Skew brace: Dall'equazione di Yang–Baxter alle strutture Hopf–Galois

Lorenzo Stefanello

XXII Congresso dell'Unione Matematica Italiana
4 Settembre 2023

Skew brace

Definizione (Guarnieri e Vendramin, 2017)

Una *skew brace* è una tripla $(A, +, \circ)$, dove $(A, +)$ e $(A, \circ)$ sono gruppi tali che

$$a \circ (b + c) = (a \circ b) - a + (a \circ c)$$

per ogni $a, b, c \in A$.

Esempio

- Se $(A, +)$ è un gruppo, allora $(A, +, +)$ è una skew brace *banale*.
- $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ è una skew brace, dove $m \circ n = m + (-1)^m n$.

Equazione di Yang–Baxter

Una *soluzione (dell'equazione di Yang–Baxter)* è una coppia (X, r), dove X è un insieme non vuoto e $r\colon X \times X \to X \times X$ una mappa biunivoca tale che

$$(r \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times r)(r \times \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \times r)(r \times \mathrm{id})(\mathrm{id} \times r).$$

Teorema (Guarnieri e Vendramin, 2017)

Sia $(A, +, \circ)$ una skew brace. Allora (A, r) è una soluzione, dove

$$r(a, b) = (-a + a \circ b, (-a + a \circ b)' \circ a \circ b);$$

qui un apostrofo denota l'inverso in $(A, \circ)$.

Problema

In che modo le proprietà algebriche delle skew brace si traducono in proprietà combinatorie delle soluzioni?

Sia L/K una estensione finita di campi.

Definizione (Chase e Sweedler, 1969)

Una *struttura Hopf–Galois* consiste in una K-algebra di Hopf H che agisce su L "mimando" l'azione di un gruppo di Galois.

Teorema (Byott e Vendramin, 2018, LS e Trappeniers, 2023b)

Si supponga che L/K sia di Galois con gruppo G.

$$\{\textit{strutture HG su } L/K\} \leftrightarrow \{\textit{skew brace } (A,+,\circ) \textit{ con } (A,\circ)=G\}.$$

Tramite questa connessione, sottostrutture e proprietà algebriche della skew brace A e dell'algebra di Hopf H corrispondono, e si traducono in informazioni sui campi intermedi di L/K.

Le skew brace si comportano come ...

Skew brace e anelli

…anelli:

- Una classe importante di skew brace $(A, +, \circ)$ è formata da anelli radicali A con $a \circ b = a + b + ab$; si veda [Rump, 2007].
- Sono connesse a quasi-anelli e anelli (e algebre) pre-Lie.

$\rightsquigarrow$ nozioni di ideali (sinistri), nilpotenza destra e sinistra, ideali primi e semiprimi, radicali (di Baer e Wedderburn)…

Skew brace e gruppi

. . . gruppi:

- Sono connesse con 1-cocicli, sottogruppi regolari dell'olomorfo, fattorizzazioni esatte, gruppi a tripla fattorizzazione, operatori Rota–Baxter su gruppi, . . .
- Formano una varietà di Ω-gruppi [Higgins 1956], e dunque una categoria semiabeliana [Janelidze et al, 2002], [Bourn et al, 2022].

$\rightsquigarrow$ nozioni di (teoremi di) isomorfismo, commutatore, risolubilità e nilpotenza, prodotti (semi)diretti, . . .

Problemi di struttura e classificazione

Problema

Studiare le relazioni tra i due gruppi di una skew brace.

Congettura (Byott)

Se $(A, +, \circ)$ è una skew brace finita e $(A, +)$ è risolubile, allora $(A, \circ)$ è risolubile.

Teorema (LS e Trappeniers, 2023a)

La congettura di Byott vale per skew brace risolubili, nilpotenti, ...

Problema

Contare e classificare (a meno di isomorfismo) le skew brace.

Teorema (LS e Trappeniers, 2023a)

Ci sono tre classi di isomorfismo di skew brace $(A, +, \circ)$ con $(A, \circ) \cong \mathbb{Z}$. In un caso $(A, +) \cong \mathbb{Z}$, negli altri due $(A, +) \cong D_\infty$.

Classi di skew brace ed esempi

Problema
Studiare certe classi di skew brace.

Problema
Costruire efficacemente esempi di skew brace.

Teorema (Caranti e LS, 2021)
Sia $(A, +)$ *un gruppo di classe* 2 *e* ψ *un endomorfismo di* $(A, +)$*. Allora* $(A, +, \circ)$ *è una skew brace nilpotente, dove*

$$a \circ b = a + \psi(a) + b - \psi(a).$$

Questa costruzione permette di trovare strutture Hopf–Galois con una proprietà desiderabile ma rara: la corrispondenza Hopf–Galois è biunivoca [LS e Trappeniers, 2023b].

Bibliography

Bourn, D., Facchini, A., and Pompili, M. (2022).
Aspects of the category skb of skew braces.
Communications in Algebra, pages 1–15.

Caranti, A. and LS (2021).
From endomorphisms to bi-skew braces, regular subgroups, the Yang–Baxter equation, and Hopf–Galois structures.
J. Algebra, 587:462–487.

Chase, S. U. and Sweedler, M. E. (1969).
Hopf algebras and Galois theory.
Lecture Notes in Mathematics, Vol. 97. Springer-Verlag, Berlin-New York.

Guarnieri, L. and Vendramin, L. (2017).
Skew braces and the Yang–Baxter equation.
Math. Comp., 86(307):2519–2534.

Bibliography

Higgins, P. J. (1956).
Groups with multiple operators.
Proc. London Math. Soc. (3), 6:366–416.

Janelidze, G., Márki, L., and Tholen, W. (2002).
Semi-abelian categories.
volume 168, pages 367–386.
Category theory 1999 (Coimbra).

LS and Trappeniers, S. (2023a).
On bi-skew braces and brace blocks.
J. Pure Appl. Algebra, 227(5):Paper No. 107295.

Bibliography

LS and Trappeniers, S. (2023b).
On the connection between Hopf–Galois structures and skew braces.
Bulletin of the London Mathematical Society, 55(4):1726–1748.

Rump, W. (2007).
Braces, radical rings, and the quantum Yang–Baxter equation.
J. Algebra, 307(1):153–170.

Smoktunowicz, A. and Vendramin, L. (2018).
On skew braces (with an appendix by N. Byott and L. Vendramin).
J. Comb. Algebra, 2(1):47–86.