**Teorema di Nyquist**

Supponiamo che $x : \Re \to \Re$ sia una funzione continua, che $\hat{x}$ sia la sua trasformata di Fourier e che $|\hat{x}(\xi)| = 0$ per $|\xi| > \nu/2$. Supponiamo di campionare $x$ a frequenza $\nu$ ottenendo una successione di valori $x_n$. Allora dai valori campionati si può ricostruire esattamente la funzione e la sua trasformata di Fourier. Precisamente:

$$x_n = x(\frac{n}{\nu})$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n \frac{\sin(\pi(n - t\nu))}{\pi(n - t\nu)}$$

$$\hat{x}(\xi) = \frac{1}{\nu} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n \ e^{-2\pi i \frac{\xi}{\nu} n}$$

**Dimostrazione:**

In questo teorema usiamo la seguente definizione di trasformata di Fourier e di anti-trasformata:

$$\hat{x}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \ e^{-2\pi i t\xi} \ dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\xi) \ e^{2\pi i t\xi} \ d\xi$$

Ricordiamo che, essendo $x$ reale, abbiamo

$$\forall \xi \in \Re \quad \overline{\hat{x}(\xi)} = \hat{x}(-\xi)$$

ovvero esplicitamente:

$$\begin{cases} Re(\hat{x}(\xi)) & = +Re(\hat{x}(-\xi)) \\ Im(\hat{x}(\xi)) & = -Im(\hat{x}(-\xi)) \end{cases}$$

Poichè $\hat{x}$ è nulla fuori dall'intervallo $[-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}]$, possiamo prolungarla per periodicità, ottenendo una funzione $\Phi$ di periodo $\nu$ e coincidente con $\hat{x}$ su $[-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}]$:

$$\Phi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{x}(\xi + n\nu)$$

Essendo periodica la si può esprimere come serie di Fourier, che scriviamo in questa forma:

$$\Phi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Phi_n \ e^{-2\pi i n \frac{\xi}{\nu}}$$

dove

$$\Phi_n = \frac{1}{\nu} \int_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \Phi(\xi)\ e^{2\pi i n \frac{\xi}{\nu}}\ d\xi$$

Mostriamo ora che $\Phi_n = x_n/\nu$.

Infatti è:

$$\Phi_n = \frac{1}{\nu} \int_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \Phi(\xi)\ e^{2\pi i n \frac{\xi}{\nu}}\ d\xi = \frac{1}{\nu} \int_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \hat{x}(\xi + k\nu)\ e^{2\pi i n \frac{\xi}{\nu}}\ d\xi =$$

$$= \frac{1}{\nu} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \hat{x}(\xi + k\nu)\ e^{2\pi i n \frac{\xi}{\nu}}\ d\xi = \frac{1}{\nu} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{-\frac{\nu}{2}+k\nu}^{\frac{\nu}{2}+k\nu} \hat{x}(\sigma)\ e^{2\pi i n(\sigma - k\nu)/\nu}\ d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\nu} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_{-\frac{\nu}{2}+k\nu}^{\frac{\nu}{2}+k\nu} \hat{x}(\sigma)\ e^{2\pi i n\sigma/\nu}\ d\sigma = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(\sigma)\ e^{2\pi i n\sigma/\nu}\ d\sigma = x_n/\nu$$

Quindi abbiamo la:

$$x(t) = \int_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \Phi(\xi)\ e^{2\pi i \xi t}\ d\xi = \int_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{x_n}{\nu}\ e^{-2\pi i n \frac{\xi}{\nu}}\ e^{2\pi i \xi t}\ d\xi =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x_n \quad \{\frac{1}{\nu} \int_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} e^{-2\pi i \xi (n - \nu t)/\nu}\ d\xi\}$$

La parte tra le parentesi graffe si calcola e vale esattamente:

$$\frac{e^{2\pi i \frac{\nu}{2}(n-\nu t)/\nu} - e^{-2\pi i \frac{\nu}{2}(n-\nu t)/\nu}}{\nu \quad 2\pi i (n - \nu t)/\nu} = \frac{\sin(\pi(n - \nu t))}{\pi(n - \nu t)}$$

Si ottiene così la formula per $x(t)$. Per la $\hat{x}$ basta ricordare che

$$\forall \xi \in [-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}] \qquad \hat{x}(\xi) = \Phi(\xi) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Phi_n\ e^{-2\pi i n \xi/\nu} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{x_n}{\nu}\ e^{-2\pi i n \xi/\nu}$$

**alias:**

Se $y$ è una funzione reale con spettro $\hat{y}$ non necessariamente nullo fuori $[-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}]$, posto

$$\Phi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{y}(\xi + n\nu)$$

e preso $\hat{x}(\xi) = \Phi(\xi)$ in $[-\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}]$ e 0 fuori, e detta $x$ la funzione corrispondente, i dati campionati $x_n$ e $y_n$ sono identici. Le frequenze comprese tra $[0, \frac{\nu}{2}]$ che corrispondono a frequenze dello spettro originale di $y$ che cadevano fuori dall'intervallo sono dette le loro "alias".