ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA I

Maggiorazione della media geometrica con la media aritmetica

Siano $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Allora per ogni $n \geq 2$ vale la maggiorazione

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \tag{1}$$

Suggerimento: dimostrare per induzione utilizzando la seguente diseguaglianza.
Diseguaglianza di Young

Siano $a,\, b \in \mathbb{R}^+$, $r,\, s \in \mathbb{Q}$ tali che $r + s = 1$, allora se $0 < r < 1$ vale la seguente diseguaglianza

$$a^r\, b^s \;\; \leq \;\; r\,a \; + \; s\,b. \tag{2}$$

Questa diseguaglianza si dimostra utilizzando il seguente esercizio.
Esercizio 2.

Siano $r \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, $x \neq 1$, $0 < r < 1$, allora

$$x^r - 1 < r(x - 1).$$

La dimostrazione utilizza il seguente esercizio.
Esercizio 1.

Se $p,\, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p > q \geq 1$, $x > 0$ e $x \neq 1$ allora

$$\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q}.$$

Per provare la tesi applicare la diseguaglianza di Bernoulli.
Diseguaglianza di Bernoulli.
$\forall n \geq 2,\;\; \forall h > -1,\;\; h \neq 0$ risulta

$$i) \quad (1 + h)^n > 1 + nh,$$

$$ii) \quad 1 + nh(1 + h)^{n-1} > (1 + h)^n.$$

Dimostrare per induzione.

Svolgimento degli esercizi proposti.

Diseguaglianza di Bernoulli.
$\forall n \geq 2,\ \ \forall h > -1,\ \ h \neq 0$ risulta

$$\begin{aligned} &i) \quad (1+h)^n > 1+nh, \\ &ii) \quad 1+nh(1+h)^{n-1} > (1+h)^n. \end{aligned} \tag{3}$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione le diseguaglianze.
Dimostrazione (i)
Primo passo: se $n = 2$ si ha che $(1+h)^2 > 1+2h$.
Induttività.

$$\begin{aligned} &(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+n) > \\ &\text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &(1+nh)(1+h) = 1+h+nh+h^2 > 1+h(n+1). \end{aligned} \tag{4}$$

Dimostrazione (ii)
Primo passo: se $n = 2$ si ha

$$1+2h(1+h) > (1+h)^2$$

che é vera perché equivale a

$$1+2h+2h^2 > 1+2h+h^2$$

.
Induttivitá.

$$\begin{aligned} &(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) < \\ &\text{(per l'ipotesi induttiva)} \\ &< [1+nh(1+h)^{n-1}](1+h) = 1+h+nh(1+h)^n. \end{aligned} \tag{5}$$

Distinguiamo i casi $h > 0$ e $-1 < h < 0$.
Se $h > 0$ allora, essendo $1 < (1+h)^n$, in (5) si ha

$$1+h+nh(1+h)^n < 1+h(1+h)^n+nh(1+h)^n < 1+(n+1)h(1+h)^n.$$

Se invece $-1 < h < 0$ allora $(1+h)^n < 1$ da cui, essendo $h < 0$, $h < h(1+h)^n$, quindi in (5) si ha

$$\begin{aligned} &1+h+nh(1+h)^n < 1+h(1+h)^n+nh(1+h)^n = \\ &= 1+h(1+h)^n(n+1) = 1+(n+1)h(1+h)^{n+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

$\square$

Esercizio 1.

Se $p,\, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p > q \geq 1$, $x > 0$ e $x \neq 1$ allora

$$\frac{x^p-1}{p} > \frac{x^q-1}{q}. \tag{7}$$

Dimostrazione. I) Siano $q = 1$ e $p \geq 2$

$$x^p - 1 > p(x-1) \iff \frac{x^p - 1}{p} > x - 1 = \frac{x^q - 1}{q}.$$

II) Siano $p > q > 1$

$$\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q} \iff q(x^p - 1) - p(x^q - 1) > 0 \tag{8}$$

Per verificare la diseguaglianza sopra minoriamo il termine con una quantitá positiva che determiniamo mediante opportune trasformazioni algebriche dell'espressione:

$$q(x^p - 1) - p(x^q - 1) = qx^p - q - px^q + p = qx^p - qx^q + qx^q - px^q - q + p = \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

$$qx^q(x^{p-q} - 1) - (p-q)(x^q - 1), \tag{11}$$

per la diseguaglianza di Bernoulli (i), con $n = p - q$ e $h = x - 1$, abbiamo

$$x^{p-q} > 1 + (p-q)(x-1) \iff x^{p-q} - 1 > (p-q)(x-1); \tag{12}$$

mentre per la diseguaglianza di Bernoulli (ii), con $n = q$ e $h = x - 1$, risulta

$$1 + qx^{q-1}(x-1) > x^q \iff qx^{q-1}(x-1) > x^q - 1 \iff -(x^q - 1) > -qx^{q-1}(x-1). \tag{13}$$

