ANALISI MATEMATICA PER IL CdL IN INFORMATICA

ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI

Risolvere le seguenti disequazioni: ([1])

$$1)\ \begin{cases} 6x-3<2x+1 \\ 4x+4\le x-6 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 3x+1>2x-3 \\ 4x-6\le 3x-10 \end{cases}$$

$$3)\ \frac{x-4}{x-1}>2; \quad 4)\ \frac{2x-5}{6x+1}\ge 3; \quad 5)\ \frac{4x+6}{3x+1}\ge 0; \qquad 6)\ \begin{cases} \frac{x}{x-1}>2 \\ \\ \frac{x-1}{x-2}\ge 0 \end{cases}$$

$$7)\ 3|x|-2>4x+1; \quad 8)\ 4-5|x-1|<1-2|x+2|$$

$$9)\ \frac{x+|x|}{2x}=1; \quad 10)\ \frac{x-|x|}{2x}=0; \quad 11)\ \frac{|x|-2x}{x+1}=1;$$

$$12)\ \frac{x}{|x|}+\frac{|x|}{x}=-2; \quad 13)\ \frac{x}{|x|}+\frac{|x|}{x}=2$$

$$14)\ \begin{cases} 2|x-1|-2<4|x| \\ 3x-2>x-7; \end{cases} \qquad 15)\ \frac{|x-1|}{x+4}\ge\frac{|x-4|}{x-2}$$

Determinare al variare di $a\in\mathbb{R}$ le soluzioni:

$$16)\ ax\ge 2; \quad 17)\ \frac{ax-1}{x+2}\ge 0; 18)\ \begin{cases} \frac{x-1}{2x+1}\le 2 \\ \\ x^2-5x+6=0 \end{cases};$$

$$19)\ \begin{cases} \frac{3x-1}{x+2}\le 4 \\ \\ x^2+(1-a)x-a=0 \end{cases}; 20)\ \frac{1}{x+1}>\frac{x}{x^2-1}; 21)\ \frac{|x^2-4|+3}{3x+1}\ge 1;$$

$$22)\ |x^2-x-6|\ge|5x+10|; \quad 23)\ x^7-x\ge 0;$$

$$24)\ x^2+1-\frac{|x|}{|x|+1}\ge 0; \quad 25)\ \frac{2x^2+1}{x^2+1}+\frac{3x^2+5}{x^2+x+1}\ge 0;$$

26) Dimostrare che:

$$ab\le\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \forall a,b,\in\mathbb{R},\forall\varepsilon>0.$$

27) Dimostrare che se $a\ge 1$ e $0\le b\le 1$ allora: $(a+b)-ab\ge 1$.

28) Determinare per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ la seguente diseguaglianza è verificata per ogni x reale:

$$\frac{k|x|+1}{|x|+1}-\frac{1}{x^4+1}\ge 0$$

$$29)\ x-3\ge\sqrt{|x|x-10}; \quad 30)\ \sqrt{\frac{x+1}{x+4}}\ge 4; \quad 31)\ \sqrt{x^2-1}\ge -1;$$

$$32)\ \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}>1; \quad 33)\ \frac{|x|-2}{\sqrt{x+1}}\le\sqrt{x-1}; \quad 34)\ \frac{|x-1|^2-1}{\sqrt{(x-1)^2-4}}\ge|x-1|;$$

$$35)\ \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}\ge 0.$$

[1] Le soluzioni sono a pagina 2, lo svolgimento a partire da pagina 3.

SCHEMA RIASSUNTIVO DELLA RISOLUZIONE DELLE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Siano F e G due funzioni definite in $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$.

(I) Le soluzioni della disequazione:

$$\sqrt{F(x)} \geq G(x)$$

sono date dall'unione delle soluzioni dei sistemi seguenti:

$$\begin{cases} F(x) \geq 0 \quad \text{(realtà della radice)} \\ G(x) \geq 0 \\ F(x) \geq [G(x)]^2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} F(x) \geq 0 \quad \text{(realtà della radice)} \\ G(x) \leq 0 \end{cases}$$

(II) Le soluzioni della disequazione:

$$\sqrt{F(x)} \leq G(x)$$

si trovano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} F(x) \geq 0 \quad \text{(realtà della radice)} \\ G(x) \geq 0 \\ F(x) \leq [G(x)]^2 \end{cases}$$

III) Radice con esponente dispari:

$$\sqrt[3]{F(x)} > G(x) \iff F(x) > [G(x)]^3,$$

oppure

$$\sqrt[3]{F(x)} < G(x) \iff F(x) < [G(x)]^3.$$

RISPOSTE

1)$x \leq -\frac{10}{3}$; **2)**$\emptyset$; **3)**$-2 < x < 1$; **4)**$-\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{6}$;
5)$-\frac{1}{3} < x$ oppure $x \leq -\frac{3}{2}$; **6)**$\emptyset$; **7)**$x < -\frac{3}{7}$; **8)**$x < -\frac{2}{7}$; oppure $x \geq 4$;
9)$x > 0$; **10)**$x > 0$; **11)**$x = -\frac{1}{4}$; **12)**$x < 0$; **13)**$x > 0$; **14)**$\{x : x > -\frac{5}{2}, x \neq 0\}$. **15)**$\{x : -4 < x$ oppure $x \geq \frac{7}{2}\}$. **16)**Se $a > 0$ allora $x \geq \frac{2}{a}$, se $a < 0$ allora $x \leq \frac{2}{a}$.**17)**Vedi la risoluzione nelle pagine succesive. **18)**$\{2, 3\}$ **19)**$x_{1,2} = \frac{a-1 \pm \sqrt{(a+1)^2}}{2}$, per $a > -2$. **20)**$\{x : -1 < x < 1\}$. **21)**$\{x : x < -2,\ o\,, -\frac{1}{3} < x \leq 2\} \cup \{x : \frac{3+\sqrt{17}}{2} \leq x\}$ **22)**$\{x : x \geq 8 \quad \text{oppure} \quad x = -2\}$ **23)**$\{x : x \geq 1 \quad \text{oppure} \quad -1 \leq x \leq 0\}$. **24)**$\mathbb{R}$ **25)**$\mathbb{R}$ **26)** **27)** **28)**$k \geq 1$. **29)**$\{\sqrt{10} \leq x \leq \frac{19}{6}\}$ **30)**$\{-\frac{21}{5} < x < -4\}$ **31)**$\{x \geq 1, x \leq -1\}$ **32)**$\{x > 0, x \neq 1\}$ **33)**$\left[-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup [-2, -1] \cup [1, 2] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$; **34)**$\{x > 3,\ x < -1\}$; **35)** $\{x : x = -1 \text{ oppure } x \geq 2\}$.

