Soluzioni

1. $J_\gamma = \begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 & -4z^3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad J_\gamma(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Il minore di $J_\gamma(1,1,-1)$ formato dalla seconda e terza colonna è invertibile. Il teorema delle funzioni implicite assicura allora la possibilità di esplicitare localmente y e z in fz. di x.
Derivando in forma implicita il sistema γ rispetto ad x:

$$\begin{cases} 4x^3 + 4y^3y' - 4z^3z' = 0 \\ 1 + y' + 2z' = 0 \end{cases}$$

In P_0 si ottiene:

$$\begin{cases} 4 + 4y' + 4z' = 0 \\ 1 + y' + 2z' = 0 \end{cases} \Rightarrow y'(1) = -1, \quad z'(1) = 0.$$

Per continuità, $y' < 0$ in un intorno di $x_0 = 1$; questo assicura che $y(x)$ è localmente decrescente.
Derivando una seconda volta in forma implicita rispetto a x:

$$\begin{cases} 12x^2 + 12y^2y'^2 + 4y^3y'' - 12z^2z'^2 - 4z^3z'' = 0 \\ y'' + 2z'' = 0. \end{cases}$$

In P_0:

$$\begin{cases} 24 + 4y''(1) + 4z''(1) = 0 \\ y''(1) + 2z''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow z''(1) = 6$$

Poiché $z'(1) = 0$, $z''(1) = 6 > 0$, $z(x)$ ha in $x_0 = 1$ un pto di min. locale.

γ è chiuso perché intersezione di chiusi.
Per provare che è limitato, si procede come segue:

$$(x^2+y^2)^2 \le 2(x^4+y^4) = 2(1+z^4)$$

$$2z = -(x+y)$$

$$4z^2 = (x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) \le 2\sqrt{2(1+z^4)} \to 16z^4 \le 8 + 8z^4$$

L'ultima maggiorazione prova che z è limitata.
Dalla prima maggiorazione si ottiene che anche x e y lo sono.

I tre minori di J_γ si annullano contemporaneamente nei punti della forma $t(1,1,-\sqrt[3]{2})$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Nessuno di questi punti sta in γ

$\mathcal{L} = z + \lambda(x^4+y^4-z^4-1) + \mu(x+y+2z)$

$$\begin{cases} 4\lambda x^3 + \mu = 0 \\ 4\lambda y^3 + \mu = 0 \\ 1 - 4\lambda z^3 + 2\mu = 0 \\ x^4 + y^4 - z^4 = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due eq. si ricava $\lambda = 0$ opp. $x = y$.
Se $\lambda = 0$ deve essere anche $\mu = 0$, e questo non è compatibile con la terza eq.
Se $x = y$, troviamo i punti $P_{1,2} = \pm(1,1,-1)$.
Dunque $\max_\gamma z = 1$, valore assunto in $(-1,-1,1)$.

2. Soluzioni eq. omogenea : $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$.
Cerchiamo una slz. particolare con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie nella forma $c_1(x)\cos x + c_2(x) \operatorname{sen} x$.

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$c_1' = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ 1/\cos^3 x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \rightarrow c_1 = -\frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$c_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & 1/\cos^3 x \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow c_2 = \operatorname{tg} x$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2\cos x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}.$$

3. 

Flusso del rotore:

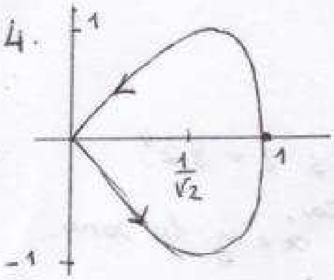
$\operatorname{rot} F = (0,-1,-1)$ $\quad \Sigma: \begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le r \le \sqrt{2} \\ y = r \operatorname{sen}\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = 2 - r^2 \end{cases}$

$$\phi_r \times \phi_\theta = (2r^2\cos\theta,\ 2r^2 \operatorname{sen}\theta,\ r)$$

$$\text{Flusso} = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} (-2r^2 \operatorname{sen}\theta - r)\, dr\, d\theta = -2\pi$$

Circuitazione lungo la curva $x = \sqrt{2}\cos\theta,\ y = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta,\ z = 0$

$$\text{Circuitazione} = \int_0^{2\pi} -2\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = -2\left[\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -2\pi$$

4. 

$$A = \int_\gamma x\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot 2\cos 2t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} 2\cos t\,(1 - 2\operatorname{sen}^2 t)\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} 2(1 - 2z^2)\, dz = \frac{4}{3}$$

5. $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore di una matrice quadrata A se l'eq. $AX = \lambda X$ ammette soluzioni non banali ($X \neq 0$). Questo accade se e solo se $\det(A - \lambda I) = 0$.
Data una fz. $f(x)$ di n variabili reali di classe C^2, per studiare se un punto stazionario interno P_0 è di max o min locale, si considera la matrice hessiana $\mathcal{H}(P_0) = \left(\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, simmetrica.
Autovalori di $\mathcal{H}(P_0) \underset{<}{>} 0 \Rightarrow P_0$ di minimo (massimo)
Autovalori di $\mathcal{H}(P_0)$ non hanno segno costante $\Rightarrow P_0$ di sella.

