Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia

ANALISI MATEMATICA I

Prova scritta del 14 gennaio 2012

FILA 1

Esporre il procedimento di risoluzione degli esercizi in maniera chiara e leggibile.
Allegare il presente foglio allo scritto.

(1) (**Punti 6**). Dimostrare la seguente identità:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k\, 2^{k-1} \,+\, 2^k\right) = (2^n - 1)\,(n+1) \,+\, n.$$

(2) (**Punti 15**). Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^3+1} \,-\, 3x,$$

determinare

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

(3) (**Punti 6**). Calcolare del seguente integrale:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x \,+\, 6\,\sin x \,+\, 13}\; dx$$

(4) (**Punti 6**). Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) - 5u'(t) + 6u(t) \;=\; 0, \\ u(0) \,=\, 5, \\ u'(0) \,=\, 0. \end{cases}$$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI

(1) Dimostrare la seguente identità:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k\, 2^{k-1} \,+\, 2^k\right) = (2^n - 1)\,(n+1) \,+\, n.$$

Svolgimento.
Utilizziamo il Principio di Induzione.
Per $n = 1$ é banalmente verificata perché $1\,2^0 + 2^1 = (2^1 - 1)(1+1) + 1$.
Verifichiamo l'induttivitá della proposizione. Ovvero deduciamo dall'identitá (ipotesi induttiva)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k\, 2^{k-1} \,+\, 2^k\right) = (2^n - 1)\,(n+1) \,+\, n, \tag{1}$$

la seguente identitá

$$\sum_{k=1}^{n+1} \left(k\, 2^{k-1} \,+\, 2^k\right) = \left(2^{n+1} - 1\right)(n+2) \,+\, n+1. \tag{2}$$

Per questo esplicitiamo nella sommatoria sopra al primo membro il termine $(n+1)-$esimo utilizzzando l'ipotesi induttiva (1)

$$\sum_{k=1}^{n} \left(k\, 2^{k-1} \,+\, 2^k\right) + (n+1)2^n + 2^{n+1} = (2^n - 1)\,(n+1) \,+\, n + (n+1)2^n + 2^{n+1} =$$

$$= 2^n(n+1) - n - 1 + n + (n+1)2^n + 2^{n+1} = 2\;\; 2^n(n+1) + 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1}(n+2) - 1.$$

Il secondo membro di (2) diventa

$$\left(2^{n+1} - 1\right)(n+2) \,+\, n+1 = 2^{n+1}(n+2) - n - 2 + n + 1 = 2^{n+1}(n+2) - 1.$$

L'identitá é quindi verificata.

(2) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{2x^3 + 1} \,-\, 3x,$$

determinare

(a) campo di esistenza, comportamento agli estremi del c.e., eventuali asintoti;

(b) eventuali punti di massimo o di minimo relativo, intervalli di monotonia;

(c) intervalli di concavità o convessità.

Tracciare un grafico approssimato di f.

Svolgimento.
Il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R}$.
Calcoliamo i limiti della funzione per x che tende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{2 - \frac{1}{x^3}} \,-\, 3\right) = \mp\infty.$$

Vediamo se esistono asintoti all'infinito.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{2-\frac{1}{x^3}} - 3\right)\frac{1}{x} = \sqrt[3]{2} - 3.$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{2x^3+1} - 3x - [\sqrt[3]{2} - 3]x = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{2x^3+1} - \sqrt[3]{2}\,x =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{2}\,x\left[\sqrt[3]{1+\frac{1}{2x^3}} - 1\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{2}\,x\left[1+\frac{1}{3}\frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 1 = 0\right]$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo applicato lo sviluppo $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$, con $t = \frac{1}{2x^3}$ e $\alpha = \frac{1}{3}$.
Quindi la funzione ammette come asintoto per x che tende a $\pm\infty$ la retta di equazione

$$y = [\sqrt[3]{2} - 3]x.$$

Determiniamo ora gli intervalli di monotonia e gli eventuali massimi e minimi relativi calcolando la derivata prima.

$$f'(x) = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}} - 3.$$

Da cui segue che $f'(x) > 0$ per i valori di x che risolvono la disequazione $2x^2 - 3\sqrt[3]{(2x^3+1)^2} > 0$. Ossia $100x^6 + 108x^3 + 27 < 0$, dove ponendo $s = x^3$ ci riconduciamo alla disequazione di secondo grado $100s^2 + 108s + 27 < 0$ le cui soluzioni sono