Tenuto conto di (12) e (13) l'ultimo termine di (11) viene minorato come segue

$$qx^q(x^{p-q} - 1) - (p-q)(x^p - 1) > qx^q(p-q)(x-1) - (p-q)qx^{q-1}(x-1) =$$

$$= (x-1)(p-q)q[x^q - x^{q-1}] = (x-1)(p-q)qx^{q-1}[x-1] = (x-1)^2(p-q)qx^{q-1} > 0$$

□

Esercizio 2.

Siano $r \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, $x \neq 1$, $0 < r < 1$, allora

$$x^r - 1 < r(x-1).$$

Dimostrazione. Allo scopo di utilizzare l'Esercizio 1, poniamo $r = \frac{q}{p}$ Dato che $0 < r < 1$ risulta $\frac{1}{r} > 1$, quindi $p > q$. Possimo quindi scrivere

$$x^r - 1 < r(x-1) \iff \left[(x^{\frac{1}{p}})^q - 1\right] < \frac{q}{p}(x^{\frac{1}{p}})^p - 1 \iff$$

$$\iff \left[(x^{\frac{1}{p}})^q - 1\right]\frac{p}{q} < (x^{\frac{1}{p}})^p - 1 \iff \frac{(x^{\frac{1}{p}})^q - 1}{q} < \frac{(x^{\frac{1}{p}})^p - 1}{p}.$$

L'ultima diseguaglianza é vera per quanto dimostrato nell'Esercizio 1 □

Diseguaglianza di Young

Siano a, $b \in \mathbb{R}^+$, r, $s \in \mathbb{Q}$ tali che $r + s = 1$, allora se $0 < r < 1$ vale la seguente diseguaglianza

$$a^r\ b^s \ \leq\ r\,a\ +\ s\,b. \tag{14}$$

Dimostrazione. Segue dalla diseguaglianza provata nell'Esercizio 2 prendendo $x = \frac{a}{b}$:

$$\frac{a^r}{b^r} - 1 \, < \, r\left(\frac{a}{b} - 1\right) \iff \frac{a^r}{b^r} \, < \, 1 + r\left(\frac{a}{b} - 1\right).$$

Moltiplico primo e secondo membro per $b^s b^r = b^{s+r} = b$ (perché $s + r = 1$):

$$b^s\, a^r \, < \, b^s\, b^r \, + \, r\, a\, \frac{b^s\, b^r}{b} \, - \, r\, b^s\, b^r \, = b + ra - rb = (1-r)b + ra = ra + sb.$$

□

Maggiorazione della media geometrica con la media aritmetica

Siano $x_1, \ldots, x_n \, \geq \, 0$. Allora per ogni $n \geq 2$ vale la maggiorazione

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \, \leq \, \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \tag{15}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione.
Per $n = 2$ é vera, infatti

$$\sqrt{x_1\, x_2} \, < \, \frac{x_1 + x_2}{2} \iff 4x_1x_2 < x_1^2 + x^2 + 2x_1x_2 \iff 0 < x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2. \tag{16}$$

Induttivitá.
Dobbiamo dedurre da

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \, \leq \, \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \tag{17}$$

la maggiorazione

$$\sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1}} \, \leq \, \frac{x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1}. \tag{18}$$

Per questo procediamo come segue

$$\sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1}} \, = \, \sqrt[n+1]{x_1 \cdots x_n} \, \cdot \, \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \, = \, (\, \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n})^{\frac{n}{n+1}} \, x^{\frac{1}{n+1}} \, \leq$$

(applichiamo la diseguaglianza di Young con

$r = \dfrac{n}{n+1}$, $s = \dfrac{1}{n+1}$, $a = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$, $b = x_{n+1}$)

$$\leq \, \frac{n}{n+1} \, \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \, + \, \frac{1}{n+1}\, x_{n+1} \leq$$

(per l'ipotesi induttiva)

$$\leq \, \frac{n}{n+1} \, \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \, + \, \frac{1}{n+1}\, x_{n+1} \, = \, \frac{x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1}.$$

□

Illustro ora la dimostrazione proposta da Cauchy (Oeuvres Complétes 1897). Questa si compone di due passi:

I passo: verificare la diseguaglianza per $n = 2^m$, $m \geq 2$;

II passo: verificare la diseguaglianza per $n \neq 2^m$, $m \geq 2$.