SVOLGIMENTO DEGLI ESERCIZI

$$\mathbf{1}) \begin{cases} 4x < 4 \\ 3x \leq -10 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ x \leq -\frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow x \leq -\frac{10}{3}$$

$$\mathbf{2}) \begin{cases} x > -4 \\ x \leq -4 \end{cases}$$

Questo sistema non ha soluzioni.

$$\mathbf{3}) \ \frac{x-4}{x-1} - 2 > 0 \iff \frac{x-4-2(x-1)}{x-1} > 0 \iff \frac{-2-x}{x-1} > 0$$

Le soluzioni si ottengono risolvendo i sistemi:

$$\begin{cases} -2-x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -2-x < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

Da cui segue:

$$\begin{cases} x < -2 \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -2 < x \\ x < 1 \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni, mentre il secondo ha come soluzioni:

$$\{x : \ -2 < x < 1\}.$$

$$\mathbf{4}) \ \frac{2x-5}{6x+1} \geq 3 \iff \frac{2x-5}{6x+1} - 3 \geq 0 \iff \frac{2x-5-3(6x+1)}{6x+1} \geq 0 \iff$$

$$\iff \frac{-16x-8}{6x+1} \geq 0$$

Risolvere questa disequazione equivale a risolvere i sistemi:

$$\begin{cases} -16x-8 \geq 0 \\ 6x+1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -16x-8 \leq 0 \\ 6x+1 < 0 \end{cases}$$

Da cui segue:

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \\ x < -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni. Le soluzioni della disequazione di partenza sono date da quelle del secondo sistema, ossia:

$$\{x : -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{6}\}.$$

$$\mathbf{5}) \ \frac{4x+6}{3x+1} \geq 0$$

Risolvere la disequazione data equivale a risolvere i sistemi:

$$\begin{cases} 4x+6 \geq 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 4x+6 \leq 0 \\ 3x+1 < 0 \end{cases}$$

O equivalentemente:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni $\{x : x > -\frac{1}{3}\}$, il secondo $\{x : x \leq -\frac{3}{2}\}$. La disequazione data ha quindi soluzioni:

$$\{x : x > -\frac{1}{3}\} \cup \{x : x \leq -\frac{3}{2}\}.$$

$$\mathbf{6)}\ \begin{cases} \frac{x}{x-1} > 2 \\ \\ \frac{x-1}{x-2} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{-x+2}{x-1} > 0 \\ \\ \frac{x-1}{x-2} \geq 0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema dobbiamo risolvere ciascuna delle due disequazioni che lo compongono e poi intersecare gli insiemi di soluzioni cosìottenuti.
Considero la prima disequazione: $\frac{-x+2}{x-1} > 0$, equivale ai sistemi:

$$\begin{cases} -x+2 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -x+2 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

Il primo ha soluzioni $\{x : 1 < x < 2\}$, il secondo non ha soluzione. La prima disequazione ha soluzioni: $\{x : 1 < x < 2\} \cup \emptyset = \{x : 1 < x < 2\}$ Considero la seconda disequazione: $\frac{x-1}{x-2} \geq 0$, equivale ai sistemi:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x-2 < 0 \end{cases}$$

Il primo ha soluzioni $\{x : x > 2\}$, il secondo $\{x : x \leq 1\}$. Quindi la disequazione: $\frac{x-1}{x-2} \geq 0$ ha soluzioni: $\{x : x > 2\} \cup \{x : x \leq 1\}$.
Il sistema proposto non ha soluzioni perchè:

$$\{x : 1 < x < 2\} \cap (\{x : x > 2\} \cup \{x : x \leq 1\}) = \emptyset.$$

7) $3|x| - 2 > 4x + 1$.
Per risolvere la disequazione proposta si deve "togliere" il valore assoluto che compare nell'espressione distingendo il caso in cui x è positivo da quello in cui x è negativo. Questo equivale a risolvere i sistemi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x - 2 > 4x + 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -3x - 2 > 4x + 1 \end{cases}$$

Ossia

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x < -3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x < -\frac{3}{7} \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni, mentre il secondo è risolto da:
$\{x : x < -\frac{3}{7}\}$.
8) $4 - 5|x - 1| < 1 - 2|x + 2|$.
Per risolvere la disequazione, applichiamo la definizione di valore assoluto ottenendo i seguenti sistemi:

$$(I) \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 4 - 5(x-1) < 1 - 2(x+2) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II) \begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 4 + 5(x-1) < 1 - 2(x+2) \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 < 0 \\ 4 - 5(x-1) < 1 + 2(x+2) \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (IV) \begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 < 0 \\ 4 + 5(x-1) < 1 + 2(x+2) \end{cases}$$

$$(I) \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ x > 4 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II) \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -2 \\ x < -\frac{2}{7} \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -2 \\ x > \frac{4}{7} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (IV) \begin{cases} x < 1 \\ x < -2 \\ x < 2 \end{cases}$$

Le soluzioni sono date dalle soluzioni dei quattro sistemi: $\{x : x \geq 4\} \cup \{x : -2 \leq x < -\frac{2}{7}\} \cup \emptyset \cup \{x : x < -2\}$ $= \{x : x < -\frac{2}{7} \text{ oppure } x \geq 4\}$.
9) $\frac{x+|x|}{2x} = 1$.

$$(I)\begin{cases} x > 0 \\ \frac{x+x}{2x} = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II)\begin{cases} x < 0 \\ \frac{x-x}{2x} = 1 \end{cases}$$

Questi sistemi sono equivalenti ai seguenti:

$$(I)\begin{cases} x > 0 \\ \frac{2x}{2x} = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II)\begin{cases} x < 0 \\ \frac{0}{2x} = 1 \end{cases}$$

Il sistema (II) non ha soluzioni, mentre (I) ha soluzioni $\{x : x > 0\}$, che sono anche le soluzioni dell'equazione di partenza.

10) $\frac{x-|x|}{2x} = 0$.

$$(I)\begin{cases} x > 0 \\ \frac{x-x}{2x} = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II)\begin{cases} x < 0 \\ \frac{x+x}{2x} = 0 \end{cases}$$

Questi sistemi sono equivalenti ai seguenti:

$$(I)\begin{cases} x > 0 \\ \frac{0}{2x} = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II)\begin{cases} x < 0 \\ \frac{2x}{2x} = 0 \end{cases}$$

Il sistema (II) non ha soluzioni, mentre (I) ha soluzioni $\{x : x > 0\}$, che sono anche le soluzioni dell'equazione di partenza.

11) $\frac{|x|-2x}{x+1} = 1$.

$$(I)\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x-2x}{x+1} = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II)\begin{cases} x < 0 \\ \frac{-x-2x}{x+1} = 1 \end{cases}$$

Questi sistemi sono equivalenti ai seguenti:

$$(I)\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{-x}{x+1} = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II)\begin{cases} x < 0 \\ \frac{-3x}{x+1} = 1 \end{cases}$$

Il sistema (I) non ha soluzioni, mentre il sistema (II) ha soluzione $x = -\frac{1}{4}$ che è anche la soluzione dell'equazione di partenza.

12) $\frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x} = -2$.

Per risolvere l'equazione applichiamo la definizione di valore assoluto ottenendo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{x}{x} + \frac{x}{x} = -2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{x}{-x} + \frac{-x}{x} = -2 \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni, il secondo ha invece soluzioni: $\{x : x < 0\}$, che sono anche le soluzioni dell'equazione di partenza.

13) $\frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x} = 2$.

Per risolvere l'equazione applichiamo la definizione di valore assoluto ottenendo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{x}{x} + \frac{x}{x} = 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ \frac{x}{-x} + \frac{-x}{x} = 2 \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzioni, il primo ha invece soluzioni: $\{x : x > 0\}$, che sono anche le soluzioni dell'equazione di partenza.

