Analisi Matematica - Corsi A , B , R

Prova scritta parziale dell'1.04.08

Soluzioni [1]

1.

Le approssimazioni si riferiscono tutte al caso considerato, cioè sono valide per $x \to 0$:

$\operatorname{sen} x = x - x^3/6 + o(x^4)$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x = x^2/2 - x^4/6 + o(x^4)$

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + o(x^4)$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(x^2/2) = x^2/2 + o(x^4)$

$e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ $\qquad$ $e^{x^2/2} = 1 + x^2/2 + x^4/8 + o(x^4)$

Il numeratore si approssima con $- x^4/8$, il denominatore con $- x^4/8$; il limite vale 1.

2.

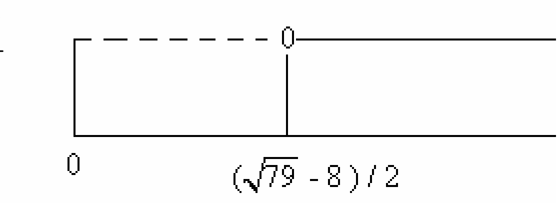
C.E. $\quad$ R ; poiché la funzione è pari , possiamo limitarci a studiarla per $x \geq 0$; i calcoli successivi si riferiscono a questa scelta.

LIM $\quad$ per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \approx 3x \to +\infty$

$$f(x) - 3x = \frac{5 - 7x}{x + 3} - 2\log(x + 3) \to -\infty \text{ non c'è asintoto}$$

$f(0) = 5/3 - 2\log 3 < 0$

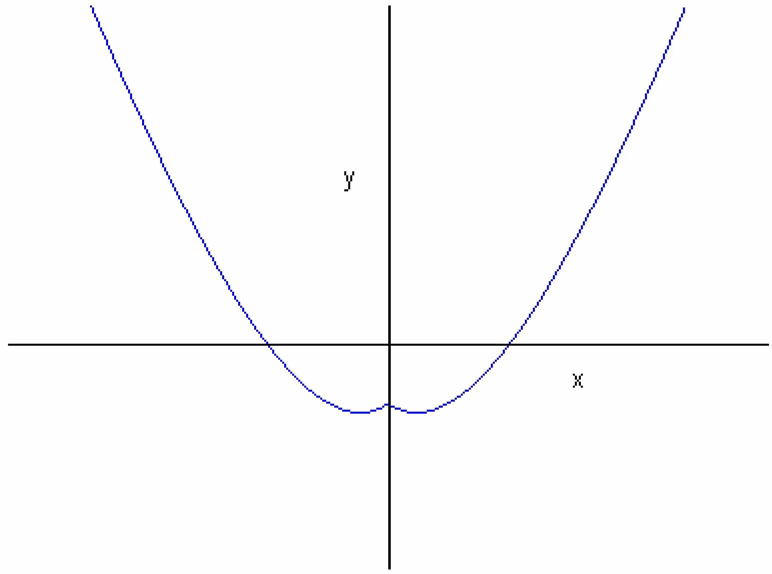
DRV $\quad$ $$f'(x) = \frac{3x^2 + 16x - 5}{(x + 3)^2}$$



Poiché $f'(0^+) = -5/9$, quando si riporta il grafico per simmetria si crea un punto angoloso per $x = 0$.

$$f''(x) = \frac{2(x + 29)}{(x + 3)^3}$$ sempre positiva nel dominio considerato.

GRAFICO



3.

Studio della prolungabilità come funzione continua :

per $x \to 0^+$ $\qquad f(x) = x^3 \log x \to 0$

per $x \to 0^-$ $\qquad f(x) = e^{\sqrt[4]{|x|}\,\log(1+x^4)} - 1 \to 0.$

Dunque la funzione può essere prolungata per continuità per x = 0 con il valore 0.

Calcolo della derivata :

$$f'(x) = \begin{cases} x^2\,(3\log x + 1) & \text{per } x > 0 \\ (1+x^4)^{\sqrt[4]{|x|}} \left(-\dfrac{\log(1+x^4)}{4\,|x|^{3/4}} - \dfrac{4\,|x|^{13/4}}{1+x^4} \right) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Studio della derivabilità per x = 0 :

per $x \to 0^+$ $\qquad f'(x) = x^2\,(3\log x + 1) \to 0$

per $x \to 0^-$ $\qquad f'(x) = f(x) \left(-\dfrac{\log(1+x^4)}{4\,|x|^{3/4}} - \dfrac{4\,|x|^{13/4}}{1+x^4} \right) \to 0.$

Dunque la funzione prolungata per continuità per x = 0 , in questo punto risulta anche derivabile e la sua derivata vale 0.

Soluzioni [2]

1.