Il primo passo di questa si svolge per induzione, mentre il secondo utilizza il primo.
Iniziamo con l'osservare che la diseguaglianza (1) é equivalente alla seguente

$$x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right)^n \tag{19}$$

Quindi provare il primo passo vuol dire provare per ogni $m \geq 2$

$$x_1 \cdots x_{2^m} \leq \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^m}}{2^m} \right)^{2^m} \tag{20}$$

Procediamo per induzione. Sia $m = 2$, possiamo scrivere, per comoditá (20) nella forma seguente

$$A\,B \ < \ \left(\frac{A \, + \, B}{2} \right)^2 . \tag{21}$$

La dimostrazione é ovvia perché basta sviluppare il quadrato e semplificare (é la dimostrazione di (16)). Per dimostrare l'induttivitá supponiamo che (20) sia vera nel caso in cui abbiamo 2^{m-1} termini (ipotesi induttiva) e la proviamo nel caso di 2^m termini. Per fare questo oltre l'ipotesi induttiva utilizziamo (21). Infatti spezziamo il prodotto al primo membro di (20) in due parti contenenti lo stesso numero di fattori, perché esso é costituito da un numero pari di termini.([1]) Per questo poniamo

$$A = (x_1 \cdots x_{2^{m-1}}) \, , \quad B = (x_{2^{m-1}+1} \cdots x_{2^m}) \, . \tag{22}$$

Per l'ipotessi induttiva, ovvero la maggiorazione applicata a 2^{m-1} termini, possiamo scrivere

$$(x_1 \cdots x_{2^{m-1}}) \ (x_{2^{m-1}+1} \cdots x_{2^m}) \leq \left(\tfrac{x_1 + \ldots + x_{2^{m-1}}}{2^{m-1}} \right)^{2^{m-1}} \ \left(\tfrac{x_{2^{m-1}+1} + \ldots + x_{2^m}}{2^{m-1}} \right)^{2^{m-1}} =$$

il secondo membro si puó scrivere

$$= \left[\frac{1}{2^{2m-2}} \ (x_1 + \ldots + x_{2^{m-1}}) \, (x_{2^{m-1}+1} + \ldots + x_{2^m}) \right]^{2^{m-1}} \leq$$

(per la maggiorazione (21)

$$\left[\frac{1}{2^{2m-2}} \ \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2^{m-1}} + x_{2^{m-1}+1} + \ldots + x_{2^m}}{2} \right)^2 \right]^{2^{m-1}} = \tag{23}$$

$$\left[\frac{1}{2^{2m-2}} \ \frac{(x_1 + \ldots + x_{2^{m-1}} + x_{2^{m-1}+1} + \ldots + x_{2^m})^2}{2^2} \right]^{2^{m-1}} =$$

$$= \left[\frac{x_1 + \ldots + x_{2^{m-1}} + x_{2^{m-1}+1} + \ldots + x_{2^m}}{2^m} \right]^{2^m} .$$

Che é quanto volevamo dimostrare.

[1] Si osservi che la metá di 2^m é 2^{m-1}.

Utilizziamo quanto abbiamo dimostrato quanto abbiamo dimostrato per provare la maggiorazione se $n \neq 2^m$. Per fare questo poniamo

$$K = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}. \tag{24}$$

Sia m grande abbastanza in modo che $n < 2^m$. Applichiamo la maggiorazione provata in precedenza per 2^m fattori al prodotto costituito dagli n fattori dati, ovvero $x_1 \cdots x_n$ moltiplicati per $2^m - n$ fattori tutti uguali a K, ovvero consideriamo:

$$x_1 \cdots x_n \cdot \overbrace{K \cdots K}^{(2^m - n) fattori},$$

questo prodotto puó essere quindi maggiorato mediante (20) nel modo seguente

$$\begin{aligned} & x_1 \cdots x_n \cdot \overbrace{K \cdots K}^{(2^m - n) fattori} \leq \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n + (2^m - n)K}{2^m} \right)^{2^m} = \\ & = \left(\frac{n \, \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} + (2^m - n)K}{2^m} \right)^{2^m} = \\ & \text{(tenuto conto di (24))} \\ & \left(\frac{n \, K + (2^m - n)K}{2^m} \right)^{2^m} = K^{2^m}. \end{aligned} \tag{25}$$

Da questa, essendo $\overbrace{K \cdots K}^{(2^m - n) fattori} = K^{2^m - n}$, otteniamo infine

$$x_1 \cdots x_n \cdot K^{2^m - n} \leq K^{2^m} \iff \frac{x_1 \cdots x_n}{K^n} \leq 1 \iff x_1 \cdots x_n \leq K^n = \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \right)^n.$$