1.

Integrando per parti: $-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

la funzione razionale si scompone come $\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.

In definitiva, l'integrale fornisce

$$-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x + \lg|x| - \frac{1}{2}\lg(1+x^2) + c$$

ovvero

$$\lg\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\operatorname{arctg}x}{x} + c = \varphi(x) + c.$$

Per $x \to 0$, $\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$ e dunque $\int_0^1 f(x)\,dx$ non esiste.

Per $x \to +\infty$, $\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2} \sim \frac{\pi}{2x^2}$ e dunque $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ esiste.

Poiché

per $x \to +\infty$ $\varphi(x) \to 0$, $\varphi(1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\lg 2$

si ottiene

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\lg 2.$$

2. Il polinomio caratteristico ha come radici $k=1$, $k=4$.
Quindi una base dello s.v. delle soluzioni dell'eq. omogenea è
$\{e^x, e^{4x}\}$.
Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. completa nella forma
$\bar{y}(x) = x e^x (Ax^2+Bx+C)$. Sostituendo nell'eq. si trova che deve essere

$$\begin{cases} -9A = -3 \\ 6A - 6B = 2 \\ 2B - 3C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ B = 0 \\ C = -1/3. \end{cases}$$

In definitiva:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + \frac{1}{3} x e^x (x^2-1).$$

3. $|a_n| = \frac{\lg n}{n^2}|x|^n$; $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |x|$

Se $|x|<1$, la serie converge, se $|x|>1$ non converge

Se $x=1$, $\frac{\lg n}{n^2} < \frac{n^\alpha}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha}$. Scegliendo $\alpha \in (0,1)$, la serie a secondo membro converge e dunque per confronto converge anche la serie data.

Se $x=-1$, la serie a segno alterno di termine generale $(-1)^n \lg n / n^2$ converge per il t. di Leibniz. L'ipotesi di decrescenza si verifica osservando che per $f(x) = \lg x / x^2$ risulta $f'(x) = \frac{1-2\lg x}{x^3} < 0$ per $x \in U(+\infty)$.

4. Per $x \to +\infty$ $f(x) \sim \frac{1}{e^x}$ e $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ esiste finito

Dunque anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dy$ esiste.

1. Ponendo $\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3$, $dx = 3t^2\,dt$:

$$y = 3\int t \lg(1+t)\,dt.$$

Integrando per parti:

$$y = \frac{3}{2}t^2\lg(1+t) - \frac{3}{2}\int \frac{t^2}{1+t}\,dt = \frac{3}{2}t^2\lg(1+t) - \frac{3}{2}\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \frac{3}{2}(t^2-1)\lg(1+t) - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + c$$

$$= \frac{3}{4}\left(2\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\lg\left(1+\sqrt[3]{x}\right) - \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x}\right) + c.$$

Per $x \to 0$ $f(x) \to 1$ ($x=0$ disc. elim.); $\int_0^1 f(x)\,dx$ esiste in senso proprio

per $x \to +\infty$ $f(x) \sim \frac{\lg x}{3\sqrt[3]{x}} > \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$; $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste.

Utilizzando il calcolo precedente, si trova $I = 3/4$.

2. Il polinomio caratteristico ha come radici $\pm 2i$. Quindi una base dello s.v. delle sol. dell'equazione omogenea è data da $\{\cos 2x, \operatorname{sen} 2x\}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. completa. Passando in campo complesso, il termine noto diventa $(3x^2+4)e^{2ix}$ e la soluzione complessa deve essere della forma $\bar{z} = x(Ax^2+Bx+C)e^{2ix}$. Sostituendo, si trova che deve essere

$$\begin{cases} 12iA = 3 \\ 3A + 4iB = 0 \\ 4iC + 2B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{i}{4} \\ B = \frac{3}{16} \\ C = -\frac{29}{32}i. \end{cases}$$

Dunque, $\bar{y} = \operatorname{Im} \bar{z} = \operatorname{Im} x\left(-\frac{i}{4}x^2 + \frac{3}{16}x - \frac{29}{32}i\right)(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x) =$

$$= \frac{3}{16}x^2 \operatorname{sen} 2x - x\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{29}{32}\right)\cos 2x.$$

A questa soluzione si deve aggiungere la combinazione lineare

[illegible] $(-c\cos 2(x-x_0))$.

3. $|a_n| = \frac{|x|^n}{\sqrt{n}\lg n}$; $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to |x|$

Se $|x|<1$, la serie converge; se $|x|>1$ non converge.

Se $x=1$, $\frac{1}{\sqrt{n}\lg n} > \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. Scegliendo $\alpha<\frac{1}{2}$, si dimostra per confronto che la serie data diverge.

Se $x=-1$, la serie a segno alterno di termine generale $(-1)^n/\sqrt{n}\lg n$ converge per il teorema di Leibniz.

4. La successione è a termini positivi e risulta $a_n \sim \frac{1}{\lg n}$. La serie $\sum_n \frac{1}{\lg n}$ diverge perché $\frac{1}{\lg n} > \frac{1}{n^\alpha}$. Scegliendo $\alpha<1$ si ottiene l'affermazione. Anche la serie $\sum_n a_n$ dunque diverge.