$$s_{1,2} = \frac{-27 \pm 3\sqrt{6}}{50}.$$

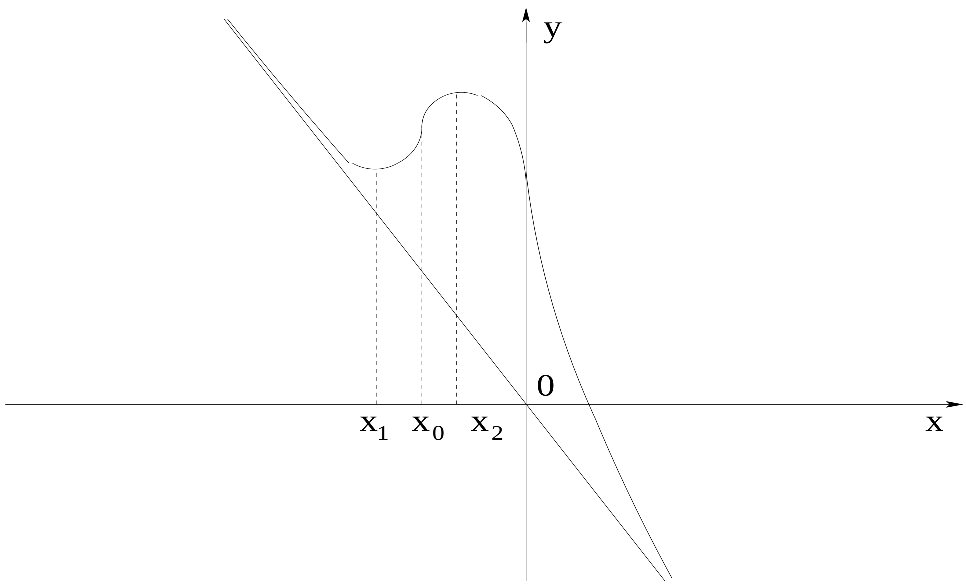
Dunque $100s^2 + 108s + 27 < 0$ per $\frac{-27-3\sqrt{6}}{50} < s < \frac{-27+3\sqrt{6}}{50}$. Tornando alla posizione fatta sopra in definitiva si ha che $f'(x) > 0$ per $\sqrt[3]{\frac{-27-3\sqrt{6}}{50}} < x < \sqrt[3]{\frac{-27+3\sqrt{6}}{50}}$. f' risulta negativa fuori di questo intervallo. Da tutto questo, tenuto conto dei teoremi riguardanti la relazione tra segno della derivata prima e monotonia della funzione, possiamo concludere che
f é crescente sull'intervallo $\sqrt[3]{\frac{-27-3\sqrt{6}}{50}} < x < \sqrt[3]{\frac{-27+3\sqrt{6}}{50}}$, mentre é decrescente fuori di esso. Di conseguenza i punti $x_1 = \sqrt[3]{\frac{-27-3\sqrt{6}}{50}}$ e $x_2 = \sqrt[3]{\frac{-27+3\sqrt{6}}{50}}$, dove si annulla f' sono, rispettivamente,di minimo e di massimo relativo.
Si osservi che nel punto $x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ la funzione derivata non é definita. In particolare si ha che

$$\lim_{x\to-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} f'(x) = +\infty.$$

Da questo deduciamo che la tangente al grafico di f in $x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ é verticale.
Per determinare gli intervalli di convessitá o concavitá di f calcolando f''.

$$f''(x) = \frac{4x}{\sqrt[3]{(2x^3+1)^5}}.$$

Si vede facilmente che $f''(x) > 0$ per $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ e per $x > 0$, mentre $f''(x) < 0$ per $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$.
Ne segue che f é convessa negli intervalli $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ e $(0, +\infty)$, concava nell'intervallo $\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$. Il punto $x = 0$, dove si annulla f'', risulta essere di flesso dato che per $x > 0$, $f''(x) > 0$, mentre $f''(x) < 0$ in un suo intorno sinistro.
Tenuto conto di quanto osservato possiamo tracciare il grafico di f.



(3) Calcolare del seguente integrale:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x \,+\, 6\,\sin x \,+\, 13}\; dx$$

Effettuiamo il cambiamento di variabile $t = \sin x$, quindi $dt = \cos x\; dx$, da cui sotituendo nell'intergale

$$\int \frac{1}{t^2 \,+\, 6\,t \,+\, 13}\; dt.$$

Ci siamo ricondotti all'integrale di una funzione razionale. Le radici del denominatore sono $t_{1,2} = -3 \pm 2i$. Possiamo quindi scrivere

$$t^2 + 6t + 13 = [t - (-3 + 2i)][t - (-3 - 2i)] = [(t + 3) - 2i][(t + 3) + 2i] = [(t + 3)^2 + 4].$$

Da cui

$$\int \frac{1}{t^2 \,+\, 6\,t \,+\, 13}\; dt = \int \frac{1}{4 + (t+3)^2}\; dt \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \left(\frac{t+3}{2}\right)^2}\; dt.$$

Effettuiamo un ulteriore cambio di variabile ponendo

$$s = \frac{t+3}{2}, \quad ds = \frac{1}{2}\, dt.$$

L'integrale da calcolare diventa

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+s^2}\; ds \;=\; \frac{1}{2}\arctan s + C.$$

Tenuto conto della posizioni fatte in precedenza si ha

$$\left[\frac{1}{2}\arctan s + C\right]_{s=\frac{t+3}{2}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{t+3}{2} + C.$$

Tenuto conto della sostituzione di partenza si ha infine

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x \,+\, 6\,\sin x \,+\, 13}\; dx \;=\; \frac{1}{2}\arctan\frac{\sin x + 3}{2} + C.$$

(4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) - 5u'(t) + 6u(t) & = & 0, \\ \\ u(0) \; = \; 5, \\ \\ u'(0) \; = \; 0. \end{cases}$$

Svolgimento.
Calcoliamo una base delle soluzioni dell'equazione omogenea ediante il metodo del polinomio caratteristico.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Le soluzioni sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Lo spazio vettoriale V_0 delle soluzioni dell'equazione omogenea é dato da

$$V_0 = \{C_1 \, e^{2t} + C_2 \, e^{3t}, \; \mathbb{C}_1, \; C_2 \in \mathbb{C}\}$$

Osservato che

$$u'(t) = 2 \, C_1 \, e^{2t} + 3 \, C_2 \, e^{3t},$$

imponiamo la verifica delle condizioni iniziali per calcolare C_1, C_2 ed otteniamo il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5, \\ \\ 2C_1 + 3C_2 = 0. \end{cases}$$

Da questo ricaviamo $C_2 = -10$, $C_1 = 15$. Quindi la soluzione del Problema di Cauchy assegnato é la funzione

$$u(t) = -10 \, e^{3t} + 15 \, e^{2t}.$$