Le approssimazioni si riferiscono tutte al caso considerato, cioè sono valide per $x \to 0$:

$\sqrt[3]{1+x} = 1 + x/3 - x^2/9 + o(x^2)$ $\qquad$ $\sqrt[3]{1+3x^2} = 1 + x^2 - x^4 + o(x^4)$

$e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$ $\qquad$ $e^{x^2/2} = 1 + x^2/2 + x^4/8 + o(x^4)$

$\log(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ $\qquad$ $\log(1+4x^2) = 4x^2 - 8x^4 + o(x^4)$

$\text{sen}\, 2x = 2x - 4x^3/3 + o(x^4)$ $\qquad$ $\text{sen}^2\, 2x = 4x^2 - 16x^4/3 + o(x^4)$

Il numeratore si approssima con $-3x^4/2$, il denominatore con $-8x^4/3$; il limite vale 9 / 16.

2.

C.E. $\quad$ R ; poiché la funzione è pari , possiamo limitarci a studiarla per $x \geq 0$; i calcoli successivi si riferiscono a questa scelta.

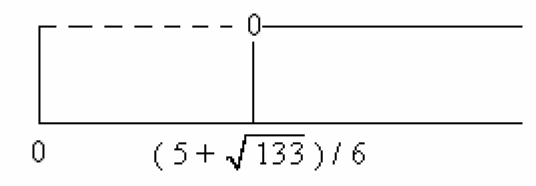
LIM $\quad$ per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \approx 2x/3 \to +\infty$

$$f(x) - 2x/3 = \frac{5/3\, x + 4}{3x+2} - 2\log(3x+2) \to -\infty$$

non c'è asintoto

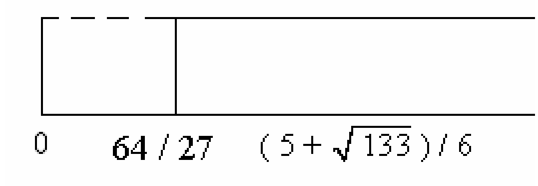
$f(0) = 2(1 - \log 2) > 0$

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{2(3x^2 - 5x - 9)}{(3x+2)^2}$

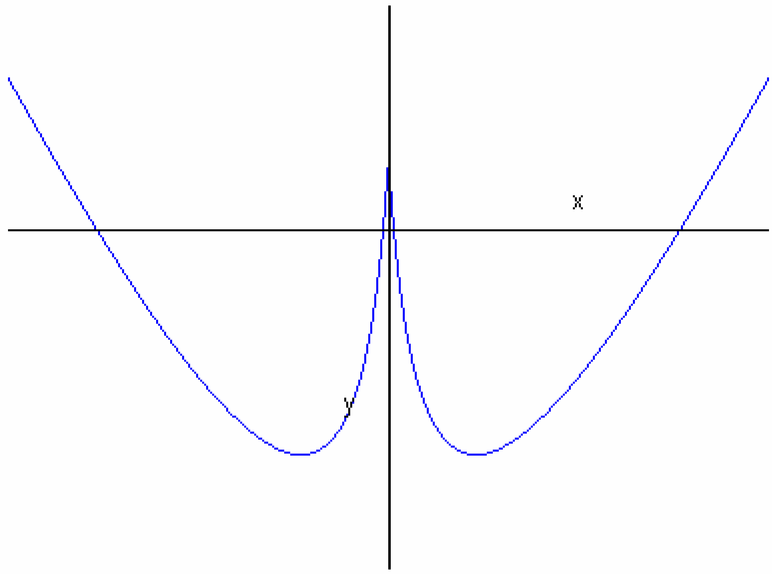


Poiché $f'(0^+) = -9/2$, quando si riporta il grafico per simmetria si crea un punto angoloso per $x = 0$.

$$f''(x) = \frac{2(27x - 64)}{(3x+2)^3}$$



GRAFICO



3.

Studio della prolungabilità come funzione continua :

per $x \to 0^+$ $\quad f(x) = x^2 \log \text{sen} x \to 0$

per $x \to 0^-$ $\quad f(x) = e^{x^{1/3} \log(1+x^3)} - 1 \to 0.$

Dunque la funzione può essere prolungata per continuità per x = 0 con il valore 0.

Calcolo della derivata :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \log|\text{sen}\, x| + \dfrac{x^2 \cos x}{\text{sen}\, x} & \text{per } x > 0 \\ e^{x^{1/3} \log(1+x^3)} \left(\dfrac{x \log(1+x^3)}{3} + \dfrac{3x^{7/3}}{1+x^3} \right) & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Studio della derivabilità per x = 0 :

per $x \to 0^+$ $\quad f'(x) = 2x \log|\text{sen}\, x| + \dfrac{x^2 \cos x}{\text{sen}\, x} \to 0$

per $x \to 0^-$ $\quad f'(x) = e^{x^{1/3} \log(1+x^3)} \left(\dfrac{x \log(1+x^3)}{3} + \dfrac{3x^{7/3}}{1+x^3} \right) \to 0.$

Dunque la funzione prolungata per continuità per x = 0 , in questo punto risulta anche derivabile e la sua derivata vale 0.