14) $\begin{cases} 2|x-1| - 2 < 4|x| \\ 3x - 2 > x - 7 \end{cases}$

Per risolvere il sistema dato esplicitiamo il valore assoluto riconducendoci alla risoluzione dei quattro sistemi seguenti.

$$(I) \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 2(x-1)-2 < 4x \\ 3x-2 > x-7 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II) \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x < 0 \\ 2(x-1)-2 < -4x \\ 3x-2 > x-7 \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ x \geq 0 \\ -2(x-1)-2 < 4x \\ 3x-2 > x-7 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (IV) \begin{cases} x-1 < 0 \\ x < 0 \\ -2(x-1)-2 < -4x \\ 3x-2 > x-7 \end{cases}$$

Che equivalgono ai seguenti:

$$(I) \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 0 \\ x > -2 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II) \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 0 \\ x < \frac{2}{3} \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 0 \\ 0 < 6x \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (IV) \begin{cases} x < 1 \\ x < 0 \\ 2x < 0 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Questi sistemi hanno soluzione rispettivamente:
I)$\{x : x \geq 1\}$, II)$\emptyset$, III) $\{x : 0 < x < 1\}$, IV) $\{x : -\frac{5}{2} < x < 0\}$. Da cui segue che il sistema di partenza ha soluzioni: $\{x : x > -\frac{5}{2}, x \neq 0\}$.

15) $\frac{|x-1|}{x+4} \geq \frac{|x-4|}{x-2}$. Per quanto riguarda il valore assoluto, procediamo come negli esercizi, distinguendo i casi seguenti:

$$(I) \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ \frac{x-1}{x+4} \geq \frac{x-4}{x-2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II) \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-4 < 0 \\ \frac{x-1}{x+4} \geq -\frac{x-4}{x-2} \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-4 \geq 0 \\ -\frac{x-1}{x+4} \geq \frac{x-4}{x-2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (IV) \quad \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-4 < 0 \\ -\frac{x-1}{x+4} \geq -\frac{x-4}{x-2} \end{cases}$$

Risolviamo i quattro sistemi ottenuti. Le soluzioni di partenza saranno date dall'unione delle soluzioni di I), II), III), IV).
Svolgimento del sistema I).

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 4 \\ \frac{x-1}{x+4} - \frac{x-4}{x-2} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 4 \\ \frac{(x-1)(x-2)-(x-4)(x+4)}{(x-2)(x+4)} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 4 \\ \frac{6-x}{(x+4)(x-2)} \geq 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della terza disequazione sono date dall'unione delle soluzioni dei sistemi seguenti:

$$(*) \quad \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ (x+4)(x-2) > 0 \end{cases} \quad \text{oppure}(**) \quad \begin{cases} 6-x < 0 \\ (x+4)(x-2) < 0 \end{cases}$$

Il sistema (*) ha soluzioni: $\{x : x < -4, \text{ oppure } 2 < x \leq 6\}$. Il sistema (**) non ha soluzioni. In conclusione le soluzioni del sistema (I) sono: $\{x : 4 \leq x \leq 6\}$
Svolgimento del sistema II).

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 4 \\ \frac{x-1}{x+4} + \frac{x-4}{x-2} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 4 \\ \frac{2x^2-3x-14}{(x+4)(x-2)} \geq 0 \end{cases}$$

La terza disequazione equivale ai sistemi:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 14 \geq 0 \\ (x+4)(x-2) > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 2x^2 - 3x - 14 \leq 0 \\ (x+4)(x-2) < 0 \end{cases}$$

le soluzioni sono:$\{x : x < -4 \text{ oppure } x \geq \frac{7}{2}\} \cup \{x : -2 \leq x < 2\}$. Intersecando queste soluzioni con quelle delle altre disequazioni del sistema II) otteniamo infine: $\{x : 1 \leq x < 2\} \cup \{x : \frac{7}{2} \leq x < 4\}$.
Svolgimento del sistema III).

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ -\frac{x-1}{x+4} \geq \frac{x-4}{x-2} \end{cases}$$

In questo caso l'intersezione tra le soluzioni delle prime due disequazioni è vuota. Il sistema III) non ha quindi soluzioni.
Svolgimento del sistema IV).

$$\begin{cases} x < 1 \\ x < 4 \\ -\frac{x-1}{x+4} + \frac{x-4}{x-2} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ x < 4 \\ \frac{-(x-1)(x-2)+x^2-16}{(x+4)(x-2)} \geq 0 \end{cases}$$

La terza disequazione del sistema è equivalente alla seguente:

$$\frac{x-6}{(x-2)(x+4)} \geq 0 \iff \begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ (x+4)(x-2) > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 6 < 0 \\ (x+4)(x-2) < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono :$\{x : x \geq 6\} \cup \{x : -4 < x < 2\}$. Il sistema IV) ha soluzioni $\{x : -4 < x < 1\}$
Concludendo: l'equazione di partenza ha come soluzioni l'unione di quelle del sistema I),II) e IV) : $\{x : x \leq 6 \text{ e } x \neq -4, x \neq 2\}$.

16) Risolviamo la disequazione dividendo entrambi i membri per a. A tale scopo distinguiamo i casi a positivo oppure a negativo, ottenenendo così le soluzioni dell'equazione proposta:

$$\begin{cases} a > 0 \\ x \geq \frac{2}{a} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a < 0 \\ x \leq \frac{2}{a} \end{cases}$$

17) Scriviamo la disequazione data nella forma che segue:

$$\frac{ax-1}{x+2} - 3(x-5) \geq 0 \iff \frac{ax - 1 - 3(x-5)(x+2)}{x+2} \geq 0.$$

Da cui:

$$\frac{-3x^2 + x(9+a) + 29}{x+2} \geq 0$$

Risolvere la disequazione data equivale a risolvere i sistemi:

$$I) \begin{cases} -3x^2 + x(9+a) + 29 \geq 0 \\ x > -2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad II) \begin{cases} -3x^2 + x(9+a) + 29 \leq 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema I). Consideriamo l'equazione: $-3x^2 + x(9+a) + 29 = 0$, le soluzioni sono: $x_{1,2} = \frac{9+a\pm\sqrt{(9+a)^2+348}}{6}$, il polinomio risulterà maggiore o uguale a zero per i seguenti valori di x (si osservi che il coefficiente del termine di secondo grado é negativo):

$$\frac{9 + a - \sqrt{(9+a)^2 + 348}}{6} \leq x \leq \frac{9 + a + \sqrt{(9+a)^2 + 348}}{6}$$

Il sistema I) ammette soluzioni se :

$$(*) \quad -2 < \frac{9 + a + \sqrt{(9+a)^2 + 348}}{6}$$

ovvero

$$-21 - a < \sqrt{(9+a)^2 + 348}$$

Risolviamo la disequazione irrazionale ottenuta risolvendo le disequazioni:

$$\begin{cases} -21 - a \geq 0 \\ (-21-a)^2 < (9+a)^2 + 348 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad -21 - a < 0$$

(la condizione di realtà della radice è banalmente verificata) sviluppiamo i quadrati e semplifichiamo:

$$\begin{cases} a \leq -21 \\ a < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad a \geq -21$$

Che sono verificate per ogni $a \in \mathbb{R}$. Il sistema I) ammette soluzioni:

$$\frac{9 + a - \sqrt{(9+a)^2 + 348}}{6} \leq x \leq \frac{9 + a + \sqrt{(9+a)^2 + 348}}{6}$$

per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$.
Consideriamo il sistema II). Poiché il polinomio di secondo grado risulta negativo per i valori di x esterni all'intervallo delle radici il sistema è ha soluzioni se:

$$\frac{9 + a - \sqrt{(9+a)^2 + 348}}{6} < -2$$

Ragionando come abbiamo fatto nella risoluzione di (*) si ottiene:$a < -\frac{1}{2}$.Quindi il sistema II) ha soluzioni:

$$\frac{9 + a - \sqrt{(9+a)^2 + 348}}{6} \leq x \leq \min \left[-2, \frac{9 + a + \sqrt{(9+a)^2 + 348}}{6} \right]$$

se $a < -\frac{1}{2}$.
18) L'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ ha soluzioni $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, che sostituite nella diseguaglianza la verificano, esse sono perciò anche le soluzioni del sistema proposto.
19) Iniziamo risolvendo la disequazione che compare nel sistema:

$$\frac{3x - 1}{x + 2} - 4 \leq 0 \iff \frac{-x - 9}{x + 2} \leq 0$$

Ovvero risolviamo i sistemi:

$$\begin{cases} -x - 9 \leq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -x - 9 \geq 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono $\{x : x > -2\}$, mentre del secondo sono $\{x : x \leq -9\}$.
Risolviamo l'equazione: $x^2 + (1-a)x - a = 0$. Le radici sono:

$$x_1 = \frac{a - 1 - \sqrt{(a+1)^2}}{2}, \quad x_2 = \frac{a - 1 + \sqrt{(a+1)^2}}{2}$$

