\infty)}(Z)|Z]\big]$$

e, come prima

$$E[1_{[t,+\infty)}(Y-Z)1_{[0,+\infty)}(Z)|Z=z] = E[1_{[t,+\infty)}(Y-z)1_{[0,+\infty)}(z)]$$
$$= 1_{[0,+\infty)}(z)E[1_{[t,+\infty)}(Y-z)] = 1_{[0,+\infty)}(z)E[1_{[z+t,+\infty)}(Y)] = 1_{[0,+\infty)}(z)P(Y \geq z+t)$$
$$= 1_{[0,+\infty)}(z)\mathrm{e}^{-\lambda(z+t)},$$

e quindi

$$P(Y-Z > t, Y \geq Z, Z \geq 0) = E\big[1_{[0,+\infty)}(Z)\mathrm{e}^{-\lambda(Z+t)}\big] = \mathrm{e}^{-\lambda t}E\big[1_{[0,+\infty)}(Z)\mathrm{e}^{-\lambda Z}\big].$$

Dunque

$$P(Y-Z > t|Y \geq Z, Z \geq 0) = \frac{P(Y-Z > t, Y \geq Z, Z \geq 0)}{P(Y \geq Z, Z \geq 0)}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}E\big[1_{[0,+\infty)}(Z)\mathrm{e}^{-\lambda Z}\big]}{E\big[1_{[0,+\infty)}(Z)\mathrm{e}^{-\lambda Z}\big]} = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

**Problema 112**

Sia $(X_n)$ una successione di v.a. indipendenti, con $X_n \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{n})$. Poniamo $T_n = \inf\{k \geq 1 : X_k = 1\}$.

(i) Calcolare la legge di $T_n$

(ii) Calcolare il limite in legge di $\frac{T_n}{n}$.

(iii) Per $k \geq 1$ fissato, sia $Z_n^{(k)} = T_n^{(1)} + \cdots + T_n^{(k)}$, dove le v.a. $T_n^{(j)}$ sono indipendenti ed hanno tutte la legge di $T_n$ (v. punto (i)). Calcolare il limite in legge di $\frac{Z_n^{(k)}}{n}$. esponenziale di parametro 1.

**Una soluzione:**

(i) Si ha

$$P(T_n > k) = P(X_1 = 0, \dots, X_k = 0) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^k,$$

e quindi, per $k = 1, 2, \dots,$

$$P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k) = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{k-1} - \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^k = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{k-1}\frac{1}{n}.$$

Si tratta di una legge geometrica di parametro $\frac{1}{n}$.

(ii) Dato che $T_n$ è a valori interi, si ha, per $t > 0$

$$P\Big(\frac{T_n}{n} > t\Big) = P(T_n > tn) = P(T_n > [tn]) = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{[tn]} = \Big(1-\frac{\frac{[tn]}{n}}{[tn]}\Big)^{[tn]} \to \mathrm{e}^{-t},\ n \to \infty.$$

Dunque si ha convergenza in legge ad una variabile $\mathcal{E}(1)$.

(iii) La f.c. di $Z_n^{(k)}$ è $\phi_{Z_n^{(k)}}(t) = \big(\phi_{T_n}\big)^k$; per il punto (ii) e per Teorema di P. Lévy si ha dunque

$$\phi_{Z_n^{(k)}}(t) \to \Big(\frac{1}{1-\mathrm{i}t}\Big)^k, \qquad n \to \infty.$$

Poiché il limite è la f.c. di una v.a. di legge $\Gamma(k,1)$, sempre per il Teorema di P. Lévy si conclude che $Z_n^{(k)}$ converge in legge ad una $\Gamma(k,1)$.

## Problema 113

Sia $(X_n)$ una successione di v.a. i.i.d. con momento del secondo ordine finito. Posto $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $T_n = \frac{S_n - nE[X_1]}{\sqrt{VarX_1}\sqrt{n}}$,

(i) Dimostrare che $\lim_n E[T_n^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(ii) Supponiamo che la comune legge delle $X_n$ sia esponenziale di parametro 1. Calcolare esplicitamente $E[T_n^+]$. (Tenere conto che $\frac{d}{dt}(\frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}) = (\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{t^n}{n!})\mathrm{e}^{-t})$.

