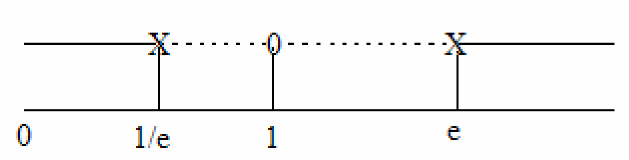
Prova scritta del 31. 01. 2007

Soluzioni

1.

C.E. $\quad x > 0\ ,\ \log x \neq \pm 1 \quad \leftrightarrow \quad x > 0\ ,\ x \neq e\ ,\ x \neq 1/e$

SGN




LIM

per $x \to 0 \qquad f(x) \approx \dfrac{\log^2 x}{|\log x|} = |\log x| \to +\infty$ asintoto verticale

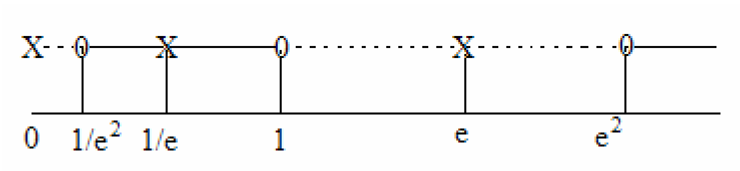
per $x \to 1/e^{\pm} \qquad f(x) \approx \dfrac{1}{|\log x| - 1} \to \mp\infty$ asintoto verticale

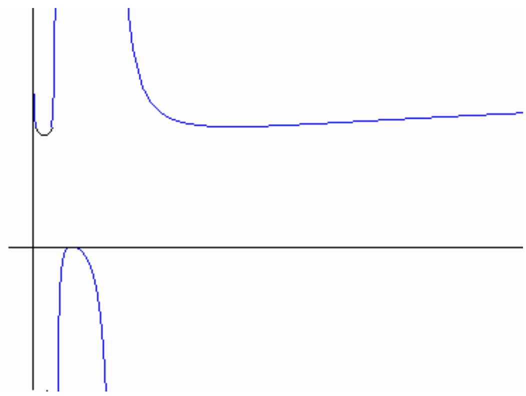
per $x \to e^{\pm} \qquad f(x) \approx \dfrac{1}{|\log x| - 1} \to \pm\infty$ asintoto verticale

per $x \to +\infty \qquad f(x) \approx \dfrac{\log^2 x}{\log x} = \log x \to +\infty$ senza asintoto

DRV

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2\log x}{x}\,(|\log x| - 1) - \dfrac{\log^2 x}{x}\,\mathrm{sgn}\log x}{(|\log x| - 1)^2} = \frac{\log x\,(|\log x| - 2)}{x\,(|\log x| - 1)^2}$$



2.

L'integrale è improprio a causa dell'estremo $-\pi/2$ ( $f(x) \to +\infty$ per $x \to -\pi/2$ ). Vogliamo stabilire l'ordine di infinito di $f(x)$.
Poiché $1 + \cos x \to 1$ , possiamo sostituire il numeratore con 1.
Poniamo poi $x + \pi/2 = t \to 0^+$ : la funzione diventa $1 / ( 1 - \cos t ) \sim 2 / t^2$ ; è dunque un infinito di ordine 2 e questo prova che l'integrale non esiste.

Per calcolare le primitive , poniamo $t = \mathrm{tg}(x/2)$ e usiamo le formule parametriche:

$$\int \frac{1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \dfrac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{4}{(1+t^2)(1+t)^2}\, dt = \int \left\{ \frac{-2}{1+t^2} + \frac{2}{1+t} + \left( \frac{-2}{1+t} \right)' \right\} dt$$

( il termine entro parentesi è la scomposizione di Hermite )

Integrando, si ottiene :

$$-\log(1+t^2) + 2\log|1+t| - \frac{2}{1+t} + c$$

A questo punto ritorniamo alla variabile x , sostituendo t con $\mathrm{tg}(x/2)$ .
Per provare che l'integrale non esiste, facciamo vedere che per $x \to -\pi/2^+$ queste primitive tendono all'infinito; più semplicemente, possiamo utilizzare le primitive nella variabile t , facendo vedere che tendono all'infinito per $t \to \mathrm{tg}(-\pi/4)^+ = -1^+$ :

$$-\log(1+t^2) \to -\log 2$$

$$2\log|1+t| - \frac{2}{1+t} = 2\,\frac{(1+t)\log|1+t| - 1}{1+t} \to -\infty$$

( il fatto che $(1+t)\log|1+t| \to 0$ è conseguenza di un limite notevole ) .

3.

Per derivare la funzione, occorre prima scriverla nella forma esponenziale :

$$f(x) = \exp\left( \frac{\log \cos^3 x}{\mathrm{tg}^3 x} \right) = \exp\left( 3\,\frac{\log \cos x}{\mathrm{tg}^3 x} \right).$$

$$f'(x) = -3\exp\left(3\,\frac{\log\cos x}{\mathrm{tg}^3 x}\right) \cdot \frac{\cos^2 x}{\mathrm{sen}^4 x}\,(\mathrm{sen}^2 x + 3\log\cos x)\,.$$

Limite per $x \to 0^+$

$$3\,\frac{\log\cos x}{\mathrm{tg}^3 x} \approx 3\,\frac{\log(1 - x^2/2)}{x^3} \approx 3\,\frac{-x^2/2}{x^3} = -\frac{3}{2x} \to -\infty$$

$$f(x) \to 0$$

Limite per $x \to \pi/2^-$

$$3\,\frac{\log\cos x}{\mathrm{tg}^3 x} \approx -3\cos^3 x\,\log\cos^3 x \to 0$$

(abbiamo sostituito senx con -1 ; inoltre , poiché $\cos x \to 0$ , ci riconduciamo a calcolare il limite di $t \log t$ per $t \to 0$ ; questo è un limite notevole e vale 0 )

$$f(x) \to 1\,.$$

In conclusione , la funzione data può essere prolungata per continuità agli estremi dell'intervallo ; poiché $f(0) \neq f(\pi/2)$, non vale l'ipotesi del teorema di Rolle.

4.

$$|a_n| \approx \frac{|x^n|}{n\sqrt{n+1}} \approx \frac{|x^n|}{n^{3/2}} = b_n$$

Applichiamo alla serie dei $b_n$ il criterio della radice :

$$\sqrt[n]{b_n} \approx \frac{|x|}{(\sqrt[n]{n})^{3/2}} \to |x|$$

Per $|x| > 1$ la serie data converge , per $|x| < 1$ la serie non converge.
Per $x = 1$ , $a_n \sim 1/n^{3/2}$ : la serie converge
Per $x = -1$ , $a_n = (-1)^n / n\sqrt{n+1}$ : la serie converge per il criterio di Leibniz.