Metodi Matematici e Statistici per Giuristi

I parte - Lezione 02: Logica

Dario Trevisan

19-20/09/2023

Section 1

Calcolo delle proposizioni

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:
  - **Vero** (in inglese *true*, indicato anche con le lettere V, T oppure il numero 1)

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:
  - **Vero** (in inglese *true*, indicato anche con le lettere V, T oppure il numero 1)
  - **Falso** (*false*, indicato anche con la lettera F oppure il numero 0)

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:
    - **Vero** (in inglese *true*, indicato anche con le lettere V, T oppure il numero 1)
    - **Falso** (*false*, indicato anche con la lettera F oppure il numero 0)
- Gli esempi matematici sono i più semplici, perché la verità matematica è meno ambigua:

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:
  - **Vero** (in inglese *true*, indicato anche con le lettere V, T oppure il numero 1)
  - **Falso** (*false*, indicato anche con la lettera F oppure il numero 0)
- Gli esempi matematici sono i più semplici, perché la verità matematica è meno ambigua:
  - “i triangoli hanno 4 lati”

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:
  - **Vero** (in inglese *true*, indicato anche con le lettere V, T oppure il numero 1)
  - **Falso** (*false*, indicato anche con la lettera F oppure il numero 0)
- Gli esempi matematici sono i più semplici, perché la verità matematica è meno ambigua:
  - "i triangoli hanno 4 lati"
  - "due più due fa 4"

- In questo corso interessano soprattutto esempi dal mondo reale: sono proposizioni

- In questo corso interessano soprattutto esempi dal mondo reale: sono proposizioni
  - “Tutti gli italiani pagano le tasse”

- In questo corso interessano soprattutto esempi dal mondo reale: sono proposizioni
  - “Tutti gli italiani pagano le tasse”
  - “Se l’imputato è dichiarato colpevole, finirà in carcere”

- In questo corso interessano soprattutto esempi dal mondo reale: sono proposizioni
  - “Tutti gli italiani pagano le tasse”
  - “Se l’imputato è dichiarato colpevole, finirà in carcere”
- Una domanda, ad esempio

"Gli italiani preferiscono la pizza al sushi?"

non è una proposizione (anche se la risposta è *vero* oppure *falso*). Tuttavia basta riformularla in modo che lo diventi (proviamo per esercizio in questo caso).

- In questo corso interessano soprattutto esempi dal mondo reale: sono proposizioni
  - “Tutti gli italiani pagano le tasse”
  - “Se l’imputato è dichiarato colpevole, finirà in carcere”
- Una domanda, ad esempio

  "Gli italiani preferiscono la pizza al sushi?"

  non è una proposizione (anche se la risposta è *vero* oppure *falso*). Tuttavia basta riformularla in modo che lo diventi (proviamo per esercizio in questo caso).
- Come **notazione** generale per le proposizioni usiamo lettere maiuscole latine (A, B, C, ecc.). Ad esempio: $A =$ “due più due fa quattro”.

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  "non A"

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  "non A"

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.
- Esempi:

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  "non A"

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.
- Esempi:
  - $A =$ "due più due fa quattro"

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  "non A"

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.
- Esempi:
  - $A =$ "due più due fa quattro"
  - "non A" $=$ "due più due *non* fa quattro"

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  $$\text{"non } A\text{"}$$

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.
- Esempi:
  - $A =$ "due più due fa quattro"
  - "non A" $=$ "due più due *non* fa quattro"
  - B "tutti gli italiani pagano le tasse"

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  "non A"

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.
- Esempi:
  - $A =$ "due più due fa quattro"
  - "non A" $=$ "due più due *non* fa quattro"
  - B "tutti gli italiani pagano le tasse"
  - "non B" $=$ "*non* tutti gli italiani pagano le tasse", o equivalentemente "*almeno un italiano non paga le tasse*".

Il valore di verità di “non A” è l’opposto di quello di A, come si può riassumere in una **tavola di verità**

A	non A
V	F
F	V

Vedremo tavole di verità anche per le altre operazioni, leggermente più complesse.

Esercizio: scrivere la negazione delle seguenti proposizioni

"Giuseppe ha figli"

"Domani piove"

"Nessuno è immortale"

"Almeno un pedone attraversa sulle strisce"

Esercizio: Indicare tra seguenti proposizioni la negazione della frase "Non tutte le mele sono dolci".

a. Qualche mela è dolce

Esercizio: Indicare tra seguenti proposizioni la negazione della frase "Non tutte le mele sono dolci".

a. Qualche mela è dolce
b. Tutte le mele non sono dolci

Esercizio: Indicare tra seguenti proposizioni la negazione della frase "Non tutte le mele sono dolci".

a. Qualche mela è dolce
b. Tutte le mele non sono dolci
c. Almeno una mela non è dolce

Esercizio: Indicare tra seguenti proposizioni la negazione della frase "Non tutte le mele sono dolci".

a. Qualche mela è dolce
b. Tutte le mele non sono dolci
c. Almeno una mela non è dolce
d. Qualsiasi mela è dolce