(iii) Ricavare dai punti precedenti la nota *formula di Stirling*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\ n^n \mathrm{e}^{-n}, \qquad n \to \infty.$$

**Una soluzione:**

(i) Sia $T$ una v.a. avente legge normale standard. Si ha

$$\begin{aligned} E[T^+] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Dunque dimostreremo che $\lim_n E[T_n^+] = E[T^+]$. Dal TLC segue che $\lim_n P(T_n > t) = P(T_n > t)$ per ogni $t$, ed inoltre la diseguaglianza di Chebicev assicura che

$$P(T_n > t) \leq P(|T_n| > t) \leq \frac{Var(T_n)}{t^2} = \frac{1}{t^2}.$$

Pertanto si ha anche

$$P(T_n > t) \leq \min\Big\{1, \frac{1}{t^2}\Big\}.$$

La funzione maggiorante trovata è integrabile su $(0, +\infty)$. Dalla formula di Cavalieri e dal Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata si ottiene dunque

$$E[T_n^+] = \int_0^\infty P(T_n > t)\mathrm{d}t \to \int_0^\infty P(T > t)\mathrm{d}t = E[T^+], \qquad n \to \infty.$$

(ii) In questo caso sappiamo che $S_n \sim \Gamma(n, 1)$, e quindi

$$\begin{aligned}
E[T_n^+] &= \int_0^{+\infty} \frac{(t-n)^+}{\sqrt{n}} \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\
&= \int_n^{+\infty} \frac{t-n}{\sqrt{n}} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_n^{+\infty} \Big(\frac{t^n}{n!} - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\Big)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \\
&= \sqrt{n}\Big[-\frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty = \frac{\sqrt{n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!}.
\end{aligned}$$

(iii) Il punto (i) assicura che

$$\lim_n \frac{\sqrt{n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

che è esattamente la formula di Stirling.

**Problema 114**

Sia $(U_n)$ una successione di v.a. i.i.d. con legge uniforme sull'intervallo $[0, 1]$. Poniamo $V_n = \prod_{k=1}^n U_k$.

(i) Mostrare che $V_n \to 0$ q.c.

(ii) Tenendo conto che per ogni $n$ $-\log U_n$ ha legge esponenziale di parametro 1, per $x \in (0, 1)$ fissato trovare la legge della v.a.

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N} : V_{n+1} < x\}$$

(Ricordare la costruzione del processo di Poisson).

**Una soluzione:**

(i) La successione $(V_n)$ è decrescente e non negativa, dunque ammette q.c. un limite $V \geq 0$. Per mostrare che $V = 0$, osserviamo che $E[V_n] \downarrow E[V]$ (per convergenza monotona, dato che le v.a. $V_n$ sono maggiorate dalla costante 1). D'altra parte

$$E[V_n] = \prod_{k=1}^{n} E[U_k] = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

Dunque $E[V] = \lim_n E[V_n] = \lim_n \frac{1}{2^n} = 0$. Essendo $V$ non negativa e a media nulla, si deduce che $V = 0$ q.c.

(ii) Si ha

$$T = \inf\{n \in \mathbb{N} : V_{n+1} < x\} = \inf\{n \in \mathbb{N} : -\log V_{n+1} > -\log x\}.$$

D'altra parte

$$-\log V_{n+1} = (-\log U_1) + \cdots + (-\log U_{n+1})$$

è la somma di $n+1$ variabili esponenziali di parametro 1 e indipendenti, che possono essere interpretate come gli intertempi in un processo di Poisson di intensità 1. Dunque $T$ rappresenta il primo istante del processo nel quale si supera l'istante $t = -\log x$; $T$ ha pertanto legge $\Pi_{-\log x}$.

