



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA
"L. TONELLI"

via Buonarroti, 2
I - 56127 Pisa
Tel. +39 050 2213223
fax +39 050 2213224
e-mail:@dm.unipi.it

C. Fisc. 80003670504
P.Iva 00286820501

1

Appunti delle lezioni del 12/12/2008

La volta scorsa abbiamo introdotto il concetto di primitiva di una funzione. Per abbiamo osservato che data una primitiva F di una funzione f , tutte le altre primitive sono del tipo $F + c$, con c una costante in $\mathbb{R}$. Abbiamo infine chiamato integrale indefinito l'insieme delle primitive di una funzione e ci sono concentrati su alcuni risultati per il calcolo delle primitive.

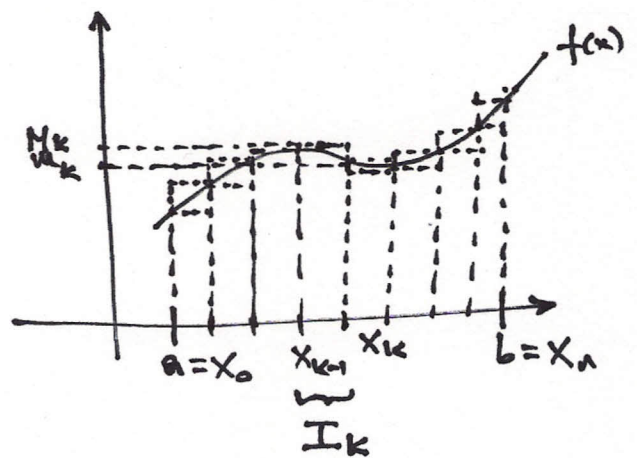
Questi appi introduciamo l'INTEGRALE DEFINITO il suo significato geometrico, le sue proprietà e le relazioni con l'integrale indefinito.

INTEGRALE DEFINITO

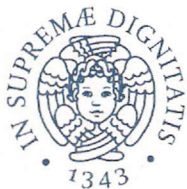
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\mathcal{G}_f$ il suo grafico.

Problema: determinare il valore dell'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione e

l'asse delle ascisse nell'intervallo $[a, b]$



N.B. Supponiamo, senza perdita di generalità, solo per comodità che $f \geq 0$ in $[a, b]$



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA
"L. TONELLI"

via Buonarroti, 2
I - 56127 Pisa
Tel. +39 050 2213223
fax +39 050 2213224
e-mail:@dm.unipi.it

C. Fisc. 80003670504
P.Iva 00286820501

2

Per fare questo dividiamo $[a, b]$ in n intervalli,
ovvero consideriamo una PARTIZIONE P :

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e consideriamo
gli intervalli $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ con $k=1, \dots, n$.

Approssimiamo per difetto l'area che stiamo
cercando con l'area di rettangoli tutti sotto
il grafico di f . Vediamo come usare la
partizione di $[a, b]$: su ogni intervallo I_k
la restrizione di f a I_k ammette massimo
e minimo (perché I_k è chiuso e limitato
per ogni $k=1, \dots, n$ e f è continua).

Chiameremo M_k il massimo di f su I_k e
" m_k il minimo di f su I_k

(vedi figura)

L'area dei rettangolini sarà data da
 $m_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ per quelli sotto il grafico

$\uparrow$
altezza base

e $M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ per quelli sopra.

$\uparrow$
altezza base

La somma delle aree dei rettangoli sotto

è dunque $S(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$

→
questa somma dipende da
 f e dalla partizione
 P

$\uparrow$
è l'approssimazione
per difetto dell'area
cercata



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA
"L. TONELLI"

via Buonarroti, 2
I - 56127 Pisa
Tel. +39 050 2213223
fax +39 050 2213224
e-mail:@dm.unipi.it

3

C. Fisc. 80003670504
P.Iva 00286820501

Analogamente la somma delle aree
dei rettangoli sopra è $S(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$

A seconda della partizione
 P di $[a, b]$ scelta, avremo

↑
approssimazione
per eccesso.

una migliore o peggiore approssimazione.

Più la partizione è fine, ovvero più punti ha,
migliore è la stima.

Concludiamo allora

$$s(f) = \sup \{ S(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b] \}$$

$$S(f) = \inf \{ S(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b] \}$$

SI DIMOSTRA CHE :

← ovvero f è continua
su $[a, b]$

TEOREMA: Se $f \in C^0([a, b])$

$$\Rightarrow s(f) = S(f).$$

CHIAMAMO ALLORA QUESTO NUMERO
INTEGRALE DEFINITO DI f IN $[a, b]$ E SCRIVIAMO

$$s(f) = S(f) = \int_a^b f(x) dx$$

← simbolo di
integrale
definito

Se questa uguaglianza è vera
 f si dice INTEGRABILE

SU $[a, b]$ SECONDO RIEMANN.

