Corso di Laurea in Ingegneria Edile-Architettura

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 27 Gennaio 2014

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera completa e leggibile.

(**1**) (Punti 8) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= 4 - \dfrac{2}{a_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \log(1 + 2\sin^2 x),$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(**3**) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left(\cos 2\sqrt{x} - e^{-2x}\right)^2}{\sqrt{1+x^4} - 1}.$$

(**4**) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} e^{\sqrt{x+1}}\,(x + 3\sqrt{x+1})\ dx.$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI.

(**1**) (Punti 8) Studiare il comportamento della seguente successione e calcolarne il limite:

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ \\ a_{n+1} & = & 4 - \dfrac{2}{a_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Svolgimento.

La successione è ben definita.Infatti il denominatore della frazione non si annulla mai in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $a_n > 0$. Questo puó essere dimostrato per induzione. Il primo passo è ovvio. L'induttivitá della proposizione, ossia $a_n > 0$ implica $a_{n+1} > 0$ si dimostra nel modo che segue.

$$a_{n+1} > 0 \iff 4 - \frac{2}{a_n + 1} > 0 \iff 2 > \frac{1}{a_n + 1}, \iff 2a_n + 2 > 1 \iff a_n > -\frac{1}{2}.$$

L'ultima diseguaglianza è verificata per l'ipotesi induttiva.

Calcolando alcuni dei primi termini della successione si osserva un andamento crescente dei valori ottenuti: $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{7}{2}$, $a_3 = \frac{32}{9}$. Ipotizziamo un andamento crescente della successione. Proviamo questo asserto per induzione. Il primo passo, come abbiamo appena osservato è vero. Verifichiamo l'induttività della proposizione, ossia: se $a_{n-1} < a_n$ allora $a_n < a_{n+1}$. Infatti:

$$a_n = 4 - \frac{2}{a_{n-1} + 1} < 4 - \frac{2}{a_n + 1} = a_n \iff \frac{1}{a_n + 1} < \frac{1}{a_{n-1} + 1} \iff a_{n-1} < a_n.$$

L'ultima diseguaglianza è verificata per l'ipotesi induttiva.

Per il teorema di regolarità delle successioni monotone sappiamo che esiste il limite

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Si tratta ora di stabilire se questo limite è finito o $+\infty$. Per verificare che $L \in \mathbb{R}$ proviamo che la successione è limitata superiormente cercando un suo maggiorante. Osservando l'espressione che la definisce si vede che da 4 viene sottratta una quantità positiva, di conseguenza viene naturale supporre che 4 sia un maggiorante. Verifichiamo questo direttamente sull'espressione:

$$4 - \frac{2}{a_n + 1} < 4 \iff 0 < \frac{2}{a_n + 1} \iff a_n > -1,$$

che, come abbiamo visto sopra, è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. A questo punto si calcola L procedento nel solito modo, ossia passando al limite nell'equazione che definisce la successione:

$$L = 4 - \frac{2}{L + 1} \iff L^2 - 3L - 2 = 0.$$

Le soluzioni sono $L_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ e $L_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$. Il limite cercato è L_2 perché L_1 non è punto di accumulazione della successione (è un valore negativo).

2) (Punti 8) Data la funzione

$$f(x) = \log(1 + 2\sin^2 x),$$

determinare:

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo che è periodica di periodo π. Infatti, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ risulta

$$f(x + k\pi) \;=\; \log[1 + 2\sin^2(x + k\pi)] \;=\; \log(1 + 2\sin^2 x) \;=\; f(x),$$

perché $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, mentre $\sin[x + (2k + 1)\pi] = -\sin x$, quindi $\sin^2[x + (2k + 1)\pi] = \sin^2 x$. Ci possiamo limitare a studiare la funzione nell'intervallo $[0, \pi]$.

Calcoliamo la sua derivata prima e determiniamo gli intervalli di monotonia.

$$f'(x) \;=\; \frac{4\sin x\;\cos x}{1 + 2\sin^2 x}.$$

Il segno è determinato dal numeratore, quindi sull'intervallo $[0, \pi]$, abbiamo:

$$f'(x) > 0 \iff \begin{cases} \sin x & > & 0 \\ \cos x & > & 0, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \sin x & < & 0 \\ \cos x & < & 0, \end{cases} \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

La derivata sará quindi negativa su $\left(\frac{\pi}{2},\, \pi\right)$. Di conseguenza la funzione risulta crescente su $\left(0,\, \frac{\pi}{2}\right)$ e decrescente su $\left(\frac{\pi}{2},\, \pi\right)$. Il punto $x_1 \;=\; \frac{\pi}{2}$ è di massimo relativo, mentre i punti $x_2 \;=\; 0$ e $x_3 \;=\; \pi$ sono di minimo relativo. Osserviamo che in questo caso x_1 è anche di massimo assoluto e x_2, x_3 sono di minimo assoluto.

calcoliamo la derivata seconda per stabilire gli intervalli di concavità o convessità della funzione. Tenuto conto della relazione pitagorica $\sin^2 x \,+\, \cos^2 x \;=\; 1$, possiamo scrivere:

$$f''(x) \;=\; 4\,\frac{(\cos^2 x \,-\, \sin^2 x)(1 + 2\sin^2 x) \,-\, 4\sin^2 x\,\cos^2 x}{(1 \,+\, 2\sin^2 x)^2} \;=\; 4\,\frac{1 \,-\, 4\,\sin^2 x}{(1 \,+\, 2\sin^2 x)^2}.$$