Determiniamo per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le radici cadono nell'insieme delle soluzioni della disequazione: $\{x : x \leq -9\} \cup \{x : -2 < x\}$. Piú precisamente deve essere:

$$i) \quad -2 < x_1$$

oppure

$$ii) \quad x_2 \leq -9.$$

Risolviamo i):

$$-2 < \frac{a - 1 - \sqrt{(a+1)^2}}{2} \iff |a + 1| < a + 3$$

$$I)\begin{cases} a+1\geq 0 \\ a+1<a+3 \end{cases} \quad \text{oppure } II)\begin{cases} a+1<0 \\ -a-1<a+3 \end{cases}$$

Il sistema I) ha soluzioni: $\{a : a \geq -1\}$; il sistema II) ha soluzioni: $\{a : -2 < a < -1\}$. Le radici cadono nell'intervallo:$(-2, +\infty)$ se $a > -2$.
Risolviamo ii):

$$\frac{a-1+\sqrt{(a+1)^2}}{2} \leq -9 \iff a+|a+1| \leq -17$$

Ovvero:

$$\begin{cases} a+1\geq 0 \\ 2a+1<-17 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a+1<0 \\ a-a-1<-17 \end{cases}$$

Questi sistemi non hanno soluzioni. In conclusione, le soluzioni del sistema di partenza sono:x_1, x_2 per i valori di $a > -2$.
20) La disequazione si può scrivere nella forma:$\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-1} > 0$. Da cui, svolgendo i calcoli, si ottiene: $\frac{-1-x}{(x+1)(x-1)(x+1)} > 0$, semplificando:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} < 0$$

Il segno della diseguaglianza è determinato dal segno del polinomio di secondo grado al denominatore. Questo ha il coefficiente del termine di secondo grado che è positivo. Il segno del polinomio risulta quindi negativo per valori della x appartenti all'intervallo delimitato dalle radici: $\{x : -1 < x < 1\}$.
21) Le soluzioni della disequazione:

$$(*) \quad \frac{|x^2-4|+3}{3x+1} - 1 \geq 0$$

si ottengono risolvendo i sistemi:

$$I)\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ \frac{x^2-4+3}{3x+1} - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad II)\begin{cases} x^2-4<0 \\ \frac{-x^2+4+3}{3x+1} - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Ovvero:

$$I)\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ \frac{x^2-3x-2}{3x+1} \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad II)\begin{cases} x^2-4<0 \\ \frac{-x^2-3x+6}{3x+1} \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema I) equivale ai seguenti:

$$Ia)\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2-3x-2 \geq 0 \\ 3x+1>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad Ib)\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x^2-3x-2<0 \\ 3x+1<0 \end{cases}$$

L'equazione $x^2 - 3x - 2 = 0$ ha come radici $x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$. La disequazione $x^2 - 3x - 2 \geq 0$ risulta soddisfatta per i valori di x esterni all'intervallo delle radici.

$$Ia)\begin{cases} x \leq -2 \text{ o } 2 \leq x \\ x \leq \frac{3-\sqrt{17}}{2} \text{ o } \frac{3+\sqrt{17}}{2} \leq x \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad Ib)\begin{cases} x \leq -2 \text{ o } 2 \leq x \\ \frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Il sistema Ib) non ha soluzioni, mentre Ia) ha soluzioni:$\{x : \frac{3+\sqrt{17}}{2} \leq x\}$, che sono quindi le soluzioni del sistema I).
Risolviamo II).

$$IIa)\begin{cases} x^2-4<0 \\ -x^2-3x+6 \geq 0 \\ 3x+1>0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad IIb)\begin{cases} x^2-4<0 \\ -x^2-3x+6<0 \\ 3x+1<0 \end{cases}$$

L'equazione $-x^2 - 3x + 6 = 0$ ha radici : $x_1 = \frac{-3-\sqrt{33}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$. Il trinomio di secondo grado: $-x^2 - 3x + 6$ risulta positivo per valori della variabile x interni all'intervallo delle radici, negativo per valori della x esterni all'intervallo (il coefficiente del termine di secondo grado è negativo). Otteniamo quindi:

$$IIa)\begin{cases} -2 < x < 2 \\ \frac{-3-\sqrt{33}}{2} \leq x \leq \frac{-3+\sqrt{33}}{2} \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad IIb)\begin{cases} -2 < x < 2 \\ x < \frac{-3-\sqrt{33}}{2} \text{ o } \frac{-3+\sqrt{33}}{2} < x \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

IIa) ha soluzioni:$\{x : -\frac{1}{3} < x < \frac{-3+\sqrt{33}}{2}\}$.
IIb) ha soluzioni:$\{x : x < \frac{-3-\sqrt{33}}{2}\}$.
Le soluzioni di II) sono: $\{x : x < \frac{-3-\sqrt{33}}{2},\ o\,, -\frac{1}{3} < x \leq \frac{-3+\sqrt{33}}{2}\}$.
Concludendo, le soluzione della disequazione di partenza sono:

$$\{x : x < \frac{-3-\sqrt{33}}{2},\ o\,, -\frac{1}{3} < x \leq \frac{-3+\sqrt{33}}{2}\} \cup \{x : \frac{3+\sqrt{17}}{2} \leq x\}.$$

22) Per risolvere la disequazione dobbiamo togliere i valori assoluti che vi compaiono. Le soluzioni dell'equazione data saranno date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi che si ottengono distinguendo i casi in cui gli argomenti del valore assoluto sono negativi da quelli in cui sono positivi:

$$(I)\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ 5x + 10 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \geq 5x + 10 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II)\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ 5x + 10 < 0 \\ -x^2 + x + 6 \geq -5x - 10 \end{cases}$$

oppure

$$(III)\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ 5x + 10 \geq 0 \\ -x^2 + x + 6 \geq 5x + 10 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (IV)\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ 5x + 10 < 0 \\ x^2 - x - 6 \geq -5x - 10 \end{cases}$$

Il polinomio di secondo grado che compare nella prima disequazione dei quattro sistemi ha come radici: $x_1 = -2,\ x_2 = 3$, risulta perciò: $x^2 - x - 6 > 0$ se $x < -2$ oppure $x > 3$, mentre $x^2 - x - 6 < 0$ se $-2 < x < 3$. Otteniamo quindi:

$$(I)\begin{cases} x \geq 3 \text{ oppure } x \leq -2 \\ x \geq -2 \\ x^2 - 6x - 16 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II)\begin{cases} -2 < x < 3 \\ x < -2 \\ -x^2 + 6x + 16 \geq 0 \end{cases}$$

oppure

$$(III)\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -2 \leq x \\ -x^2 - 4x - 4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (IV)\begin{cases} x \leq -2 \text{ oppure } x \geq 3 \\ x < -2 \\ x^2 + 4x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

In ciascun sistema la terza disequazione è di secondo grado. Risolviamo ottenendo:

$$(I)\begin{cases} x \geq 3 \text{ oppure } x \leq -2 \\ x \geq -2 \\ x \leq -2 \text{ oppure } x \geq 8 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (II)\begin{cases} -2 < x < 3 \\ x < -2 \\ -2 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

oppure

$$(III)\begin{cases} x \geq 3 \text{ oppure } x \leq -2 \\ x \geq -2 \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad (IV)\begin{cases} -2 < x < 3 \\ x < -2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le soluzioni di I) sono date da $\{x : x \geq 8,\ x = -2\}$.
Le soluzioni di II) sono date da $\emptyset$.
Le soluzioni di III) sono date da $\{-2\}$
Le soluzioni di IV) sono date da $\emptyset$.
In conclusione le soluzioni della disequazione proposta sono date da:
$\{x : x \geq 8 \text{ oppure } x = -2\}$.