$\nabla f = (2x, z, y)$; unico punto stazionario O.
$\mathcal{H}(O) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha autovalori $2, \pm 1$. Il punto O è di sella.

Soluzioni [2]

1. $J_\gamma = \begin{pmatrix} -4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad J_\gamma(-1,1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Il minore di $J_\gamma(-1,1,1)$ formato dalle prime due colonne è invertibile. Questo assicura la possibilità di esplicitare localmente x e y in funzione di z (teorema delle fz. implicite). Derivando in forma implicita il sistema γ rispetto a z:

$$-4x^3x' + 4y^3y' + 4z^3 = 0, \quad 2x' + y' + 1 = 0.$$

In P_0 si ottiene:

$$4x' + 4y' + 4 = 0, \quad 2x' + y' + 1 = 0 \Rightarrow x'(1) = 0; \; y'(1) = -1.$$

Per continuità, $y' < 0$ in un intorno di $z_0 = 1$; questo assicura che localmente $y(z)$ è decrescente.

Derivando una seconda volta:

$$-12x^2x'^2 - 4x^3x'' + 12y^2y'^2 + 4y^3y'' + 12z^2 = 0, \quad 2x'' + y'' = 0.$$

In P_0:

$$4x''(1) + 4y''(1) + 24 = 0, \quad 2x''(1) + y''(1) = 0 \Rightarrow x''(1) = 6.$$

Poiché $x'(1) = 0$, $x''(1) = 6 > 0$; $x(z)$ ha in $z_0 = 1$ un pto di minimo.

γ è chiuso perché intersezione di chiusi.

Per provare che è limitato:

$$(y^2+z^2)^2 \leq 2(y^4+z^4) = 2(1+x^4)$$

$$2x = -(y+z)$$

$$4x^2 = (y+z)^2 \leq 2(y^2+z^2) \leq 2\sqrt{2(1+x^4)} \Rightarrow 16x^4 \leq 8 + 8x^4$$

L'ultima maggiorazione prova che x è limitata.

Dalla prima maggiorazione si deduce che anche y e z lo sono.

I tre minori di J_γ si annullano contemporaneamente nei punti della forma $t(-\sqrt[3]{2},1,1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Nessuno di questi punti sta in γ.

$$\mathcal{L} = x + \lambda(-x^4 + y^4 + z^4 - 1) + \mu(2x+y+z)$$

$$\begin{cases} 1 - 4\lambda x^3 + 2\mu = 0 \\ 4\lambda y^3 + \mu = 0 \\ 4\lambda z^3 + \mu = 0 \\ -x^4 + y^4 + z^4 = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda e dalla terza eq. si ricava: $\lambda = 0$ opp. $y = z$.

Se $\lambda = 0$, deve essere $\mu = 0$ e questo non è compatibile con la prima eq.

Se $y = z$, troviamo i punti $P_{1,2} = \pm(-1,1,1)$

Dunque $\max_\gamma x = 1$, valore assunto in $(1,-1,-1)$

2. Slz eq. omogenea: $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$.

Ricerca di una slz. particolare con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie nella forma $c_1(x)\cos x + c_2 \operatorname{sen} x$.

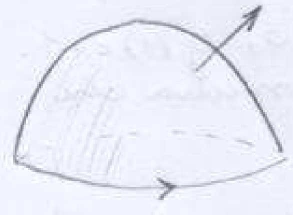
$$W = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} = 1$$

$$c_1' = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ 1/\operatorname{sen}^3 x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow c_1 = \operatorname{cotg} x$$

$$c_2' = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & 1/\operatorname{sen}^3 x \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x}$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{2 \operatorname{sen} x}.$$

3.



Flusso rotore

$\operatorname{rot} F = (0, -1, -1)$ $\quad \Sigma : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = 4 - r^2 \end{cases}$ $\quad 0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$

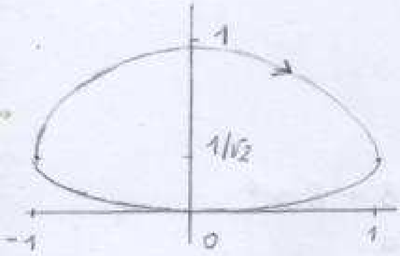
$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (2r^2\cos\theta,\ 2r^2\operatorname{sen}\theta,\ r)$$

$$\text{Flusso} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-2r^2\operatorname{sen}\theta - r)\, dr\, d\theta = -4\pi$$

Circuitazione lungo la curva $x = 2\cos\theta,\ y = 2\operatorname{sen}\theta,\ z = 0$.

$$\text{Circuitazione} = \int_0^{2\pi} -4\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = -4\left[\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -4\pi.$$

4.



La curva è orientata in senso orario, contrariamente a quanto richiesto dalle formule di G.G.; dobbiamo dunque cambiare segno.

$$A = -\int_\gamma x\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} t\, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} 2z^2\, dz = \frac{4}{3}$$

5. Come nelle soluzioni del compito [1]

$\nabla f = (-y, -x, 2z)$; unico pto stazionario O.

$\mathcal{H}(O) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha autovalori $2, \pm 1$; punto di sella.