Esercizio: Negare le seguenti proposizioni:

a. Tutti gli uomini sono intelligenti

Esercizio: Negare le seguenti proposizioni:

a. Tutti gli uomini sono intelligenti
b. Ogni uomo è mortale

Esercizio: Negare le seguenti proposizioni:

a. Tutti gli uomini sono intelligenti
b. Ogni uomo è mortale
c. Qualche animale ha quattro zampe

Esercizio: Negare le seguenti proposizioni:

a. Tutti gli uomini sono intelligenti
b. Ogni uomo è mortale
c. Qualche animale ha quattro zampe
d. C'è almeno uno studente che ha il libro di storia

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

  "A e B"

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche $A \,\text{AND}\, B$ è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

$$"A \text{ e } B"$$

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche $A \, \text{AND} \, B$ è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.
- Consideriamo ad esempio:

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

  "A e B"

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche $A\,\mathrm{AND}\,B$ è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.
- Consideriamo ad esempio:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

  "A e B"

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche $A \, \text{AND} \, B$ è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.

- Consideriamo ad esempio:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

  "A e B"

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche A AND B è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.

- Consideriamo ad esempio:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)
  - $C =$ "2 è un numero negativo" (falsa)

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

  "A e B"

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche A AND B è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.

- Consideriamo ad esempio:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)
  - $C =$ "2 è un numero negativo" (falsa)
  - allora "A e B" è vera, mentre "A e C" è falsa.

La tavola di verità per l'operazione di congiunzione è la seguente (bisogna considerare tutti i 4 possibili casi per i valori di verità di A, B)

A	B	A e B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esercizio: date le proposizioni

$$A = \text{"Roma è la capitale d'Italia"}$$

$$B = \text{"Roma si trova nel Lazio"}$$

enunciare la proposizione “A e B” e determinarne il valore di verità.

Esercizio: data una qualsiasi proposizione A, determinare il valore di verità della proposizione "A e non A".

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \,\mathrm{OR}\, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  $$\text{"}A \text{ oppure } B\text{"}$$

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \,\mathrm{OR}\, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

- Alternativamente, “A oppure B” è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  $$\text{"}A \text{ oppure } B\text{"}$$

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \, \mathrm{OR} \, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

- Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  $$\text{"}A \text{ oppure } B\text{"}$$

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \,\mathrm{OR}\, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).
- Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.
- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \,\mathrm{OR}\, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

- Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \, \mathrm{OR} \, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

- Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)
  - $C =$ "2 è un numero negativo" (falsa)

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \,\mathrm{OR}\, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

- Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)
  - $C =$ "2 è un numero negativo" (falsa)
  - allora "A oppure B" è vera ma pure "A oppure C" è vera.

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  $$\text{"}A \text{ oppure } B\text{"}$$

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \, \mathrm{OR} \, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

- Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)
  - $C =$ "2 è un numero negativo" (falsa)
  - allora "A oppure B" è vera ma pure "A oppure C" è vera.
  - è falsa invece la proposizione "(non A) oppure C", ossia "2 è un numero dispari oppure negativo".

La tavola di verità per l'operazione di disgiunzione è la seguente:

A	B	A oppure B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esercizio: date le proposizioni

$$A = \text{"Roma è la capitale d'Italia"}$$

$$B = \text{"Firenze è la capitale d'Italia"}$$

enunciare la proposizione "A oppure B" e determinarne il valore di verità.

Esercizio: data una qualsiasi proposizione A, determinare il valore di verità della proposizione "A oppure non A".

Esercizio: Scrivere le tavole di verità delle due operazioni "non (A oppure B)" e "(non A) e (non B)" e confrontarle (legge di *De Morgan*).

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.
- Date due proposizioni A, B, l'implicazione materiale

  "A quindi B"

  (o anche "se A allora B", $A \to B$) è una proposizione **falsa** solo nel caso in cui A sia **vera** e B sia **falsa** (in tutti gli altri casi è vera).

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.
- Date due proposizioni A, B, l'implicazione materiale

  "A quindi B"

  (o anche "se A allora B", $A \to B$) è una proposizione **falsa** solo nel caso in cui A sia **vera** e B sia **falsa** (in tutti gli altri casi è vera).
- A è detta *antecedente* e B è detta *conseguente* nell'implicazione $A \to B$.

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.
- Date due proposizioni A, B, l'implicazione materiale

  "A quindi B"

  (o anche "se A allora B", $A \to B$) è una proposizione **falsa** solo nel caso in cui A sia **vera** e B sia **falsa** (in tutti gli altri casi è vera).
- A è detta *antecedente* e B è detta *conseguente* nell'implicazione $A \to B$.
- Esempi (matematici):

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.
- Date due proposizioni A, B, l'implicazione materiale

  "A quindi B"

  (o anche "se A allora B", $A \to B$) è una proposizione **falsa** solo nel caso in cui A sia **vera** e B sia **falsa** (in tutti gli altri casi è vera).
- A è detta *antecedente* e B è detta *conseguente* nell'implicazione $A \to B$.
- Esempi (matematici):
  - "se 2 è un numero pari, allora 2 è un numero maggiore di 1" è vera

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.
- Date due proposizioni A, B, l'implicazione materiale