23) $x^7 - x \geq 0 \iff x(x^6-1) \geq 0$. Le soluzioni di questa equazione sono date dall'unione delle soluzioni dei due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^6 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x^6 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

La disequazione $x^6 - 1 \geq 0$ ha soluzioni: $\{x : x \leq -1 \quad \text{oppure} \quad x \geq 1\}$. Quindi le soluzioni del primo sistema sono: $\{x : x \geq 1\}$
La disequazione $x^6 - 1 \leq 0$ ha soluzioni $\{x : -1 \leq x \leq 1\}$. Quindi le soluzioni del secondo sistema sono : $\{x : -1 \leq x \leq 0\}$.
L'equazione data ha soluzioni : $\{x : x \geq 1 \quad \text{oppure} \quad -1 \leq x \leq 0\}$.
24) La disequazione data è equivalente alla seguente:

$$x^2 + 1 \geq \frac{|x|}{|x|+1}$$

Osserviamo che $x^2 + 1 \geq 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ e $1 \geq \frac{|x|}{|x|+1}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Da queste:

$$x^2 + 1 \geq 1 \geq \frac{|x|}{|x|+1}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dalla proprietà transitiva di "$\geq$ " segue che la diseguaglianza data è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.
25) Per risolvere la disequazione basta osservare che tutti i polinomi che compaiono sono positivi (quindi l'insieme delle soluzioni è tutto $\mathbb{R}$) infatti é evidente che:$2x^2 + 1 > 0\,,\ x^2 + 1 > 0\,,\ 3x^2 + 5 > 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ perché somma di termini positivi. Mentre $x^2 + x + 1 > 0$ perchè è una disequazione di secondo grado avente il coefficiente del termine di secondo grado positivo e il $\Delta < 0$.
26) La diseguaglianza proposta è equivalente alla seguente (si moltiplicano entrambi i membri per 2ε):

$$2\varepsilon ab \leq \varepsilon^2 a^2 + b^2$$

ossia:

$$0 \leq \varepsilon^2 a^2 + b^2 - 2\varepsilon ab = (\varepsilon a - b)^2.$$

Che è sempre vera.
27) La diseguaglianza proposta è equivalente alla seguente (porto b al secondo membro):

$$a - ab \geq 1 - b$$

Se $b = 1$ questa è vera. Sia $0 \leq b < 1$, allora

$$a(1-b) \geq 1 - b \iff a \geq 1,$$

che è vera per ipotesi. Nell'ultimo passaggio abbiamo diviso per $(1-b)$, che è positivo, si lascia quindi inalterato il verso della diseguaglianza.
28) Scriviamo la diseguaglianza nella forma:

$$(*) \quad \frac{k|x|+1}{|x|+1} \geq \frac{1}{x^4+1}$$

Se $k \geq 1$ allora da (*)segue:

$$\frac{k|x|+1}{|x|+1} \geq 1 \geq \frac{1}{x^4+1}$$

che risulta vera $\forall x \in \mathbb{R}$. Siano $k \leq 0$, e $0 < |x| < 1$. Sono verificate le seguenti diseguaglianze:

$$(**) \quad \frac{1}{x^4+1} > \frac{1}{|x|+1} \geq \frac{k|x|+1}{|x|+1}.$$

Infatti se $k \leq 0$ allora $1 > k|x| + 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mentre se $0 < |x| < 1$ allora $x^4 < |x|$. La maggiorazione (**) è la negazione della diseguaglianza (*) che dovevamo dimostrare. Sia $0 < k < 1$. La diseguaglianza data è equivalente alla seguente:

$$(|x^4| + 1)(k|x| + 1) \geq |x| + 1 \iff |x|^3(k|x| + 1) \geq (1 - k)$$

Per $x = 1 - k$ risulta falsa. Infatti sostituiamo questo valore di x nella diseguaglianza, semplifichiamo ed otteniamo:

$$|1 - k|^2(k|1 - k| + 1) \geq 1 \iff k|(1 - k)| \geq \frac{1}{|1 - k|^2} - 1$$

Da cui, essendo $0 < k < 1$ si ha $1 > |1 - k|^3 \geq 2 - k > 1$.
In conclusione (*) è verificata per ogni valore di x in $\mathbb{R}$ se $k \geq 1$.
29) Le soluzioni della diseguaglianza proposta sono date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi (vedi schema pag. 2):

$$\begin{cases} |x|x - 10 \geq 0 \quad \text{(realtà della radice)} \\ x - 3 \geq 0 \\ (x - 3)^2 \geq |x|x - 10 \end{cases}$$

Nelle disequazioni compare un valore assoluto. Distiguiamo i casi in cui il suo argomento è positivo e i casi in cui è negativo.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 10 \geq 0 \quad \text{(realtà della radice)} \\ x - 3 \geq 0 \\ (x - 3)^2 \geq x^2 - 10 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 10 \geq 0 \quad \text{(realtà della radice)} \\ x - 3 \geq 0 \\ (x - 3)^2 \geq -x^2 - 10 \end{cases}$$

IL secondo sistema non ha soluzioni perchè la disequazione: $-x^2 - 10 \geq 0$ non è mai verificata.
Consideriamo il primo sistema.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -\sqrt{10} \text{ oppure } x \geq \sqrt{10} \\ x \geq 3 \\ x \leq \frac{19}{6} \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $\{x : \sqrt{10} \leq x \leq \frac{19}{6}\}$.
30) Le soluzioni dell'equazione proposta si calcolano risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x+4} \geq 0 \quad \text{realtà della radice} \\ \frac{x+1}{x+4} \geq 16 \end{cases}$$

Questo sistema equivale ai seguenti:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 4 > 0 \\ \frac{x+1}{x+4} - 16 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ x + 4 < 0 \\ \frac{x+1}{x+4} - 16 \geq 0 \end{cases}$$

Da cui

$$I) \begin{cases} x \geq -1 \\ x > -4 \\ \frac{-15x-63}{x+4} \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad II) \begin{cases} x \leq -1 \\ x < -4 \\ \frac{-15x-63}{x+4} \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema I) equivale ai seguenti:

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x > -4 \\ -15x - 63 \geq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x > -4 \\ -15x - 63 \leq 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases}$$

Il secondo sistema non ha soluzioni, mentre il primo diventa

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -\frac{21}{5} \end{cases}$$

che non ha soluzioni.
Il sistema II) equivale ai seguenti:

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x < -4 \\ -15x - 63 \geq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ x < -4 \\ -15x - 63 \leq 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases}$$