**Problema 115**

Sia $X \sim \Gamma(m, \lambda)$, con $m \geq 2$ intero; per ogni $x \geq 0$ sia $Y \sim \Pi_{\lambda x}$. Mostrare che $P(X \leq x) = P(Y \geq m)$.

**Una soluzione:**

Con un'integrazione per parti si trova

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \int_0^x \frac{\lambda^m}{(m-1)!} y^{m-1} \mathrm{e}^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y \\ &= \Big[ -\frac{\mathrm{e}^{-\lambda y}}{\lambda} \cdot \frac{y^{m-1}\lambda^m}{(m-1)!} \Big]_0^x - \frac{\lambda^m}{(m-1)!} \int_0^x -\frac{\mathrm{e}^{-\lambda y}}{\lambda}(m-1) y^{m-2} \, \mathrm{d}y \\ &= -\frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{\lambda^{m-1}}{(m-2)!} \int_0^x y^{m-2} \mathrm{e}^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y; \end{aligned}$$

continuiamo integrando per parti $m-1$ volte, e, osservando che

$$\int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

si ottiene infine

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} - (\lambda x)\mathrm{e}^{-\lambda x} - \cdots - \frac{(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 1 - P(Y \leq m-1) = P(Y \geq m), \end{aligned}$$

dato che $Y$ è a valori interi.

*Nota: Nell'ambito del processo di Poisson, questa relazione si interpreta dicendo che l'$m-$esimo evento si verifica entro l'istante $x$ se il numero di eventi in $[0,x]$ è maggiore o uguale a $m$.*

*Per chiarire meglio, se $T_n$ =istante del prodursi dell'$n$-esimo evento,e $W_n = T_n - T_{n-1}$ è l'$n$-esimo intertempo, con legge $\mathcal{E}(\lambda)$, allora $T_n = W_1 + \cdots + W_n$ ha legge $\Gamma(n, \lambda)$. Se $Y$ è il numero di eventi che si verificano in $[0,x]$, si ha evidentemente $\{Y = k\} = \{T_k \le x\} \setminus \{T_{k+1} \le x\}$, e quindi*

$$P(Y = k) = P(T_k \le x) - P(T_{k+1} \le x) = \Big(1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda x}\Big) - \Big(1 - \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda x)^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda x}\Big)$$

$$= \frac{(\lambda x)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda x},$$

*dunque $Y \sim \Pi_{\lambda x}$, come deve essere.*

**Problema 116**

Sia $N_t$ un processo di Poisson di intensità $\lambda$, cioè tale che (a)$N_0 = 0$ (b) $N_{t_1}$, $N_{t_2} - N_{t_1}$, $\dots$, $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sono indipendenti e $N_{t_k} - N_{t_{k-1}} \sim \Pi_{\lambda(t_k - t_{k-1})}$ per ogni scelta di $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Posto $T_n$ =istante del prodursi dell'$n$-esimo evento, sia $W_n = T_n - T_{n-1}$ ($W_n$ sono gli intertempi). In altre parole $T_n = W_1 + \cdots + W_n$.

(i) Calcolare la densità congiunta di $T_1, \dots, T_n$.
(Suggerimento: Esprimere in termini di $N_t$ l'evento
$$\bigcap_{i=1}^{n} \{t_i < T_i \le t_i + h\},$$
dove $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ e $h$ è sufficientemente piccolo, e calcolarne la probabilità. Poi dividere per $h^n$ e passare al limite per $h \to 0$.)

(ii) Dedurre da (i) che gli intertempi hanno legge esponenziale di parametro $\lambda$ e sono indipendenti.