  "A quindi B"

  (o anche "se A allora B", $A \to B$) è una proposizione **falsa** solo nel caso in cui A sia **vera** e B sia **falsa** (in tutti gli altri casi è vera).
- A è detta *antecedente* e B è detta *conseguente* nell'implicazione $A \to B$.
- Esempi (matematici):
  - "se 2 è un numero pari, allora 2 è un numero maggiore di 1" è vera
  - "se 2 è un numero pari, allora 2 è un numero negativo" è falsa

La tavola di verità per l'operazione di implicazione materiale è la seguente:

A	B	A quindi B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Un esempio che chiarifica la definizione è la proposizione

"se piove, allora Luca prende l'ombrello"

Questa è vera se "ogni volta che piove, Luca prende l'ombrello", quindi solamente nelle occasioni di pioggia (ossia l'antecedente è vera) si deve controllare che Luca abbia preso l'ombrello (ossia che la conseguente sia vera). Per argomentare che sia **falsa** invece basta trovare una occasione in cui piove e Luca non abbia l'ombrello (quello che si dice un *controesempio*).

D'altra parte è *ben noto* che da premesse false si può argomentare di tutto, quindi non dovrebbe stupire che se l'antecedente è falsa, il valore di verità dell'implicazione è sempre vero e non dipende dalla conseguente.

Esercizio: Stabilire il valore di verità delle seguenti proposizioni:

"Se Dante ha scritto *La Divina Commedia* allora Dante è nato a Napoli."

"se 5 è un numero dispari allora 5 è un numero pari".

—

Esercizio: Confrontare la tavola di verità di $A \to B$ con quella di “(non A) oppure B”.

Esercizio: Confrontare la tavola di verità di $A \to B$ con quelle di “(non A) quindi (non B)”, “$B \to A$”, “(non B) $\to$ (non A)”. In quali casi coincidono?

Altre operazioni

- Una variante della disgiunzione inclusiva è la versione **esclusiva**

$$\text{"o } A \text{ o } B\text{"}$$

(si scrive anche "$A\,\mathrm{XOR}\,B$) che è *vera* solo nel caso in cui **esattamente** una tra A, B è vera.

Esercizio: Scrivere le tavole di verità delle due operazioni sopra.

Altre operazioni

- Una variante della disgiunzione inclusiva è la versione **esclusiva**

  "o A o B"

  (si scrive anche “$A\,\mathrm{XOR}\,B$) che è *vera* solo nel caso in cui **esattamente** una tra A, B è vera.

- La doppia implicazione

  "A se e solo se B"

  (si scrive anche $A \leftrightarrow B$) è *vera* solo nel caso in cui A, B siano entrambe vere oppure entrambe false.

Esercizio: Scrivere le tavole di verità delle due operazioni sopra.

Section 2

Regole di inferenza

Il metodo deduttivo: dalle ipotesi alle tesi

La **deduzione** logica è il metodo con cui partendo da alcune proposizioni che si ritengono vere (dette **ipotesi**) e seguendo determinati passaggi si argomenta (si deduce o si *dimostra*) la verità di altre proposizioni (dette *tesi*).

- Nei ragionamenti matematici, si identificano spesso delle *ipotesi fondamentali* dette **assiomi**.

Il metodo deduttivo: dalle ipotesi alle tesi

La **deduzione** logica è il metodo con cui partendo da alcune proposizioni che si ritengono vere (dette **ipotesi**) e seguendo determinati passaggi si argomenta (si deduce o si *dimostra*) la verità di altre proposizioni (dette *tesi*).

- Nei ragionamenti matematici, si identificano spesso delle *ipotesi fondamentali* dette **assiomi**.
- Una collezione di *ipotesi* e una *tesi* (con relativa dimostrazione) è detto **teorema** in matematica.

Modus ponens (dimostrazione diretta)

Vediamo ora tre regole fondamentali per la deduzione. La prima regola afferma che

- se una proposizione A è vera e l'implicazione materiale $A \to B$ è pure vera, allora anche la proposizione conseguente B è vera.

Modus ponens (dimostrazione diretta)

Vediamo ora tre regole fondamentali per la deduzione. La prima regola afferma che

- se una proposizione A è vera e l'implicazione materiale $A \to B$ è pure vera, allora anche la proposizione conseguente B è vera.
- **Esempio**: supponiamo di sapere che "Oggi piove" (A) e che "Se piove, Luca prende l'ombrello" ($A \to B$) sono entrambe vere. Ne segue che "Luca prende l'ombrello" è pure vera.

Modus ponens (dimostrazione diretta)

Vediamo ora tre regole fondamentali per la deduzione. La prima regola afferma che

- se una proposizione A è vera e l'implicazione materiale $A \to B$ è pure vera, allora anche la proposizione conseguente B è vera.
- **Esempio**: supponiamo di sapere che "Oggi piove" (A) e che "Se piove, Luca prende l'ombrello" ($A \to B$) sono entrambe vere. Ne segue che "Luca prende l'ombrello" è pure vera.
- Questo è il modo di procedere più naturale nelle argomentazioni: in un certo senso si passa dal generale (l'affermazione $A \to B$ è di solito un principio vero sempre) al particolare (la validità di B nella situazione specifica).