Il primo sistema non ha soluzioni. Il secondo ha soluzioni:

$$-\frac{21}{5} \leq x < -4.$$

31) Al primo membro la radice è sempre positiva mentre il secondo membro è negativo. Quindi la diseguaglianza è verificata per tutte le $x \in \mathbb{R}$ per le quali la radice è reale, cioé: $x^2 - 1 \geq 0$ ossia $x \geq 1$ oppure $x \leq -1$.
32) Le soluzioni della disequazione proposta sono date dall'unione delle soluzioni dei seguenti sistemi:

$$I) \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} > 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad II) \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} < 0 \\ -\frac{x+1}{x-1} > 1 \end{cases}$$

Risolvere I) equivale a risolvere:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x + 1 > x - 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ x - 1 < 0 \\ x + 1 < x - 1 \end{cases}$$

Il primo ha soluzioni: $\{x : x > 1\}$, mentre il secondo non ha soluzioni perchè nella terza equazione si avrebbe: $1 < -1$.
Risolvere II) equivale a risolvere:

$$\begin{cases} x + 1 < 0 \\ x - 1 > 0 \\ -x - 1 > x - 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 1 < 0 \\ -x - 1 < x - 1 \end{cases}$$

Il primo non ha soluzioni, mentre il secono ha soluzioni: $\{x : 0 < x < 1\}$.
Concludendo, le soluzioni dell'equazione data sono: $\{x : 0 < x,\ x \neq 1\}$.
33) Risolvere l'equazione proposta equivale a risolvere i sistemi:

$$I) \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{(realtà della radice)} \\ |x| - 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq (|x| - 2)^2 \end{cases}$$

oppure

$$II) \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \quad \text{(realtà della radice)} \\ |x| - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Risolvere I) equivale a risolvere:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq x^2 - 2x + 4 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ -x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq x^2 + 2x + 4 \end{cases}$$

Da questi:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ 2x \geq 5 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1 \\ x \leq -2 \\ -5 \geq 2x \end{cases}$$
Le soluzioni di questi sistemi sono:$\{x : x \leq -\frac{5}{2}$, oppure $x \geq \frac{5}{2}\}$.
Risolvere II) equivale a risolvere:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ -x - 2 \leq 0 \end{cases}$$
da cui
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1 \\ -2 \leq x \end{cases}$$
Le soluzioni sono: $\{x : 1 \leq x \leq 2\}$, oppure $\{x : -2 \leq x \leq -1\}$.
Da quanto visto sopra otteniamo che le soluzioni della disequazione proposta sono:$\{x : x \leq -\frac{5}{2}$, oppure $x \geq \frac{5}{2}\} \cup \{x : 1 \leq x \leq 2\} \cup \{x : -2 \leq x \leq -1\}$.
34) Per semplificare la risoluzione della disequazione poniamo: $y = |x-1|$. Osserviamo che $y \geq 0$ e $|y|^2 = y^2$.
La disequazione data diventa:
$$\frac{y^2 - 1}{\sqrt{y^2 - 4}} \geq y.$$
Da cui:
$$\begin{cases} y^2 - 4 > 0 \\ y^2 - 1 \geq 0 \\ (y^2 - 1)^2 \geq y^2(y^2 - 4) \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 > 4 \\ y^2 \geq 1 \\ 2y^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$$
Ricordando che $y \geq 0$ si ha:
$$\begin{cases} y > 2 \\ y \geq 1 \\ 2y^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$$
Da cui $y \geq 2$, quindi:
$$|x - 1| \geq 2$$
Che equivale ai seguenti sistemi:
$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 1 > 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ -x + 1 > 2 \end{cases}$$
Ovvero
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > 3 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 1 \\ -1 > x \end{cases}$$
Le soluzioni della disequazione proposta sono:
$$\{x : x > 3\} \cup \{x : x < -1\}.$$

35) Le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei sistemi seguenti:
$$I) \begin{cases} \left.\begin{array}{l} x^2 - 1 \geq 0 \\ \\ x + 1 \geq 0 \end{array}\right\} \text{(realtà delle radici)} \\ \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x + 1} \geq 0 \\ \sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1} > 0 \end{cases}$$

$$II)\begin{cases} \left.\begin{array}{l} x^2-1\geq 0 \\ \\ x+1\geq 0 \end{array}\right\}\text{(realtà delle radici)} \\ \\ \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+1}<0 \\ \\ \sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1}<0 \end{cases}$$

(I termini: $2x^2+1$, e x^2+1 sono sempre positivi.)
Il sistema I) equivale al seguente:

$$\begin{cases} x\leq -1 \text{ oppure } 1\leq x \\ x\geq -1 \\ x^2-1\geq x+1 \\ 2x^2+1\geq x^2+1 \end{cases}$$

Nel sistema la disequazione $2x^2+1\geq x^2+1$ è verificata da ogni valore di $x\in\mathbb{R}$, possiamo quindi riscrivere il sistema senza di essa:

$$\begin{cases} x\leq -1 \text{ oppure } 1\leq x \\ x\geq -1 \\ x^2-x-2\geq 0 \end{cases}$$

L'equazione: $x^2-x-2=0$ ha soluzioni $x_1=-1, x_2=2$, quindi la disequazione: $x^2-x-2\geq 0$ ha soluzioni:$\{x : x\leq -1 \text{ o } 2\leq x\}$. Le soluzioni del sistema sono: $\{x : x=-1 \text{ oppure } x\geq 2\}$. Queste sono anche le soluzioni della disequazione data in quanto il sistema II) non ha soluzione. Infatti la quarta disequazione di II): $2x^2+1<x^2+1$, non è mai verificata.
Risolvere la disequazione:

$$\sqrt{x-1}\ \geq\ x+2|x|-4 \quad ,x\in\mathbf{R} \tag{1}$$

SVOLGIMENTO
Risolvere la disequazione equivale a risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x+2|x|-4\geq 0 \\ \\ x-1\geq 0 \\ \\ x-1\geq (x+2|x|-4)^2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \begin{cases} x+2|x|-4<0 \\ \\ x-1\geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Da cui

$$\begin{cases} x+2|x|-4\geq 0 \\ \\ x-1\geq 0 \\ \\ x-1\geq 5x^2+4x|x|-8x-16|x|+16 \end{cases} \qquad \text{oppure} \begin{cases} x+2|x|-4<0 \\ \\ x-1\geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \\ x + 2x - 4 \geq 0 \\ \\ x - 1 \geq 0 \\ \\ x - 1 \geq 5x^2 + 4x^2 - 24x + 16 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ \\ x - 2x - 4 \geq 0 \\ \\ x - 1 \geq 0 \\ \\ x - 1 \geq 5x^2 - 4x^2 + 8x + 16 \end{cases} \quad \text{oppure} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \\ x + 2x - 4 < 0 \\ \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ \\ x - 2x - 4 < 0 \\ \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Il secondo ed il quarto sistema non hanno soluzioni, quindi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \\ 3x \geq 4 \\ \\ x \geq 1 \\ \\ 9x^2 - 23x + 17 \leq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \\ 3x < 4 \\ \\ x \geq 1 \end{cases} \tag{5}$$

Il primo sistema non ha soluzione. Il secondo sistema ha soluzione

$$1 \leq x < \frac{4}{3},$$

che è quindi la soluzione della disequazione proposta.

Si consideri la funzione:

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^3 - 1} - 3\right) \tag{6}$$

Determinare il dominio di f e verificare che è monotona crescente.

SVOLGIMENTO.