**Una soluzione:**

(i) Scegliamo $h$ sufficientemente piccolo in modo che

$$0 = t_0 < t_0 + h \le t_1 < t_1 + h \le t_2 < t_2 + h \le t_3 \cdots \le t_n < t_n + h.$$

Non è difficile verificare (fare un disegno) che

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{t_i < T_i \le t_i + h\}$$
$$= \{N_{t_1} = 0, N_{t_1+h} - N_{t_1} = 1, N_{t_2} - N_{t_1+h} = 0, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}+h} = 0, N_{t_n+h} - N_{t_n} \ge 1\}$$

e quindi, per le note proprietà del processo di Poisson, abbiamo

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{t_i < T_i \le t_i + h\}\Big) = (\mathrm{e}^{-\lambda t_1})(\lambda h \mathrm{e}^{-\lambda h})(\mathrm{e}^{-\lambda(t_2-t_1-h)}) \cdot \ldots \cdot (\mathrm{e}^{-\lambda(t_n-t_{n-1}-h)})(1-\mathrm{e}^{-\lambda h})$$
$$= \lambda^{n-1} h^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t_n}(1-\mathrm{e}^{-\lambda h}).$$

Se dividiamo per $h^n$ e facciamo tendere $h$ a 0 otteniamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{t_i < T_i \le t_i + h\}\Big)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda t_n}(1-\mathrm{e}^{-\lambda h})}{\lambda h} = \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda t_n},$$

che significa che la densità di $(T_1, \ldots, T_n)$ è

$$f_T(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda t_n} & 0 \le t_1 \le \cdots \le t_n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

(ii) Poniamo

$$\begin{cases} W_1 = T_1 \\ W_2 = T_2 - T_1 \\ \vdots \\ W_n = T_n - T_{n-1} \end{cases}$$

che ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha $det(A) = 1$. Il cambio di variabili inverso è

$$\begin{cases} t_1 = w_1 \\ t_2 = w_1 + w_1 \\ \vdots \\ t_n = w_1 + \cdots + w_n \end{cases}$$

Con il teorema di cambiamento di variabili si vede dal punto precedente che la densità congiunta di $W = (W_1, \ldots, W_n)$ è

$$f_W(w_1, \ldots, w_n) = \begin{cases} \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda(w_1 + \cdots w_n)} & w_i \ge 0 \ \ \forall i \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ovvero il prodotto tensoriale di $n$ densità $\mathcal{E}(\lambda)$.

**Problema 117**

*(Thinning)* Sia $N_t$ un processo di Poisson di intensità $\lambda$, e sia $p \in (0,1)$ assegnato. Se ad un dato istante si produce un evento del processo di Poisson, esso viene classificato di tipo 1 con probabilità $p$ e di tipo 0 con probabilità $q = 1-p$. Sia $N_t^{(1)}$ (risp. $N_t^{(2)}$) il numero di eventi di tipo 1 (risp. 2) che si verificano nell'intervallo di tempo $[0,t]$. Ovviamente $N_t^{(1)} + N_t^{(2)} = N_t$.

(i) Quanto vale $P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = n-k | N_t = n)$?

(ii) Calcolare $P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = n-k)$.

(iii) Ricavare dal punto (ii) che $N_t^{(1)}$ (risp. $N_t^{(2)}$)è un processo di Poisson di intensità $\lambda p$ (risp. $\lambda q$) e che $N_t^{(1)}$ e $N_t^{(2)}$ sono indipendenti.

**Una soluzione:**

(i) Evidentemente la legge di $N_t^{(1)}$, condizionata a $\{N_t = n\}$, è la $\mathcal{B}(n,p)$, quindi

$$P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = n-k | N_t = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

(ii)

$$\begin{aligned} &P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = n-k) = P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = n-k | N_t = n)|P(N_t = n) \\ &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

(iii) Dal punto (ii) segue che

$$P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = h) = \binom{k+h}{k} p^k q^h \frac{(\lambda t)^{k+h}}{(k+h)!} \mathrm{e}^{-\lambda t} = \Big\{ \frac{(\lambda p t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda p t} \Big\} \Big\{ \frac{(\lambda q t)^h}{h!} \mathrm{e}^{-\lambda q t} \Big\},$$

da cui segue la tesi.