IL TEOREMA DICE CHE LE
FUNZIONI CONTINUE SU $[a, b]$

← eccellente
matematica
tedesca

SONO INTEGRABILI SECONDO RIEMANN SU $[a, b]$



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA
"L. TONELLI"

via Buonarroti, 2
I - 56127 Pisa
Tel. +39 050 2213223
fax +39 050 2213224
e-mail:@dm.unipi.it

4

C. Fisc. 80003670504
P.Iva 00286820501

Si dimostrano le seguenti proprietà
dell'integrale definito :

PROPRIETÀ :

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue
e sia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$1) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$2) \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

$$3) \int_c^c f(x) dx = 0$$

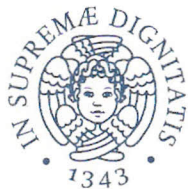
$$4) \text{ Se } c \in [a, b] \text{ si ha } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$5) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

6) Sia $m = \min f([a, b])$ e $M = \max f([a, b])$
(m e M esistono per il teorema di
Weierstrass!) $\rightarrow$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

HA QUAL'E IL LEGAME TRA I 2 TIPI DI
INTEGRALE (un caso puo' essere la
stessa notazione) ?



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA
"L. TONELLI"

via Buonarroti, 2
I - 56127 Pisa
Tel. +39 050 2213223
fax +39 050 2213224
e-mail:@dm.unipi.it

5

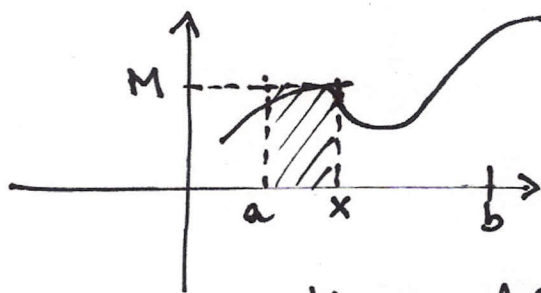
C. Fisc. 80003670504
P.Iva 00286820501

Il legame tra le primitive di f ,
funzione continua su $[a, b]$ e l'integrale
definito di f in $[a, b]$ viene chiarito
dalla seguente osservazione e dal successivo
teorema.

(oss) Sia $f \in C([a, b])$. Allora per ogni
punto $x \in [a, b]$ si ha che

$$\int_a^x f(t) dt \in \mathbb{R}$$

Non è $+\infty$ perché
quest'area è limitata
dall'area del rettangolo
disegnato in figura.



$M = \max f([a, x])$
($\exists$ per il teo.
di Weierstrass)

$$\int_a^x f(t) dt \leq M(x-a)$$

Allora ha senso definire l'applicazione

$$F: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_a^x f(t) dt =: F(x).$$

è la funzione che manda
 x nell'area delle
superfici comprese tra
il grafico di f , l'asse
delle ascisse, nell'intervallo
 $[a, x]$

usiamo le
lettere t
perché x è
già il punto.
 F è invece
funzione di x .



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA
"L. TONELLI"

via Buonarroti, 2
I - 56127 Pisa
Tel. +39 050 2213223
fax +39 050 2213224
e-mail:@dm.unipi.it

6

C. Fisc. 80003670504
P.Iva 00286820501

TEOREMA (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Sia $f \in C^0([a, b])$. Allora la
funzione (definita sopra)

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è una primitiva di f in $[a, b]$!

Il successivo teorema ci mette di risolvere
il nostro problema di partenza: per calcolare
l'area cercata si può trovare una primitiva
di f e valutare in a e b . La
differenza tra questi valori è proprio
il valore cercato.

TEOREMA (FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Sia $f \in C^0([a, b])$ e sia

$G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione primitiva
di f in $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA
"L. TONELLI"

via Buonarroti, 2
I - 56127 Pisa
Tel. +39 050 2213223
fax +39 050 2213224
e-mail:@dm.unipi.it



C. Fisc. 80003670504
P.Iva 00286820501

dimostrazione :

Sia $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Per il teorema precedente

$F(x)$ è una primitiva di f in $[a, b]$.

Allora, per un altro risultato visto in precedenza

F e G differiscono per una costante c sull'intervallo $[a, b]$. Cioè:

$$G(x) = F(x) + c, \text{ ovvero } G(x) = \int_a^x f(t) dt + c.$$

Dalle proprietà 3 degli integrali definiti
concludiamo che $G(a) = \int_a^a f(t) dt + c = c$

$$\text{Inoltre } F(b) = \int_a^b f(t) dt = G(b) - c = G(b) - G(a),$$

e questa è la tesi. $\blacktriangle$

es) $\rightarrow \int_0^1 (e^{2x} + x^2) dx$: per la formula fondamentale
basta trovare una primitiva di $e^{2x} + x^2$ e valutarla
in 1 e 0.