Osserviamo che f è una funzione composta dalle funzioni logaritmo e radice quadrata. La prima è definita quando il suo argomento è strettamente positivo, la seconda se il suo argomento è non negativo. Nel nostro caso abbiamo quindi:

$$\begin{cases} \sqrt{x^3 - 1} - 3 > 0 \\ x^3 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Questo sistema equivale al seguente:

$$\begin{cases} x^3 - 1 > 9 \\ x^3 - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Da cui otteniamo il dominio della funzione:

$$Dom\, f = \{x : x > \sqrt[3]{10}\}.$$

b) Verifichiamo che:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in Dom\, f.$$

Ovvero:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log\left(\sqrt{x_1^3 - 1} - 3\right) < \log\left(\sqrt{x_2^3 - 1} - 3\right),\ \forall x_1, x_2 \in Dom\, f.$$

Ricordiamo la proprietà di monotonia della funzione logaritmo:

$$(*) \qquad y_1 < y_2 \iff \log y_1 < \log y_2.$$

Partiamo dalla diseguaglianza:

$$\log\left(\sqrt{x_1^3 - 1} - 3\right) < \log\left(\sqrt{x_2^3 - 1} - 3\right)$$

Per (*) equivale alla seguente:

$$\sqrt{x_1^3 - 1} - 3 < \sqrt{x_2^3 - 1} - 3 \iff (**)\sqrt{x_1^3 - 1} < \sqrt{x_2^3 - 1}$$

Ricordiamo che anche per la funzione $x \to \sqrt{x}$ vale l'equivalenza :$y_1 < y_2 \iff \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2}$. Tenuto conto di questa, la diseguaglianza (**) equivale alla seguente:

$$x_1^3 - 1 < x_2^3 - 1 \iff x_1^3 < x_2^3 \iff x_1 < x_2.$$

L'ultimo passaggio è conseguenza della stretta monotonia della funzione:
$x \to x^3$.
Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \log\sqrt{1 - |1 - x^2| - x} \tag{7}$$

SVOLGIMENTO

La *funzione logaritmo* è difinita quando il suo argomento è strettamente maggiore di zero, mentre la *funzione radice quadrata* è definita se il suo argomento è maggiore o uguale a zero. Tenuto conto di queste osservazioni possiamo scrivere

$$1 - |1 - x^2| - x > 0.$$

Da cui otteniamo, tenuto conto della definizione di *valore assoluto*

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 - (1 - x^2) - x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1 - x^2 < 0 \\ 1 - [-(1 - x^2)] - x > 0 \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 1 - x^2 < 0 \\ -x^2 - x + 2 > 0 \end{cases}$$

Risolvendo le disequazioni di secondo grado che compaiono nei sistemi otteniamo

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x < 0 \quad \vee \quad 1 < x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad 1 < x \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni $-1 \leq x < 0$, mentre il secondo sistema $-2 < x < -1$. Possiamo quindi concludere che il C.E. della funzione data è l'intervallo $(-2, 0)$

Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \log\sqrt{|4 - x^2| + x - 2} \tag{8}$$

SVOLGIMENTO

La *funzione logaritmo* è difinita quando il suo argomento è strettamente maggiore di zero, mentre la *funzione radice quadrata* è definita se il suo argomneto è maggiore o uguale a zero. Tenuto conto di queste osservazioni possiamo scrivere

$$|4 - x^2| + x - 2 > 0.$$

Da cui otteniamo, tenuto conto della definizione di *valore assoluto*

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ 4 - x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 4 - x^2 < 0 \\ -(4 - x^2) + x - 2 > 0 \end{cases}$$

Ovvero

$$\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ -x^2 + x + 2 > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 4 - x^2 < 0 \\ x^2 + x - 6 > 0 \end{cases}$$

Risolvendo le disequazioni di secondo grado che compaiono nei sistemi otteniamo

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -2 \quad \vee \quad 2 < x \\ x < -3 \quad \vee \quad 2 < x \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni $-1 \leq x < 2$, mentre il secondo sistema $x < -3$ oppure $2 < x$. Possiamo quindi concludere che il C.E. della funzione data è l'unione di intervalli: $(-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_3 |x^2 + 2x|}. \tag{9}$$

SVOLGIMENTO

La *funzione radice quadrata* è definita quando il suo argomento è maggiore o uguale a zero, mentre la *funzione logaritmo* quando il suo argomento è strettamente positivo. Tenuto conto di queste osservazioni scriviamo

$$\begin{cases} 1 - \log_3 |x^2 + 2x| \geq 0 \\ |x^2 + 2x| > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \log_3 |x^2 + 2x| \geq 0 \\ x^2 + 2x \neq 0 \end{cases}$$

Dalla definizione di *valore assoluto* e da quanto scritto sopra si ha

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ 1 \geq \log_3(x^2 + 2x) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 + 2x < 0 \\ 1 \geq \log_3[-(x^2 + 2x)], \end{cases}$$

Tenuto conto della seguente proprietà di *logaritmo*: se $a > 1$, $1 \geq \log_a b$ se e solo se $a \geq b$, i sistemi sopra equivalgono ai seguenti

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ 3 \geq x^2 + 2x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 + 2x < 0 \\ 3 \geq -(x^2 + 2x), \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0 \\ 0 \geq x^2 + 2x - 3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x^2 + 2x < 0 \\ x^2 + 2x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x < -2 \vee 0 < x \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -2 < x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono $-3 < x < -2$ oppure $0 < x \leq 1$, del secondo $-2 < x < 0$. In conclusione il C.E. della funzione data è l'unione di intervalli $[-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 1]$.

Determinare il campo di esistenza della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_2 |x^2 - x|}. \tag{10}$$

SVOLGIMENTO

La *funzione radice quadrata* è definita quando il suo argomento è maggiore o uguale a zero, mentre la *funzione logaritmo* quando il suo argomento è strettamente positivo. Tenuto conto di queste osservazioni scriviamo

$$\begin{cases} 1 - \log_2 |x^2 - x| \geq 0 \\ |x^2 - x| > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - \log_2 |x^2 - x| \geq 0 \\ x^2 - x \neq 0 \end{cases}$$

Dalla definizione di *valore assoluto* e da quanto scritto sopra si ha

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 1 \geq \log_2(x^2 - x) \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ 1 \geq \log_2[-(x^2 - x)], \end{cases}$$

Tenuto conto della seguente proprietà di *logaritmo*: se $a > 1$, $1 \geq \log_a b$ se e solo se $a \geq b$, i sistemi sopra equivalgono ai seguenti

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 2 \geq x^2 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ 2 \geq -(x^2 - x), \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 0 \geq x^2 - x - 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ x^2 - x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x < 0 \vee 1 < x \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono $-1 \leq x < 0$ oppure $1 < x \leq 2$, del secondo $0 < x < 1$. In conclusione il C.E. della funzione data è l'unione di intervalli $[-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2]$.

$$\frac{(2\sin x - \sqrt{2})\sqrt{2\sin x - \sqrt{2}}}{\sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}} \geq 0. \tag{11}$$

SVOLGIMENTO

Tenuto conto che la radice quadrata è positiva, possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2\sin x - \sqrt{2} \geq 0 \\ \\ \sin x - \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} > 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione si risolve utilizzando le formule che consentono di esprimere sin e cos come funzioni razionali di tan :

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$$

Sostituendo sopra

$$\begin{cases} \sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \dfrac{2\,\tan\frac{x}{2}}{1\,+\,\tan^2\frac{x}{2}} \,-\, \sqrt{3}\,\dfrac{1\,-\,\tan^2\frac{x}{2}}{1\,+\,\tan^2\frac{x}{2}} \,-\, \sqrt{3} \,>\, 0 \end{cases}$$