Modus tollens (dimostrazione per assurdo)

La seconda regola si basa sull'osservazione che $A \to B$ e la *contronominale* "(non B) $\to$ (non A)" hanno la stessa tavola di verità. Pertanto, rovesciando i ruoli di antecedente e conseguente (e passando alle negazioni), si introduce la seguente regola:

- se l'implicazione $A \to B$ è vera e B è falsa, allora anche A è falsa.

Modus tollens (dimostrazione per assurdo)

La seconda regola si basa sull'osservazione che $A \to B$ e la *contronominale* "(non B) $\to$ (non A)" hanno la stessa tavola di verità. Pertanto, rovesciando i ruoli di antecedente e conseguente (e passando alle negazioni), si introduce la seguente regola:

- se l'implicazione $A \to B$ è vera e B è falsa, allora anche A è falsa.
- Su questa regola si fonda il *ragionamento per assurdo*, in cui per mostrare la validità di una tesi B a partire dalle ipotesi A (che si ritengono vere), si suppone B falsa e si procede con l'obiettivo di dedurre che A sia falsa. Se si riesce appunto ad ottenere tale **assurdo** (perché l'ipotesi A non può essere sia vera che falsa), ne segue che B *deve* quindi essere vera.

Modus tollens (dimostrazione per assurdo)

La seconda regola si basa sull'osservazione che $A \to B$ e la *contronominale* "(non B) $\to$ (non A)" hanno la stessa tavola di verità. Pertanto, rovesciando i ruoli di antecedente e conseguente (e passando alle negazioni), si introduce la seguente regola:

- se l'implicazione $A \to B$ è vera e B è falsa, allora anche A è falsa.
- Su questa regola si fonda il *ragionamento per assurdo*, in cui per mostrare la validità di una tesi B a partire dalle ipotesi A (che si ritengono vere), si suppone B falsa e si procede con l'obiettivo di dedurre che A sia falsa. Se si riesce appunto ad ottenere tale **assurdo** (perché l'ipotesi A non può essere sia vera che falsa), ne segue che B *deve* quindi essere vera.
- Benché accettato in matematica, un argomento *per assurdo* può essere visto con sospetto perché non si "costruisce" un percorso diretto tra l'ipotesi e la tesi.

Sillogismo

La terza regola è il sillogismo aristotelico, che permette di creare nuove implicazioni a partire da implicazioni vere per ipotesi:

- se le implicazioni materiali $A \to B$ e $B \to C$ sono entrambe vere, allora anche $A \to C$ è vera.

Sillogismo

La terza regola è il sillogismo aristotelico, che permette di creare nuove implicazioni a partire da implicazioni vere per ipotesi:

- se le implicazioni materiali $A \to B$ e $B \to C$ sono entrambe vere, allora anche $A \to C$ è vera.
- **Esempio**: partendo dalle premesse (vere) “Se studio passerò l’esame” e “Se passerò l’esame mi potrò laureare”, ne segue che anche “Se studio mi potrò laureare”.

Esercizi sull’inferenza

Esercizio: Dalle premesse “Se Luca è toscano allora Luca è italiano”, “Se Luca è italiano allora Luca è europeo”, segue che “Se Luca non è toscano, allora non è europeo”?

Applicando le regole di inferenza completare le deduzioni:

Ipotesi:

- "Se gioco a carte perdo";

Conseguenze:

—

Ipotesi:

Conseguenze:

Applicando le regole di inferenza completare le deduzioni:

Ipotesi:

- "Se gioco a carte perdo";
- "Gioco a carte".

Conseguenze:

—

Ipotesi:

Conseguenze:

Applicando le regole di inferenza completare le deduzioni:

Ipotesi:

- "Se gioco a carte perdo";
- "Gioco a carte".

Conseguenze:

—

Ipotesi:

- "Se Roberto vede la televisione allora non studia";

Conseguenze:

Applicando le regole di inferenza completare le deduzioni:

Ipotesi:

- "Se gioco a carte perdo";
- "Gioco a carte".

Conseguenze:

—

Ipotesi:

- "Se Roberto vede la televisione allora non studia";
- "Roberto studia".

Conseguenze:

Ipotesi:

- "Se c'è il sole, c'è molta luce";

Conseguenze:

Ipotesi:

- "Se c'è il sole, c'è molta luce";
- "Se c'è molta luce, Luca mette gli occhiali";

Conseguenze:

Ipotesi:

- "Se c'è il sole, c'è molta luce";
- "Se c'è molta luce, Luca mette gli occhiali";
- "Luca è senza occhiali".

