Soluzioni della prova scritta del 13.6.08

[1]

1.

C.E. Deve essere $\left| x^2 - 1 \right| - x + 2 > 0$, cioè $\left| x^2 - 1 \right| > x - 2$.

Se $x < 2$, la disequazione è sicuramente verificata (primo membro positivo, secondo membro negativo)
Se $x \geq 2$, equivale a $x^2 - x + 1 > 0$, che è sempre verificata ($\Delta < 0$).
In conclusione : C.E. = **R**

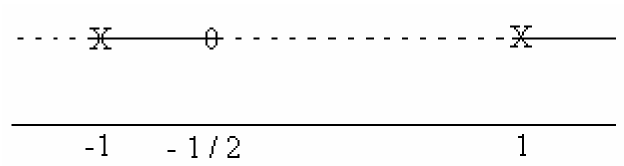
SGN La funzione è positiva o nulla se $\left| x^2 - 1 \right| \geq x - 1$.

Se $x < 1$, la disequazione è verificata in senso stretto.
Se $x = 1$, è verificata come uguaglianza.
Se $x > 1$, equivale a $x^2 - 1 \geq x - 1$, cioè a $x \geq 1$.
In conclusione, la funzione è sempre positiva, eccetto che per $x = 1$ per cui si annulla.

LIM Per $x \to \pm\infty$ $f(x) \approx 2 \log |x| \to +\infty$, senza asintoto ($f(x)/x \to 0$).

DRV
$$f'(x) = \frac{2x \operatorname{sgn}(x^2 - 1) - 1}{\left| x^2 - 1 \right| - x + 2}$$

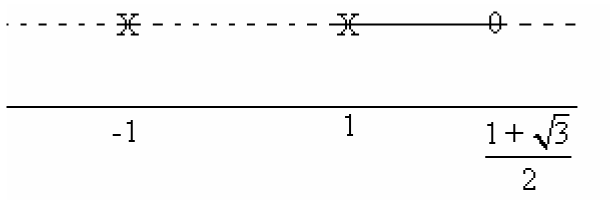
La derivata non è definita per $x = \pm 1$ (punti angolosi).
Il segno dipende solo dal numeratore, dato che il denominatore sappiamo che è sempre positivo.
Distinguendo i valori (1 o -1) di $\operatorname{sgn}(x^2 - 1)$, si stabilisce che il segno della derivata è quello sotto riportato:



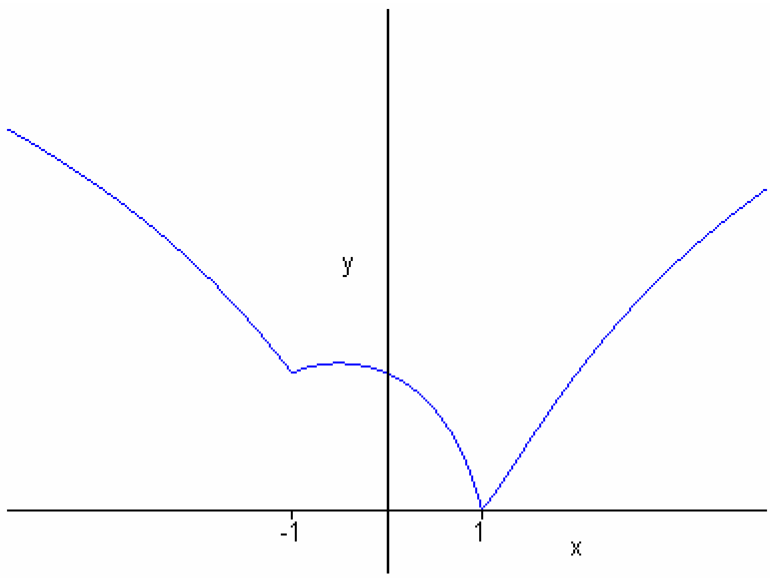
$$f''(x) = \frac{2 \operatorname{sgn}(x^2 - 1)\left(\left| x^2 - 1 \right| - x + 2 \right) - \left(2x \operatorname{sgn}(x^2 - 1) - 1 \right)^2}{\left(\left| x^2 - 1 \right| - x + 2 \right)^2}$$

Svolgendo i calcoli, si trova che il segno della derivata seconda è quello dell'espressione

$2 \operatorname{sgn}(x^2 - 1)(2 + x) - 2x^2 - 3$:



GRAFICO



2.

Posto $t = 3 - x$, ci riconduciamo a calcolare il limite per $t \to 0^+$ della funzione

$$\frac{\log\,(1+t) - e^t + 1}{\frac{\pi}{3}\,\text{sen}\,t\ -\ \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi t}{3}\right)} = \frac{\log\,(1+t) - e^t + 1}{\frac{\pi}{3}\,\text{sen}\,t\ -\ \text{sen}\,\frac{\pi t}{3}}$$

Essendo :

$$\log\,(1+t) = t - t^2/2 + o\,(t^2) \qquad e^t = 1 + t + t^2/2 + o\,(t^2)$$

$$\text{sen}\,t = t - t^3/6 + o\,(t^3) \qquad \text{sen}\,\frac{\pi t}{3} = \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^3\,t^3}{162} + o\,(t^3)$$

il numeratore si approssima con $-t^2$, il denominatore con $\pi^3\,t^3 / 81$, la funzione con $-81 / (\pi^3\,t)$ e dunque il limite vale $-\infty$.