**Problema 118**

Sia $N_t$ un processo di Poisson di intensità $\lambda$, e sia $I$ un sottointervallo di $[0,t]$ di lunghezza $u$ ($u \le t$ ovviamente). Sia $X$ (risp. $Y$) il numero di istanti (del verificarsi di un evento del processo) situati in $I$ (risp. in $[0,t] \setminus I$).

(i) Quali sono le leggi di $X$ e di $Y$?

(ii) Mostrare che $X$ e $Y$ sono indipendenti.

(iii) Dimostrare che $P(X = k | N_t = n)$ è uguale alla probabilità che, tra $n$ variabili i.i.d. con legge uniforme su $[0,t]$, $k$ prendano valori in $I$.

**Una soluzione:**

(i) + (ii) Poiché $X+Y=N_t$, per l'esercizio precedente, punto (iii), si ha subito che $X \sim \Pi_{\lambda u}$, $Y \sim \Pi_{\lambda(t-u)}$, ed inoltre $X$ e $Y$ sono indipendenti.

(iii)

$$P(X=k|N_t=n)=P(X=k|X+Y=n)=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}$$
$$=\frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(N_t=n)}=\frac{\frac{(u\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-u\lambda}\cdot\frac{((t-u)\lambda)^{n-k}}{n-k!}\mathrm{e}^{-(t-u)\lambda}}{\frac{(t\lambda)^n}{n!}\mathrm{e}^{-t\lambda}}=\binom{n}{k}\left(\frac{u}{t}\right)^k\left(1-\frac{u}{t}\right)^{n-k},$$

cioè la tesi.

**Problema 119**

Sia $N_t$ un processo di Poisson di intensità $\lambda$. Dimostrare che $\frac{N_t}{t}\to\lambda$ q.c. per $t\to\infty$.

**Una soluzione:**

La v.a. $N_{[t]}$ ha la stessa legge della somma di $[t]$ v.a. $X_1,\dots,X_{[t]}$, tutte di legge $\Pi_\lambda$; dunque, per la legge forte dei grandi numeri, si ha

$$\frac{N_{[t]}}{[t]}\to E[X_1]=\lambda,\quad P-a.s.$$

Con lo stesso ragionamento, si ha anche

$$\frac{N_{[t]+1}}{[t]+1}\to E[X_1]=\lambda,\quad P-a.s.$$

D'altra parte $N_{[t]}\le N_t\le N_{[t]+1}$. Quindi

$$\frac{N_{[t]}}{[t]}\cdot\frac{[t]}{t}\le\frac{N_t}{t}\le\frac{N_{[t]+1}}{[t]+1}\cdot\frac{[t]+1}{t},$$

e il primo e ultimo membro tendono a $\lambda$ (ricordare le diseguaglianze $[t]\le t\le[t]+1$).

**Problema 120**

*(Il paradosso dell'ispezione).* Sia $N_t$ un processo di Poisson di intensità $\lambda$. Siano $T_n$ gli istanti del verificarsi di un evento del processo; sia $t>0$ assegnato.

(i) Cosa rappresentano le v.a. $T_{N_t}$ e $T_{N_t+1}$?

(ii) Poniamo $W'=t-T_{N_t}$ e $W''=T_{N_t+1}-t$. Cosa rappresentano le v.a. $W'$ e $W''$?

(iii) Calcolare le leggi di $W'$ e $W''$.

(iv) Mostrare che $W'$ e $W''$ sono indipendenti.

(v) Mostrare che $E[T_{N_t+1} - T_{N_t}] > E[T_1]$ .