Conseguenze:

Section 3

Problemi vari di Logica

Problemi da concorsi pubblici

Se e solo se ho finito di mangiare, lavo i piatti. In base alla precedente informazione, quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

a. Quando lavo i piatti non è detto che abbia finito di mangiare

Problemi da concorsi pubblici

Se e solo se ho finito di mangiare, lavo i piatti. In base alla precedente informazione, quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

a. Quando lavo i piatti non è detto che abbia finito di mangiare
b. Se lavo i piatti significa che ho finito di mangiare

Problemi da concorsi pubblici

Se e solo se ho finito di mangiare, lavo i piatti. In base alla precedente informazione, quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

a. Quando lavo i piatti non è detto che abbia finito di mangiare
b. Se lavo i piatti significa che ho finito di mangiare
c. Lavo i piatti solo prima di andare a dormire

Problemi da concorsi pubblici

Se e solo se ho finito di mangiare, lavo i piatti. In base alla precedente informazione, quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

a. Quando lavo i piatti non è detto che abbia finito di mangiare
b. Se lavo i piatti significa che ho finito di mangiare
c. Lavo i piatti solo prima di andare a dormire
d. A volte, anche se ho finito di mangiare, non lavo i piatti

Problemi da concorsi pubblici

Se e solo se ho finito di mangiare, lavo i piatti. In base alla precedente informazione, quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?

a. Quando lavo i piatti non è detto che abbia finito di mangiare
b. Se lavo i piatti significa che ho finito di mangiare
c. Lavo i piatti solo prima di andare a dormire
d. A volte, anche se ho finito di mangiare, non lavo i piatti
e. Lavo i piatti subito dopo aver mangiato il dolce

Chi va al cinema mangia i pop corn. Tutti i giovani mangiano i pop corn. Roberto va al cinema. Se le precedenti affermazioni sono vere, quale delle seguenti è necessariamente vera?

a. Roberto è giovane

Chi va al cinema mangia i pop corn. Tutti i giovani mangiano i pop corn. Roberto va al cinema. Se le precedenti affermazioni sono vere, quale delle seguenti è necessariamente vera?

a. Roberto è giovane
b. Roberto mangia i pop corn

Chi va al cinema mangia i pop corn. Tutti i giovani mangiano i pop corn. Roberto va al cinema. Se le precedenti affermazioni sono vere, quale delle seguenti è necessariamente vera?

a. Roberto è giovane
b. Roberto mangia i pop corn
c. Chi mangia i pop corn va al cinema

Chi va al cinema mangia i pop corn. Tutti i giovani mangiano i pop corn. Roberto va al cinema. Se le precedenti affermazioni sono vere, quale delle seguenti è necessariamente vera?

a. Roberto è giovane
b. Roberto mangia i pop corn
c. Chi mangia i pop corn va al cinema
d. Chi va al cinema è giovane

Chi va al cinema mangia i pop corn. Tutti i giovani mangiano i pop corn. Roberto va al cinema. Se le precedenti affermazioni sono vere, quale delle seguenti è necessariamente vera?

a. Roberto è giovane
b. Roberto mangia i pop corn
c. Chi mangia i pop corn va al cinema
d. Chi va al cinema è giovane
e. Tutti i giovani vanno al cinema

Se il telefono squilla le segretarie vanno a rispondere; Lucilla svolge qualche volta nella sua ditta il ruolo di segretaria. Se le precedenti affermazioni sono vere, quale fra quelle proposte è sicuramente vera?

a. Lucilla nella sua ditta non risponde mai al telefono

Se il telefono squilla le segretarie vanno a rispondere; Lucilla svolge qualche volta nella sua ditta il ruolo di segretaria. Se le precedenti affermazioni sono vere, quale fra quelle proposte è sicuramente vera?

a. Lucilla nella sua ditta non risponde mai al telefono
b. Lucilla risponde sempre al telefono

Se il telefono squilla le segretarie vanno a rispondere; Lucilla svolge qualche volta nella sua ditta il ruolo di segretaria. Se le precedenti affermazioni sono vere, quale fra quelle proposte è sicuramente vera?

a. Lucilla nella sua ditta non risponde mai al telefono
b. Lucilla risponde sempre al telefono
c. Le segretarie non rispondono mai al telefono

Se il telefono squilla le segretarie vanno a rispondere; Lucilla svolge qualche volta nella sua ditta il ruolo di segretaria. Se le precedenti affermazioni sono vere, quale fra quelle proposte è sicuramente vera?

a. Lucilla nella sua ditta non risponde mai al telefono
b. Lucilla risponde sempre al telefono
c. Le segretarie non rispondono mai al telefono
d. Lucilla a volte risponde al telefono

Un gruppo di quattro amiche presenta le seguenti caratteristiche:

- Lorena è nata a Firenze e studia a Lucca;

Conseguentemente:

Un gruppo di quattro amiche presenta le seguenti caratteristiche:

- Lorena è nata a Firenze e studia a Lucca;
- i genitori di Federica lavorano a Prato;

Conseguentemente:

Un gruppo di quattro amiche presenta le seguenti caratteristiche:

- Lorena è nata a Firenze e studia a Lucca;
- i genitori di Federica lavorano a Prato;
- Sara risiede ad Arezzo;

Conseguentemente:

Un gruppo di quattro amiche presenta le seguenti caratteristiche:

- Lorena è nata a Firenze e studia a Lucca;
- i genitori di Federica lavorano a Prato;
- Sara risiede ad Arezzo;
- Simona fa la pendolare tra Firenze ed Arezzo.