Ponendo $t = \tan\dfrac{x}{2}$ la seconda disequazione del sistema equivale alla seguente $t \,-\, \sqrt{3} \,>\, 0$, tornando al sistema e tenuto conto della posizione fatta sopra

$$\begin{cases} \sin x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] \tan\dfrac{x}{2} \,>\, \sqrt{3}. \end{cases}$$

Sono risolte dagli angoli

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi \,\leq\, x \,\leq\, \dfrac{3}{4}\pi \,+\, k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\[2ex] \dfrac{\pi}{3} \,+\, h\,\pi \,<\, \dfrac{x}{2} \,<\, \dfrac{\pi}{2} \,+\, h\,\pi, \quad h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da cui, intersecando gli intervalli delle soluzioni otteniamo infine che la disequazione data è risolta dai seguenti valori:

$$\frac{2}{3}\pi \,+\, k\,2\pi \,<\, x \,\leq\, \frac{3}{4}\pi \,+\, k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\sqrt{3}\,\cos x \,+\, 3\,\sin x \,-\, \sqrt{3}}{(2\,\sin x \,-\, 1)\,\sqrt{2\,\sin x \,-\, 1}} \,<\, 0. \tag{12}$$

SVOLGIMENTO

Tenuto conto che la radice quadrata è positiva, possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2\,\sin x \,-\, 1 > 0 \\[2ex] \sqrt{3}\,\cos x \,+\, 3\,\sin x \,-\, \sqrt{3} \,<\, 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione si risolve utilizzando le formule che consentono di esprimere sin e cos come funzioni razionali di tan :

$$\sin x \,=\, \frac{2\,\tan\frac{x}{2}}{1\,+\,\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x \,=\, \frac{1\,-\,\tan^2\frac{x}{2}}{1\,+\,\tan^2\frac{x}{2}}$$

Sostituendo sopra

$$\begin{cases} \sin x \,>\, \dfrac{1}{2} \\[2ex] \sqrt{3}\,\dfrac{1\,-\,\tan^2\frac{x}{2}}{1\,+\,\tan^2\frac{x}{2}} \,+\, \dfrac{6\,\tan\frac{x}{2}}{1\,+\,\tan^2\frac{x}{2}} \,-\, \sqrt{3} \,<\, 0 \end{cases}$$

Ponendo $t = \tan\dfrac{x}{2}$ la seconda disequazione del sistema equivale alla seguente

$\sqrt{3}\,t^2 \,-\, 3\,t \,>\, 0$, ovvero $t < 0 \vee t > \sqrt{3}$ tornando al sistema e tenuto conto della posizione fatta sopra

$$\begin{cases} \sin x \,>\, \dfrac{1}{2} \\ \\ \tan\dfrac{x}{2} < 0 \ \vee\ \tan\dfrac{x}{2} \,>\, \sqrt{3}. \end{cases}$$

Sono risolte dagli angoli

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + k\,2\pi \,<\, x \,<\, \dfrac{5}{6}\pi \,+\, k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \\ -\dfrac{\pi}{2} + k\pi < \dfrac{x}{2} < 0 + \,h\,\pi \ \vee\ \dfrac{\pi}{3} + k\pi < \dfrac{x}{2} \,<\, \dfrac{\pi}{2} \,+\, h\,\pi, \quad h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da cui, intersecando gli intervalli delle soluzioni otteniamo infine che la disequazione data è risolta dai seguenti valori:

$$\frac{2}{3}\pi + k\,2\pi \,<\, x \,<\, \frac{5}{6}\pi \,+\, k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{(2\,\cos x \,+\, \sqrt{3})\ \sqrt{2\,\cos x \,+\, \sqrt{3}}}{3\,\sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x \,-\, \sqrt{3}} \,\geq\, 0. \tag{13}$$

SVOLGIMENTO

Tenuto conto che la radice quadrata è positiva, possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2\,\cos x \,+\, \sqrt{3} \geq 0 \\ \\ 3\,\sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x \,-\, \sqrt{3} \,>\, 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione si risolve utilizzando le formule che consentono di esprimere sin e cos come funzioni razionali di tan :

$$\sin x \,=\, \frac{2\,\tan\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x \,=\, \frac{1 \,-\, \tan^2\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}}$$

Sostituendo sopra

$$\begin{cases} \cos x \,\geq\, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \dfrac{6\,\tan\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}} \,-\, \sqrt{3}\ \dfrac{1 \,-\, \tan^2\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}} \,-\, \sqrt{3} \,>\, 0 \end{cases}$$

Ponendo $t = \tan\dfrac{x}{2}$ la seconda disequazione del sistema equivale alla seguente
$3\,t \,-\, \sqrt{3} \,>\, 0$, tornando al sistema e tenuto conto della posizione fatta sopra

$$\begin{cases} \cos x \,\geq\, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ \tan\dfrac{x}{2} \,>\, \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Sono risolte dagli angoli

$$\begin{cases} 0 + k\,2\pi \,\leq\, x \,\leq\, \dfrac{5}{6}\pi \,+\, k\,2\pi \quad \vee \quad 2\pi + k\,2\pi \,\leq x \,\leq \dfrac{7}{6}\pi \,+\, k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \\ \dfrac{\pi}{6} \,+\, h\,\pi \,<\, \dfrac{x}{2} \,<\, \dfrac{\pi}{2} \,+\, h\,\pi, \quad h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da cui, intersecando gli intervalli delle soluzioni otteniamo infine che la disequazione data è risolta dai seguenti valori:

$$\frac{\pi}{3} + k\,2\pi \,<\, x \,<\, \frac{5}{6}\pi \,+\, k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\sqrt{3} \,-\, \sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x}{(\sqrt{2}\,\cos x \,-\, 1)\,\sqrt{\sqrt{2}\,\cos x \,-\, 1}} \,<\, 0. \tag{14}$$

SVOLGIMENTO

Tenuto conto che la radice quadrata è positiva, possiamo scrivere

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,\cos x \,-\, 1 > 0 \\ \\ \sqrt{3} \,-\, \sin x \,-\, \sqrt{3}\,\cos x \,<\, 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione si risolve utilizzando le formule che consentono di esprimere sin e cos come funzioni razionali di tan :

$$\sin x \,=\, \frac{2\,\tan\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x \,=\, \frac{1 \,-\, \tan^2\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}}$$

Sostituendo sopra

$$\begin{cases} \cos \,>\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sqrt{3} \,-\, \dfrac{2\,\tan\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}} \,-\, \sqrt{3}\,\dfrac{1 \,-\, \tan^2\frac{x}{2}}{1 \,+\, \tan^2\frac{x}{2}} \,<\, 0 \end{cases}$$

Ponendo $t = \tan\dfrac{x}{2}$ la seconda disequazione del sistema equivale alla seguente $\sqrt{3}\,t^2 \,-\, t \,<\, 0$, ovvero $0 \,<\, t \,<\, \frac{\sqrt{3}}{3}$ tornando al sistema e tenuto conto della posizione fatta sopra

$$\begin{cases} \cos x \,>\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ 0 \,<\, \tan\dfrac{x}{2} \,<\, \dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Sono risolte dagli angoli

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} + k\,2\pi \,\leq\, x \,<\, \dfrac{\pi}{4} \,+\, k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \\ 0 +\, h\,\pi \,<\, \dfrac{x}{2} \,<\, \dfrac{\pi}{6} \,+\, h\,\pi, \quad h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da cui, intersecando gli intervalli delle soluzioni otteniamo infine che la disequazione data è risolta dai seguenti valori:

$$0 + k\,2\pi \,<\, x \,<\, \frac{\pi}{4} \,+\, k\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$