*Nota: L'ultimo risultato è il cosiddetto paradosso dell'ispezione: immaginiamo che gli istanti del processo siano gli istanti in cui una lampadina cessa di funzionare e viene immediatamente sostituita da una identica nuova. Allora la v.a. $T_{N_t+1} - T_{N_t}$ rappresenta la durata di una lampadina trovata accesa (ispezionata) all'istante $t$, mentre $W'$ è il tempo passato in funzione dalla lampadina che è funzionante all'istante $t$ e $W''$ è il tempo di durata residuo della stessa lampadina. La relazione (v) dice che la sua durata media è superiore a quella della prima lampadina messa in funzione. Come dice il proverbio: "l'occhio del padrone ingrassa il cavallo". (Osservazione dovuta a...)*

**Una soluzione:**

(i) $N_t$ è il numero di eventi che si verificano nell'intervallo temporale $[0, t]$; dunque, evidentemente $T_{N_t}$ è l'istante in cui si verifica l'ultimo evento prima di $t$, mentre $T_{N_t+1}$è l'istante in cui si verifica il primo evento dopo $t$.

(ii) $S'$ rappresenta il tempo che intercorre fra il verificarsi dell'ultimo evento prima di $t$ e $t$. $S''$ è il tempo che intercorre tra $t$ e il verificarsi del primo evento successivo a $t$.

(iii) Legge di $W'$. $W'$ prende valori in $[0, t]$, e quindi $P(W' > s) = 0$ per ogni $s > t$. Per $0 \leq s \leq t$ si ha evidentemente

$$\begin{aligned}&\{W' > s\} = \{t - T_{N_t} > s\} = \{T_{N_t} < t - s\}\\ &= \{\text{non si verificano eventi nell'intervallo temporale } [t - s, t]\}.\end{aligned}$$

Per la stazionarietà del processo di Poisson, si ha

$$\begin{aligned}&P(W' > s) = P(\text{non si verificano eventi nell'intervallo temporale } [t - s, t])\\ &= P(\text{non si verificano eventi nell'intervallo temporale } [0, s]) = P(W_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda s}.\end{aligned}$$

Dunque

$$P(W' \leq s) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda s} & 0 \leq s \leq t \\ 1 & s > t, \end{cases},$$

che è la legge di $W_1 \wedge t$ ($W_1$= primo intertempo).

Legge di $W''$. Si può osservare che, per l'assenza di memoria, $W'' \sim W_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Oppure si possono fare dei conti diretti, nel modo seguente. Intanto $W''$ prende valori in $[0, +\infty)$, e, per ogni $s \in [0, +\infty)$ si ha

$$\begin{aligned}&\{W'' > s\} = \{T_{N_t+1} - t > s\} = \{T_{N_t+1} > t + s\}\\ &= \{\text{non si verificano eventi nell'intervallo temporale } [t, t + s]\}.\end{aligned}$$

Di nuovo per la stazionarietà del processo di Poisson, si ha

$$\begin{aligned}&P(W'' > s) = P(\text{non si verificano eventi nell'intervallo temporale } [t, t + s])\\ &= P(\text{non si verificano eventi nell'intervallo temporale } [0, s]) = P(W_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda s}.\end{aligned}$$

(iv) Per $0 < x < t$ e $y > 0$ si ha

$$\{W' > x, W'' > y\} = \{\text{nessun evento in } [t-x, t+y]\},$$

e passando alle probabilità,

$$P(W' > x, W'' > y) = P(\text{nessun evento in } [t-x, t+y]) = P(\text{nessun evento in } [0, x+y])$$
$$= \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)} = \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{e}^{-\lambda y} = P(W' > x)P(W'' > y).$$

(v) Il punto precedente dice che $T_{N_t+1} - T_{N_t} = W' + W''$ ha come legge la convoluzione delle leggi di $W_1 \wedge t$ e di $W_1$. In particolare

$$E[T_{N_t+1} - T_{N_t}] = E[W'] + E[W''] = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\lambda} = E[T_1].$$

**Problema 121**

Sia $N_t$ un processo di Poisson di intensità $\lambda$, e siano $S_1, S_2 \dots$ gli intertempi. Sia poi $T$ una v.a. indipendente dalla successione degli intertempi e consideriamo la v.a. $N_T$.

(i) Esprimere $N_T$ in termini di $T$ e della successione degli intertempi.