Conseguentemente:

Un gruppo di quattro amiche presenta le seguenti caratteristiche:

- Lorena è nata a Firenze e studia a Lucca;
- i genitori di Federica lavorano a Prato;
- Sara risiede ad Arezzo;
- Simona fa la pendolare tra Firenze ed Arezzo.

Conseguentemente:

a. non è certo che tutte le amiche siano residenti in Toscana

Un gruppo di quattro amiche presenta le seguenti caratteristiche:

- Lorena è nata a Firenze e studia a Lucca;
- i genitori di Federica lavorano a Prato;
- Sara risiede ad Arezzo;
- Simona fa la pendolare tra Firenze ed Arezzo.

Conseguentemente:

a. non è certo che tutte le amiche siano residenti in Toscana
b. è certo che almeno tre amiche siano residenti in Toscana

Un gruppo di quattro amiche presenta le seguenti caratteristiche:

- Lorena è nata a Firenze e studia a Lucca;
- i genitori di Federica lavorano a Prato;
- Sara risiede ad Arezzo;
- Simona fa la pendolare tra Firenze ed Arezzo.

Conseguentemente:

a. non è certo che tutte le amiche siano residenti in Toscana
b. è certo che almeno tre amiche siano residenti in Toscana
c. è sicuro che le quattro amiche si siano conosciute in Toscana

Un gruppo di quattro amiche presenta le seguenti caratteristiche:

- Lorena è nata a Firenze e studia a Lucca;
- i genitori di Federica lavorano a Prato;
- Sara risiede ad Arezzo;
- Simona fa la pendolare tra Firenze ed Arezzo.

Conseguentemente:

a. non è certo che tutte le amiche siano residenti in Toscana
b. è certo che almeno tre amiche siano residenti in Toscana
c. è sicuro che le quattro amiche si siano conosciute in Toscana
d. è certo che tutte le amiche siano residenti in Toscana

Se piove, Filippo non utilizza il motoscafo. Se la precedente affermazione è vera, è anche vero che:

a. se Filippo non utilizza il motoscafo significa che piove

Se piove, Filippo non utilizza il motoscafo. Se la precedente affermazione è vera, è anche vero che:

a. se Filippo non utilizza il motoscafo significa che piove
b. Filippo utilizza sempre il motoscafo

Se piove, Filippo non utilizza il motoscafo. Se la precedente affermazione è vera, è anche vero che:

a. se Filippo non utilizza il motoscafo significa che piove
b. Filippo utilizza sempre il motoscafo
c. Filippo utilizza il motoscafo se non piove

Se piove, Filippo non utilizza il motoscafo. Se la precedente affermazione è vera, è anche vero che:

a. se Filippo non utilizza il motoscafo significa che piove
b. Filippo utilizza sempre il motoscafo
c. Filippo utilizza il motoscafo se non piove
d. Filippo non utilizza il motoscafo solo quando piove

Blu, Rosso, Verde, Marrone, Nero, Giallo sono i sei colori usati per indicare ognuno dei sei appartamenti in un palazzo di due piani (primo e secondo), in cui ogni piano prevede tre appartamenti. Si sa che Giallo è posto proprio sotto Blu, e Rosso è accanto a Verde.

In base alle precedenti informazioni, se Rosso è accanto a Blu:

a. Rosso è al primo piano

Blu, Rosso, Verde, Marrone, Nero, Giallo sono i sei colori usati per indicare ognuno dei sei appartamenti in un palazzo di due piani (primo e secondo), in cui ogni piano prevede tre appartamenti. Si sa che Giallo è posto proprio sotto Blu, e Rosso è accanto a Verde.

In base alle precedenti informazioni, se Rosso è accanto a Blu:

a. Rosso è al primo piano
b. Marrone è al secondo piano

Blu, Rosso, Verde, Marrone, Nero, Giallo sono i sei colori usati per indicare ognuno dei sei appartamenti in un palazzo di due piani (primo e secondo), in cui ogni piano prevede tre appartamenti. Si sa che Giallo è posto proprio sotto Blu, e Rosso è accanto a Verde.

In base alle precedenti informazioni, se Rosso è accanto a Blu:

a. Rosso è al primo piano
b. Marrone è al secondo piano
c. Marrone è al primo piano e Nero al secondo

Blu, Rosso, Verde, Marrone, Nero, Giallo sono i sei colori usati per indicare ognuno dei sei appartamenti in un palazzo di due piani (primo e secondo), in cui ogni piano prevede tre appartamenti. Si sa che Giallo è posto proprio sotto Blu, e Rosso è accanto a Verde.

