Analisi Matematica I - Corso di Laurea in Fisica

Prova scritta del 19 gennaio 2012

Risoluzione degli esercizi proposti

1) Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$ si ha

$$n! \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Svolgimento

Procediamo per induzione.
Per $n = 1$ è banalmente vera. Infatti $1! \leq 2^0$.
Verifichiamo l'induttività della proposizione, ovvero deduciamo

$$(n+1)! \leq 2^{\frac{(n+1)n}{2}} \tag{1}$$

da

$$n! \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{2}$$

Dalla (1) scomponendo il fattoriale al primo membro ed utilizzzando l'ipotesi induttiva (2) si ha

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\,(n+1). \tag{3}$$

Otterremo la tesi se verifichiamo che

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}\,(n+1) \leq 2^{\frac{(n+1)n}{2}}.$$

Per dimostrare questo basta osservare quanto segue.

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}\,(n+1) \leq 2^{\frac{(n+1)n}{2}} \iff 2^{\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}}\,(n+1) \leq 2^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}}$$

$$\iff 2^{\frac{n^2}{2}}\,2^{-\frac{n}{2}}\,(n+1) \leq 2^{\frac{n^2}{2}}\,2^{\frac{n}{2}} \iff 2^{-\frac{n}{2}}\,(n+1) \ \leq\ 2^{\frac{n}{2}} \iff (n+1) \leq 2^n.$$

L'ultima diseguaglianza si prova per induzione. Per $n = 1$ è banalmente vera. Per quanto riguarda l'induttività della proposizione si deve provare che

$$(n+1) \leq 2^n \Longrightarrow (n+2) \leq 2^{n+1}.$$

Per fare questo basta osservare che (utilizzando l'ipotesi induttiva)

$$2^{n+1} = 2^n\,2 \geq (n+1)\,2 = 2n+2 \geq n+2.$$

2) Risolvere il seguente sistema nel campo complesso:

$$\begin{cases} \overline{z}^5 - w^4 = 1 \\ z^5 + \overline{w}^4 = -i\sqrt{3} \end{cases} \tag{4}$$

Svolgimento

Considerando il complesso coniugato di entrambi i membri della seconda equazione si ha $\overline{z}^5 + w^4 = i\sqrt{3}$. Da questa ricaviamo il termine contenente z:

$$\overline{z}^5 = i\sqrt{3} - w^4 \tag{5}$$

che sostituito nella prima equazione del sistema ci fornisce

$$i\sqrt{3} - 2w^4 = 1$$

da cui

$$w^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \iff w_{1,2,3,4} \in \sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Per determinare le radici quarte del numero al secondo membro lo scriviamo in forma trigonometrica:

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi.$$

Quindi applicando la formula del calcolo delle racici di un numero complesso si ottiene

$$w_{0,1,2,3} = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right),\ k = 0,1,2,3\right\},$$

da cui

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ w_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ w_2 &= \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \\ w_3 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Tornando alla (**??**), tenuto conto che $w^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ si ha

$$z^5 = -i\sqrt{3} - \overline{w}^4 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3}$$

Da cui applicando la formula per il calcolo delle radici di un numero complesso otteniamo:

$$z_{0,1,2,3,4} = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{5}\right),\ k = 0,1,2,3,4\right\},$$

In definitiva le soluzioni del sistema sono

$$\begin{array}{cccc} (z_0, w_0), & (z_0, w_1), & (z_0, w_2) & (z_0, w_3) \\ (z_1, w_0), & (z_1, w_1), & (z_1, w_2) & (z_1, w_3) \\ (z_2, w_0), & (z_2, w_1), & (z_2, w_2) & (z_2, w_3) \\ (z_3, w_0), & (z_3, w_1), & (z_3, w_2) & (z_3, w_3) \\ (z_4, w_0), & (z_4, w_1), & (z_4, w_2) & (z_4, w_3) \end{array}$$

3) Dimostrare che la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = 2\sqrt{a_n - 1} + 1 \end{cases} \tag{6}$$

converge, e calcolarne il limite.

Svolgimento.

Osserviamo che la successione è ben definita in quanto per ogni $n \geq 1$ risulta $a_n \geq 1$, dato che la radice è positiva.

Verifichiamo che la successione è monotona crescente per induzione.

$a_1 = 2\sqrt{3} + 1 > 4 = a_0$.

Verifichiamo l'ipotesi induttiva: $a_n < a_{n+1}$ implica $a_{n+1} < a_{n+2}$. Infatti

$$a_{n+1} = 2\sqrt{a_n - 1} + 1 < a_{n+2} = 2\sqrt{a_{n+1} - 1} + 1 \iff 2\sqrt{a_n - 1} < 2\sqrt{a_{n+1} - 1} \iff a_n < a_{n+1}.$$

L'ultima diseguaglianza è verificata per l'ipotesi induttiva. Quindi la successione è strettamente crescente. Verifichiamo che è limitata superioremente. Ovvero che esiste $M > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < M$. Ovviamente M deve essere maggiore di 4. anche in questo caso procediamo per induzione. Supponiamo che $a_n < M$ verifichiamo $a_{n+1} < M$. Quindi applichiamo l'ipotesi induttiva

$$a_{n+1} = 2\sqrt{a_n - 1} + 1 < 2\sqrt{M - 1} + 1 < M \iff 4(M-1) < (M-1)^2 \iff 5 < M.$$

Quindi Qualunque numero reale $M > 5$ è un maggiorante della succesisone. Per il teorema di regolarità delle successioni monotona si ha che esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L.$$

Calcoliamo L passando al limite nella sucecssione ricorsiva e quindi risolvendo l'equazione

$$L = 2\sqrt{L - 1} + 1 \iff L - 1 = 2\sqrt{L - 1} \iff (L-1)^2 - 4(L-1) = 0 \iff (L-1)(L-5) = 0.$$

Le soluzioni sono $L_1 = 0$ ed $L_2 = 5$. L_1 si scarta dato che non è di accumulazione per la successione perché per quanto visto sopra, per ogni $n \in \mathbb{N}$,$a_n \geq 4$. Il limite cercato è dunque $L_2 = 5$.