Soluzioni [3]

1.

Le approssimazioni si riferiscono tutte al caso considerato, cioè sono valide per $x \to 0$:

$\log(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ $\qquad$ $\log(1+x^2) = x^2 - x^4/2 + o(x^4)$

$\mathrm{tg}\, x = x + x^3/3 + o(x^4)$ $\qquad$ $\mathrm{tg}^2 x = x^2 + 2x^4/3 + o(x^4)$

$\sqrt[3]{1+x} = 1 + x/3 - x^2/9 + o(x^2)$ $\qquad$ $\sqrt[3]{1 - 3x^2/2} = 1 - x^2/2 - x^4/4 + o(x^4)$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Il numeratore si approssima con $-7x^4/6$, il denominatore con $-7x^4/24$; il limite vale 4.

2.

C.E. $\qquad$ $\mathbb{R} - \{0\}$; poiché la funzione è pari , possiamo limitarci a studiarla per $x \geq 0$; i calcoli successivi si riferiscono a questa scelta.

LIM $\qquad$ per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \approx x \to +\infty$

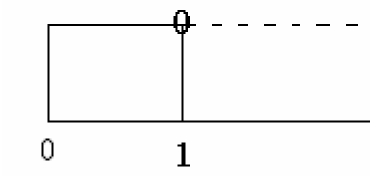
$$f(x) - x = -\frac{x}{1+x^2} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} \to 0^- \text{ ; } y = x \text{ asintoto obliquo}$$

per $x \to 0^+$ $\quad f(x) \to -\pi/2$ (discontinuità eliminabile)

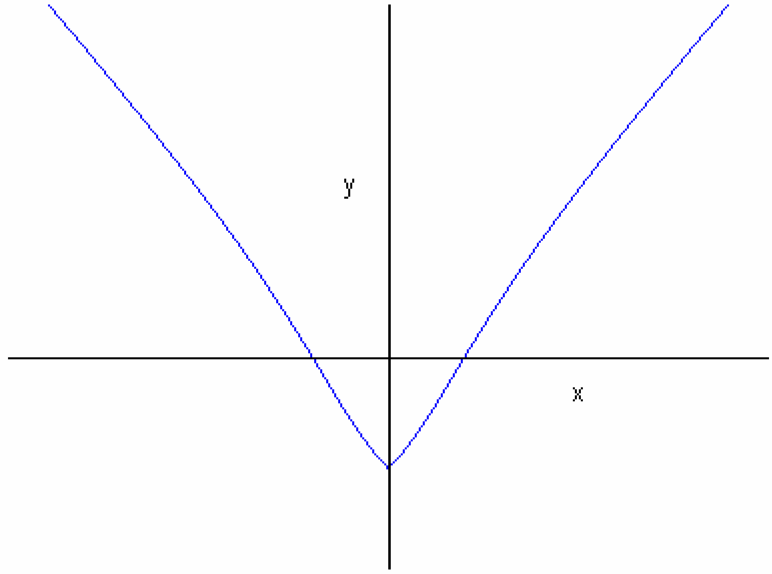
DRV $\qquad$ $f'(x) = \dfrac{x^4 + 4x^2 + 1}{(x^2+1)^2}$ $\qquad$ sempre positiva

Poiché $f'(0^+) = 1$, quando si riporta il grafico per simmetria si crea un punto angoloso per $x = 0$.

$$f''(x) = \frac{4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}$$



GRAFICO



3.

Studio della prolungabilità come funzione continua :

per $x \to 0^+$ $\quad f(x) = e^{\sqrt{x}\,\log(1+x^2)} - 1 \to 0$

per $x \to 0^-$ $\quad f(x) = \operatorname{sen} x^2 \log|x| \to 0.$

Dunque la funzione può essere prolungata per continuità per x = 0 con il valore 0.

Calcolo della derivata :

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{x}\,\log(1+x^2)} \left(\dfrac{\log(1+x^2)}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2x^{3/2}}{1+x^2} \right) & \text{per } x > 0 \\ 2x\cos(x^2)\log|x| + \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Studio della derivabilità per x = 0 :

per $x \to 0^+$ $\quad f'(x) = e^{\sqrt{x}\,\log(1+x^2)} \left(\dfrac{\log(1+x^2)}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2x^{3/2}}{1+x^2} \right) \to 0$

per $x \to 0^-$ $\quad f'(x) = 2x\cos(x^2)\log|x| + \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} \to 0.$

Dunque la funzione prolungata per continuità per x = 0 , in questo punto risulta anche derivabile e la sua derivata vale 0.