In base alle precedenti informazioni, se Rosso è accanto a Blu:

a. Rosso è al primo piano
b. Marrone è al secondo piano
c. Marrone è al primo piano e Nero al secondo
d. Nero è al primo piano

Ogni volta che mi alzo dal letto provo delle vertigini. Se la precedente affermazione è **falsa**, quale delle seguenti è certamente vera?

a. Almeno una volta mi sono alzato dal letto senza provare vertigini

Ogni volta che mi alzo dal letto provo delle vertigini. Se la precedente affermazione è **falsa**, quale delle seguenti è certamente vera?

a. Almeno una volta mi sono alzato dal letto senza provare vertigini
b. Quando mi alzo dal letto non provo mai vertigini

Ogni volta che mi alzo dal letto provo delle vertigini. Se la precedente affermazione è **falsa**, quale delle seguenti è certamente vera?

a. Almeno una volta mi sono alzato dal letto senza provare vertigini
b. Quando mi alzo dal letto non provo mai vertigini
c. Tutte le mattine provo delle vertigini

Ogni volta che mi alzo dal letto provo delle vertigini. Se la precedente affermazione è **falsa**, quale delle seguenti è certamente vera?

a. Almeno una volta mi sono alzato dal letto senza provare vertigini
b. Quando mi alzo dal letto non provo mai vertigini
c. Tutte le mattine provo delle vertigini
d. Almeno una volta mi sono alzato dal letto e ho provato delle forti vertigini

Ogni volta che mi alzo dal letto provo delle vertigini. Se la precedente affermazione è **falsa**, quale delle seguenti è certamente vera?

a. Almeno una volta mi sono alzato dal letto senza provare vertigini
b. Quando mi alzo dal letto non provo mai vertigini
c. Tutte le mattine provo delle vertigini
d. Almeno una volta mi sono alzato dal letto e ho provato delle forti vertigini
e. Quando non mi alzo dal letto non provo vertigini

Considerate le seguenti 4 affermazioni:

1. "Solamente una delle 4 affermazioni riportate è falsa";

Quante delle 4 affermazioni proposte sono vere?

Considerate le seguenti 4 affermazioni:

1. "Solamente una delle 4 affermazioni riportate è falsa";
2. "Due delle 4 affermazioni riportate sono false";

Quante delle 4 affermazioni proposte sono vere?

Considerate le seguenti 4 affermazioni:

1. "Solamente una delle 4 affermazioni riportate è falsa";
2. "Due delle 4 affermazioni riportate sono false";
3. "Tre delle 4 affermazioni riportate sono false";

Quante delle 4 affermazioni proposte sono vere?

Considerate le seguenti 4 affermazioni:

1. "Solamente una delle 4 affermazioni riportate è falsa";
2. "Due delle 4 affermazioni riportate sono false";
3. "Tre delle 4 affermazioni riportate sono false";
4. "Tutte le affermazioni riportate sono false".

Quante delle 4 affermazioni proposte sono vere?

Delle tre banche d'affari ABI, EBI e OBI almeno due sono svizzere. Si sa, inoltre, che se ABI è svizzera anche EBI lo è, che se OBI è svizzera lo è anche ABI, e che tra EBI e OBI almeno una è non svizzera.

In base a queste informazioni, quale delle seguenti è sicuramente vera?

a. ABI, OBI e EBI sono svizzere

Delle tre banche d'affari ABI, EBI e OBI almeno due sono svizzere. Si sa, inoltre, che se ABI è svizzera anche EBI lo è, che se OBI è svizzera lo è anche ABI, e che tra EBI e OBI almeno una è non svizzera.

In base a queste informazioni, quale delle seguenti è sicuramente vera?

a. ABI, OBI e EBI sono svizzere
b. OBI non è svizzera e EBI è svizzera

Delle tre banche d'affari ABI, EBI e OBI almeno due sono svizzere. Si sa, inoltre, che se ABI è svizzera anche EBI lo è, che se OBI è svizzera lo è anche ABI, e che tra EBI e OBI almeno una è non svizzera.

In base a queste informazioni, quale delle seguenti è sicuramente vera?

a. ABI, OBI e EBI sono svizzere
b. OBI non è svizzera e EBI è svizzera
c. OBI è svizzera e EBI non è svizzera

Delle tre banche d'affari ABI, EBI e OBI almeno due sono svizzere. Si sa, inoltre, che se ABI è svizzera anche EBI lo è, che se OBI è svizzera lo è anche ABI, e che tra EBI e OBI almeno una è non svizzera.

In base a queste informazioni, quale delle seguenti è sicuramente vera?

a. ABI, OBI e EBI sono svizzere
b. OBI non è svizzera e EBI è svizzera
c. OBI è svizzera e EBI non è svizzera
d. ABI non è svizzera e EBI è svizzera

Tutte le volte che sono andato in montagna, ha nevicato.

Se la precedente affermazione è **falsa**, quale delle seguenti è certamente vera?

a. Almeno una volta sono andato in montagna e non ha nevicato

Tutte le volte che sono andato in montagna, ha nevicato.

Se la precedente affermazione è **falsa**, quale delle seguenti è certamente vera?

a. Almeno una volta sono andato in montagna e non ha nevicato
b. Tutte le volte che sono andato in montagna, non ha nevicato

Tutte le volte che sono andato in montagna, ha nevicato.

Se la precedente affermazione è **falsa**, quale delle seguenti è certamente vera?

a. Almeno una volta sono andato in montagna e non ha nevicato
b. Tutte le volte che sono andato in montagna, non ha nevicato
c. Quando non vado in montagna, il tempo è bello

Tutte le volte che sono andato in montagna, ha nevicato.