$$\int (e^{2x} + x^2) dx = \int e^{2x} dx + \int x^2 dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Quindi

$$\int_0^1 (e^{2x} + x^2) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \underbrace{\frac{e^2}{2} + \frac{1}{3}}_{\text{valore della primitiva in 1}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{0}{3} \right)}_{\text{valore della primitiva in 0}} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_0^{\pi/4} 2 \cos 3x dx &= 2 \cdot \frac{\sin 3x}{3} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{2 \sin \frac{3\pi}{4}}{3} - \frac{2 \sin(3 \cdot 0)}{3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA
"L. TONELLI"

via Buonarroti, 2
I - 56127 Pisa
Tel. +39 050 2213223
fax +39 050 2213224
e-mail:@dm.unipi.it

7615

C. Fisc. 80003670504
P.Iva 00286820501

TEOREMA (INTEGRAZIONE PER PARTI)

Siano $f, g \in C^1([a, b])$. Allora

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \underbrace{f(b)g(b) - f(a)g(a)}_{f(x)g'(x) \Big|_a^b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad \leftarrow \text{NOTAZ.}$$

TEOREMA (INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE)

Siano $f \in C^1([a, b])$, $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$
Allora $\varphi \in C^1([c, d])$

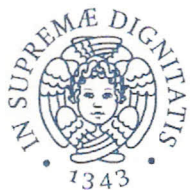
$$\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(y)dy$$

$$\begin{aligned} \textcircled{23} \quad \int_{-1}^0 x^2 e^x dx &= \underbrace{x^2 e^x}_{0 \cdot e^0 - 1 \cdot e^{-1}} \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2x e^x dx = -e^{-1} - \left[2x e^x \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2e^x dx \right] \\ &= -e^{-1} + 2 \cdot e^{-1} + 2 - 2e^{-1} = 2 - \frac{1}{e}. \end{aligned} \quad (\text{per parti})$$

$$\begin{aligned} \textcircled{24} \quad \int_0^{\pi/2} x \cos x dx &= x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned} \quad (\text{per parti})$$

N.B. $x^2 e^x$ è continua in $[-1, 0]$ quindi esiste l'integrale definito
 $x \cos x$ " " in $[0, \pi/2]$ " " " " " "

$$\begin{aligned} \textcircled{25} \quad \int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx &= \int_{1/e}^e \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y \Big|_{1/e}^e = \arctan e - \arctan \frac{1}{e} \\ \text{con } y=e^x, dy &= e^x dx. \text{ Se } x=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{e}. \text{ Se } x=1 \Rightarrow y=e \quad (\text{per sost.}) \end{aligned}$$



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA
"L. TONELLI"

via Buonarroti, 2
I - 56127 Pisa
Tel. +39 050 2213223
fax +39 050 2213224
e-mail:@dm.unipi.it



C. Fisc. 80003670504
P.Iva 00286820501

N.B. Utilizzando il legame tra integrale definito e primitive si ottengono in sostanza due teoremi di integrazione per parti e in sostanza due teoremi di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti.

Concludiamo con

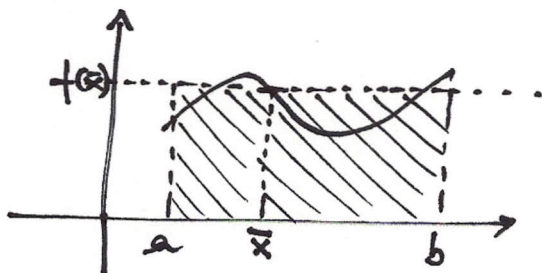
TEOREMA (TEOREMA DELLA MEDIA)

Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora esiste un punto $\bar{x} \in (a,b)$ tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(\bar{x})(b-a).$$

significato geometrico: c'è un punto all'interno dell'intervallo $[a,b]$

che ci permette di vedere il valore della regione di piano limitata dal grafico di f , l'asse delle ascisse nella regione $[a,b]$ come area di un rettangolo di base lunga $b-a$ e altezza $f(\bar{x})$.





UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA
"L. TONELLI"

via Buonarroti, 2
I - 56127 Pisa
Tel. +39 050 2213223
fax +39 050 2213224
e-mail:@dm.unipi.it

⑨

C. Fisc. 80003670504
P.Iva 00286820501

dimostrazione:

Se $f \in C^0([a, b])$. Delle proprietà si ottiene che

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

dato che $b-a > 0$, da queste otteniamo

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{\text{è un numero}} \leq M.$$

Il numero $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \in [m, M]$.

Ma per il teorema dei valori intermedi

$[m, M] = f([a, b]) = \text{Im } f|_{[a, b]}$ * Quindi delle
definiere che neppure almeno che

$$\exists \bar{x} \in [a, b] \text{ tale che } f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

che lo ten.

* quindi $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \in \text{Im } f|_{[a, b]}$



- THE END -