3.

La funzione integrando è discontinua in $x = 1$; trattandosi di una discontinuità di I specie, non influisce sull'esistenza dell'integrale.
Calcoliamo le primitive , integrando per parti :

$$x \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1} + \int \frac{x}{x^2+1}\, dx = x \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{2} \log (x^2 + 1) + c .$$

Si osserva che queste primitive contengono ancora il punto $x = 1$ di discontinuità : è dunque sbagliato calcolare l'integrale a partire dai soli valori delle primitive agli estremi dell'intervallo di integrazione. Scriviamo l'integrale come somma dell'integrale tra 0 e 1 con quello tra 1 e 2 (in entrambi i casi non si deve calcolare il valore per $x = 1$, ma il limite – in un caso da sinistra, nell'altro da destra) :

valore per $x = 2$ $\quad 2 \operatorname{arctg} 3 + \frac{1}{2} \log 5$ $\qquad$ valore per $x = 0$ $\quad 0$

limite da sinistra $\quad -\pi / 2 + \frac{1}{2} \log 2$ $\qquad$ limite da destra $\quad \pi / 2 + \frac{1}{2} \log 2$.

L'integrale vale $2 \operatorname{arctg} 3 + \frac{1}{2} \log 5 - \pi$.

4.

Radici del polinomio caratteristico :

se $0 < k < 1$ $\qquad -1 \pm \sqrt{1-k}$

se $k = 1$ $\qquad -1$ (radice doppia)

se $k > 1$ $\qquad -1 \pm i \sqrt{k-1}$

In corrispondenza si hanno rispettivamente le soluzioni :

$$e^{-x} \left(A e^{\sqrt{1-k}\, x} + B e^{\sqrt{1-k}\, x} \right)$$

$$e^{-x} (A + B x)$$

$$e^{-x} (A \cos \sqrt{k-1}\, x + B \operatorname{sen} \sqrt{k-1}\, x) .$$

Imponendo le condizioni date , nei primi due casi si trova $A = B = 0$.
Nel terzo caso si trova $A = 0$, $B \operatorname{sen} (\sqrt{k-1}\ \pi / 2) = 0$. La seconda equazione ammette soluzioni diverse da $B = 0$ se $\sqrt{k-1}\ \pi / 2 = n \pi$, cioè se $k = 1 + 4 n^2$ con n naturale. In tal caso si trovano le soluzioni $B e^{-x} \operatorname{sen} 2 n x$.

[2]

1.

C.E. Deve essere $\left| x^2 - 2x \right| + 5 - 2x > 0$, cioè $\left| x^2 - 2x \right| > 2x - 5$.

Se $x < 5/2$, la disequazione è sicuramente verificata (primo membro positivo, secondo membro negativo)
Se $x \geq 5/2$, equivale a $x^2 - 4x + 5 > 0$, che è sempre verificata ($\Delta < 0$).
In conclusione : C.E. = **R**

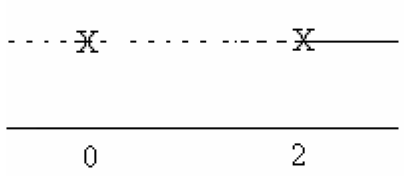
SGN La funzione è positiva o nulla se $\left| x^2 - 2x \right| \geq 2x - 4$.

Se $x < 2$, la disequazione è verificata in senso stretto.
Se $x = 2$, è verificata come uguaglianza.
Se $x > 2$, equivale a $x^2 - 2x \geq 2x - 4$, che è verificata in senso stretto.
In conclusione, la funzione è sempre positiva, eccetto che per $x = 2$ per cui si annulla.

LIM Per $x \to \pm\infty$ $f(x) \approx 2 \log |x| \to +\infty$, senza asintoto ($f(x)/x \to 0$).

DRV $$f'(x) = 2\,\frac{(x-1)\,\mathrm{sgn}(x^2 - 2x) - 1}{\left| x^2 - 2x \right| - 2x + 5}$$

La derivata non è definita per $x = 0$ ed $x = 2$ (punti angolosi).
Il segno dipende solo dal numeratore, dato che il denominatore sappiamo che è sempre positivo.
Distinguendo i valori (1 o -1) di $\mathrm{sgn}(x^2 - 2x)$, si stabilisce che il segno della derivata è quello sotto riportato:

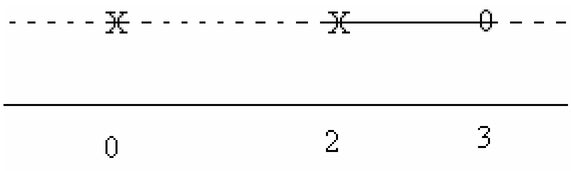


$$f''(x) =$$

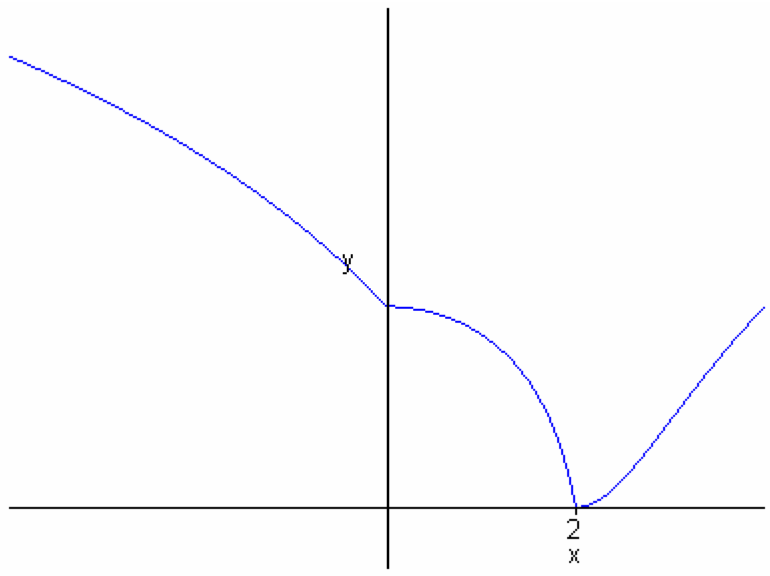
$$= 2\,\frac{\mathrm{sgn}(x^2 - 2x)\left(\left| x^2 - 2x \right| - 2x + 5\right) - 2\left((x-1)\,\mathrm{sgn}(x^2 - 2x) - 1\right)^2}{\left(\left| x^2 - 2x \right| - 2x + 5\right)^2}$$

Svolgendo i calcoli, si trova che il segno della derivata seconda è quello dell'espressione

$\mathrm{sgn}(x^2 - 2x)(1 + 2x) - x^2 + 2x - 4$:



GRAFICO



2.

Essendo :

$$5 \log (1 + 2x) = 10x - 10 x^2 + o (x^2) \qquad 2 \log (1 + 5x) = 10 x - 25 x^2 + o (x^2)$$

$$4 \cos 2 x = 4 - 8 x^2 + 8 x^4/3 + o (x^4) \qquad \cos 4 x = 1 - 8 x^2 + 32 x^4 / 3 + o (x^4)$$

il numeratore si approssima con $225 x^4$, il denominatore con $- 8 x^4 / 3$; il limite vale $-675 / 8$.

3.

La funzione integrando è discontinua in $x = -2$; trattandosi di una discontinuità di I specie, non influisce sull'esistenza dell'integrale.
Calcoliamo le primitive , integrando per parti :

$$x \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{x + 2} - \int \frac{2 x}{x^2 + 4} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{x + 2} - \log (x^2 + 4) + c .$$

Si osserva che queste primitive contengono ancora il punto $x = -2$ di discontinuità : è dunque sbagliato calcolare l'integrale a partire dai soli valori delle primitive agli estremi dell'intervallo di integrazione. Scriviamo l'integrale come somma dell'integrale tra -3 e -2 con quello tra -2 e 0 (in entrambi i casi non si deve calcolare il valore per $x = -2$, ma il limite – in un caso da sinistra, nell'altro da destra) :

valore per $x = 0$ $\quad -\log 4$

valore per $x = -3$ $\quad -3 \operatorname{arctg} 5 - \log 13$

limite da sinistra $\quad -\pi - \log 8$

limite da destra $\quad \pi - \log 8$.

L'integrale vale $3 \operatorname{arctg} 5 + \log 13/4 - \pi$.

4.

Radici del polinomio caratteristico :

se $0 < k < 1/4$ $\qquad \left(1 \pm \sqrt{1 - 4k}\right) / 2$

se $k = 1/4$ $\qquad$ ½ (radice doppia)

se $k > 1/4$ $\qquad \left(1 \pm i\sqrt{4k - 1}\right) / 2$

In corrispondenza si hanno rispettivamente le soluzioni :

$$e^{x/2}\left(A\, e^{\sqrt{1-4k}\; x/2} + B\, e^{-\sqrt{1-4k}\; x/2} \right)$$

$$e^{x/2}\left(A + B x \right)$$

$$e^{x/2}\left(A \cos \sqrt{4k-1}\; x/2 + B \operatorname{sen} \sqrt{4k-1}\; x/2 \right) .$$

Imponendo le condizioni date , nei primi due casi si trova $A = B = 0$.
Nel terzo caso si trova $A = 0$, $B \operatorname{sen} \left(\sqrt{4k-1}\; \pi/4\right) = 0$. La seconda equazione ammette soluzioni diverse da $B = 0$ se $\sqrt{4k-1}\; \pi/4 = n\pi$, cioè se $k = 4n^2 + ¼$ con n naturale. In tal caso si trovano le soluzioni $B\, e^{x/2} \operatorname{sen} 2nx$.