(ii) Mostrare che
$$P(N_T = n) = E\Big[\frac{(\lambda T)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda T}\Big].$$

(iii) Calcolare la legge di $N_T$ nel caso particolare in cui $T$ abbia legge esponenziale di parametro $\mu$.

**Una soluzione:**

(i) Si ha facilmente

$$N_T = \sum_{n\geq 1} 1_{\{S_1+\cdots+S_n \leq T\}} = \sum_{n\geq 1} 1_{\{x\leq y\}}(S_1 + \cdots + S_n, T).$$

(ii) Scriviamo

$$P(N_T = n) = E\big[1_{\{n\}}(N_T)\big] = E\big[E[1_{\{n\}}(N_T)|T]\big] = E[G(T)],$$

dove $G(t) = E[1_{\{n\}}(N_T)|T = t]$. Per il punto precedente, abbiamo

$$1_{\{n\}}(N_T) = 1_{\{n\}}\big(\sum_{n\geq 1} 1_{\{x\leq y\}}(S_1 + \cdots + S_n, T)\big) = \varphi(S_1 + \cdots + S_n, T),$$

con
$$\varphi(u, v) = 1_{\{n\}}\big(\sum_{n\geq 1} 1_{\{x\leq y\}}(u, v)\big);$$

dunque, per l'indipendenza di $S_1 + \cdots + S_n$ e $T$,

$$\begin{aligned}
E[1_{\{n\}}(N_T)|T = t] &= E[\varphi(S_1 + \cdots + S_n, T)|T = t] = E[\varphi(S_1 + \cdots + S_n, t)] \\
&= E[1_{\{n\}}(N_t)] = P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Si conclude che

$$P(N_T = n) = E[G(T)] = E\Big[\frac{(\lambda T)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda T}\Big].$$

(iii) Se $T \sim \mathcal{E}(\mu)$, abbiamo

$$E\Big[\frac{(\lambda T)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda T}\Big] = \int_0^\infty \mu \mathrm{e}^{-\mu t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \frac{\lambda^n \mu}{(\lambda+\mu)^{n+1}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\lambda+\mu)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} t^n \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}\, \mathrm{d}t}_{=1}$$

$$= \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^n \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Dunque la v.a. $T + 1$ ha legge geometrica di parametro $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

**Problema 122**

Sia $(N_t)_{t\geq 0}$ un processo di Poisson di intensità $\lambda > 0$. Mostrare che il limite in legge $\lim_{t\to\infty}(N_t - \lambda t)/\sqrt{t}$ esiste e determinare la legge della variabile limite.

**Problema 123**

Sia $(W_t)_{t\geq 0}$ un processo di Wiener.

i) Mostrare che per ogni $\lambda > 0$,

$$P\left(\sup_{t\in[0,1]} |W_t| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

(suggerimento: approssimare con tempi discreti e usare la diseguaglianza massimale di Kolmogorov)

ii) Mostrare che $\lim_{t\to\infty} W_t/t$ esiste $P$-q.c. e determinarlo.

iii) Mostrare che il limite in legge $\lim_{t\to\infty} W_t/\sqrt{t}$ esiste e determinare la legge della variabile limite.

**Problema 124**

Sia $(W_t)_{t\geq 0}$ un processo di Wiener. Posta $\mathcal{F}_\infty = \cap_{t>0}\sigma(W_s - W_t : s \geq t)$, mostrare che ogni $A \in \mathcal{F}_\infty$ è trascurabile oppure quasi certo.

**Problema 125**

Sia $(W_t)_{t\geq 0}$ un processo di Wiener. Mostrare che il processo $Z_t$ definito come $Z_0 = 0$, $Z_s = sW_{1/s}$ per $s > 0$ è un moto Browniano.

**Problema 126**

Sia $(W_t)_{t\geq 0}$ un processo di Wiener. Mostrare che

$$\omega \mapsto \int_0^T W_t(\omega)dt$$

definisce una variabile aleatoria avente legge gaussiana e determinarne media e varianza.