Se la precedente affermazione è **falsa**, quale delle seguenti è certamente vera?

a. Almeno una volta sono andato in montagna e non ha nevicato
b. Tutte le volte che sono andato in montagna, non ha nevicato
c. Quando non vado in montagna, il tempo è bello
d. Quando vado in montagna, c'è sempre il sole

(da Alphatest) Marco ha quattro fratelli: Andrea, Cesare, Davide e Biagio. Ognuno è sposato con una delle quattro sorelle di Elena, la moglie di Marco, che sono Nausica, Lucia, Alma e Maria. Si sa inoltre che:

- Marco è più grande di Biagio;

Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(da Alphatest) Marco ha quattro fratelli: Andrea, Cesare, Davide e Biagio. Ognuno è sposato con una delle quattro sorelle di Elena, la moglie di Marco, che sono Nausica, Lucia, Alma e Maria. Si sa inoltre che:

- Marco è più grande di Biagio;
- Cesare è più piccolo solo di Andrea;

Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(da Alphatest) Marco ha quattro fratelli: Andrea, Cesare, Davide e Biagio. Ognuno è sposato con una delle quattro sorelle di Elena, la moglie di Marco, che sono Nausica, Lucia, Alma e Maria. Si sa inoltre che:

- Marco è più grande di Biagio;
- Cesare è più piccolo solo di Andrea;
- Davide, il più piccolo dei cinque fratelli, ha sposato Nausica;

Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(da Alphatest) Marco ha quattro fratelli: Andrea, Cesare, Davide e Biagio. Ognuno è sposato con una delle quattro sorelle di Elena, la moglie di Marco, che sono Nausica, Lucia, Alma e Maria. Si sa inoltre che:

- Marco è più grande di Biagio;
- Cesare è più piccolo solo di Andrea;
- Davide, il più piccolo dei cinque fratelli, ha sposato Nausica;
- Alma ha sposato il fratello immediatamente precedente al più giovane dei cinque.

Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(da Alphatest) Marco ha quattro fratelli: Andrea, Cesare, Davide e Biagio. Ognuno è sposato con una delle quattro sorelle di Elena, la moglie di Marco, che sono Nausica, Lucia, Alma e Maria. Si sa inoltre che:

- Marco è più grande di Biagio;
- Cesare è più piccolo solo di Andrea;
- Davide, il più piccolo dei cinque fratelli, ha sposato Nausica;
- Alma ha sposato il fratello immediatamente precedente al più giovane dei cinque.

Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

a. Maria è la moglie di Andrea

(da Alphatest) Marco ha quattro fratelli: Andrea, Cesare, Davide e Biagio. Ognuno è sposato con una delle quattro sorelle di Elena, la moglie di Marco, che sono Nausica, Lucia, Alma e Maria. Si sa inoltre che:

- Marco è più grande di Biagio;
- Cesare è più piccolo solo di Andrea;
- Davide, il più piccolo dei cinque fratelli, ha sposato Nausica;
- Alma ha sposato il fratello immediatamente precedente al più giovane dei cinque.

Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

a. Maria è la moglie di Andrea
b. Alma non è la moglie di Cesare

(da Alphatest) Marco ha quattro fratelli: Andrea, Cesare, Davide e Biagio. Ognuno è sposato con una delle quattro sorelle di Elena, la moglie di Marco, che sono Nausica, Lucia, Alma e Maria. Si sa inoltre che:

- Marco è più grande di Biagio;
- Cesare è più piccolo solo di Andrea;
- Davide, il più piccolo dei cinque fratelli, ha sposato Nausica;
- Alma ha sposato il fratello immediatamente precedente al più giovane dei cinque.

Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

a. Maria è la moglie di Andrea
b. Alma non è la moglie di Cesare
c. Andrea è il marito di Lucia

(da Alphatest) Marco ha quattro fratelli: Andrea, Cesare, Davide e Biagio. Ognuno è sposato con una delle quattro sorelle di Elena, la moglie di Marco, che sono Nausica, Lucia, Alma e Maria. Si sa inoltre che:

- Marco è più grande di Biagio;
- Cesare è più piccolo solo di Andrea;
- Davide, il più piccolo dei cinque fratelli, ha sposato Nausica;
- Alma ha sposato il fratello immediatamente precedente al più giovane dei cinque.

Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

a. Maria è la moglie di Andrea
b. Alma non è la moglie di Cesare
c. Andrea è il marito di Lucia
d. Cesare è il marito di Maria

(da Alphatest) Marco ha quattro fratelli: Andrea, Cesare, Davide e Biagio. Ognuno è sposato con una delle quattro sorelle di Elena, la moglie di Marco, che sono Nausica, Lucia, Alma e Maria. Si sa inoltre che:

- Marco è più grande di Biagio;
- Cesare è più piccolo solo di Andrea;
- Davide, il più piccolo dei cinque fratelli, ha sposato Nausica;
- Alma ha sposato il fratello immediatamente precedente al più giovane dei cinque.

Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

a. Maria è la moglie di Andrea
b. Alma non è la moglie di Cesare
c. Andrea è il marito di Lucia
d. Cesare è il marito di Maria
e. Maria e Biagio sono sposati tra loro