Il segno è determinato dal numeratore, quindi sull'intervallo $[0, \pi]$, abbiamo:

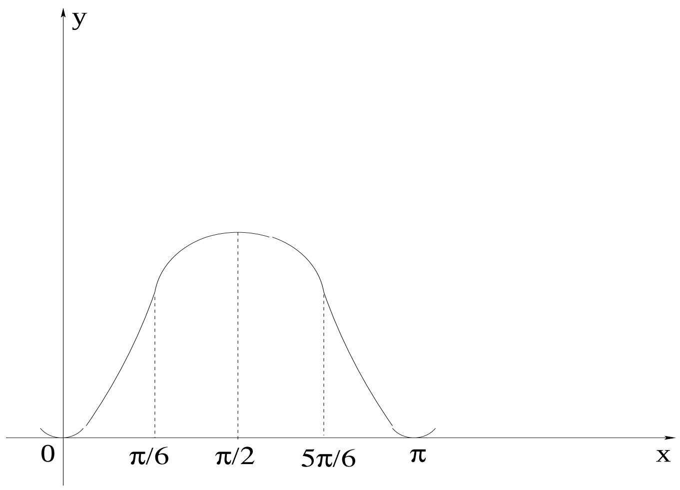
$$f''(x) > 0 \iff 1 \,-\, 4\,\sin^2 x \;>\; 0 \iff -\frac{1}{2} \;<\; \sin x \;<\; \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff 0 \;<\; x \;<\; \frac{\pi}{6} \quad \text{oppure} \quad \frac{5}{6}\pi \;<\; x \;<\; \pi.$$

La funzione risulta quindi convessa su $\left(0,\, \frac{\pi}{6}\right)$, oppure su $\left(\frac{5}{6}\pi,\, \pi\right)$, concava su $\left(\frac{\pi}{6},\, \frac{5}{6}\pi\right)$. I punti $x_4 \;=\; \frac{\pi}{6}$ e $x_5 \;=\; \frac{5}{6}\pi$ sono di flesso.

Possiamo a questo punto calcolare alcuni valori particolari di f e f' e tracciare il grafico della funzione.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \log\frac{3}{2},\;\; f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \;=\; \frac{2\sqrt{3}}{2},\;\; f'\left(\frac{5}{6}\pi\right) \;=\; -\frac{2\sqrt{3}}{2}.$$



(**3**) (Punti 8) Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left(\cos 2\sqrt{x} \ - \ e^{-2x}\right)^2}{\sqrt{1+x^4}\ -\ 1}.$$

Svolgimento.
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per risolvere l'indeterminazione utilizziamo gli sviluppi di Taylor delle funzioni che compaiono nell'espressione.

$$\begin{aligned} \cos 2\sqrt{x} &= 1 - \frac{4x}{2} + \frac{16x^2}{24} + o(x^2) = 1 - 2x + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2). \\ e^{-2x} &= 1 - 2x + \frac{4x^2}{2} + o(x^2) = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2). \end{aligned} \tag{1}$$

Da cui

$$\left(\cos 2\sqrt{x} \ - \ e^{-2x}\right)^2 = \left[-\frac{4}{3}x^2 + o(x^2)\right]^2 = \frac{16}{9}x^4 + o(x^4).$$

Inoltre

$$\sqrt{1+x^4} - 1 = 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 = \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

Sostituendo nel limite ed applicando il principio di sostituzione degli infinitesimi.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{16}{9}x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{16}{9}x^4}{\frac{1}{2}x^4} = \frac{32}{9}.$$

(**4**) (Punti 8) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} e^{\sqrt{x+1}}\,\left(x + 3\sqrt{x+1}\right)\ dx.$$

Svolgimento
Effettuiamo il seguente cambio di variabile:

$$t = \sqrt{x+1} \quad \Longleftrightarrow \quad x = t^2 - 1 \quad \text{quindi } dx = 2t\,dt.$$

Inoltre se $x = -1$ allora $t = 0$, mentre se $x = 0$ allora $t = 1$. Sostituendo otteniamo

$$\int_{-1}^{0} e^{\sqrt{x+1}}\,\left(x + 3\sqrt{x+1}\right)\ dx = \int_0^1 e^t\,(t^2 - 1 + 3t)\,2t\ dt = \int_0^1 (2e^t t^3 + 6t^2 e^t - 2te^t)\ dt =$$

$$= 2\int_0^1 e^t t^3\,dt + 6\int_0^1 t^2 e^t\,dt - 2\int_0^1 te^t\ dt =$$

(integrando per parti il primo integrale)

$$= 2\left[e^t t^3\right]_0^1 - 6\int_0^1 t^2\,e^t\ dt + 6\int_0^1 t^2 e^t\,dt - 2\int_0^1 te^t\ dt = 2e - 2\int_0^1 te^t\ dt =$$

(integriamo di nuovo per parti)

$$= 2e - 2[te^t]_0^1 + 2\int_0^1 e^t\ dt = 2[e^t]_0^1 = 2(e-1).$$