**Analisi Matematica - C. di L. in Informatica**

**Corsi A , B , C**

**Soluzioni della prova scritta dell' 11 . 1 . 07**

**1.**

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2+2) & \text{se } x \le 0 \text{ oppure } x \ge 3 \\ \log(-x^2+6x+2) & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$$

C.E.

I caso : $\begin{cases} x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty) \\ x^2+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

II caso : $\begin{cases} x \in (0, 3) \\ -x^2+6x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 3)$

In conclusione , C.E. = **R** .

SEGNO

Studiamo la condizione $f(x) \ge 0$ .

I caso : $\begin{cases} x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty) \\ x^2+2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

II caso : $\begin{cases} x \in (0, 3) \\ -x^2+6x+2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 3)$

In conclusione è sempre $f(x) > 0$.

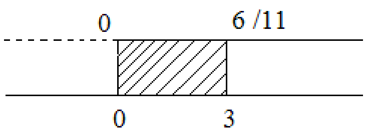
LIMITI

Per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to +\infty$ senza asintoto

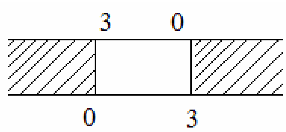
$f(0) = \log 2$ , $f(3) = \log 11$.

DERIVATA

I caso : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$

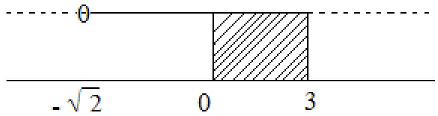



II caso : $f'(x) = \dfrac{6-2x}{-x^2+6x+2}$

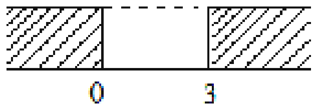


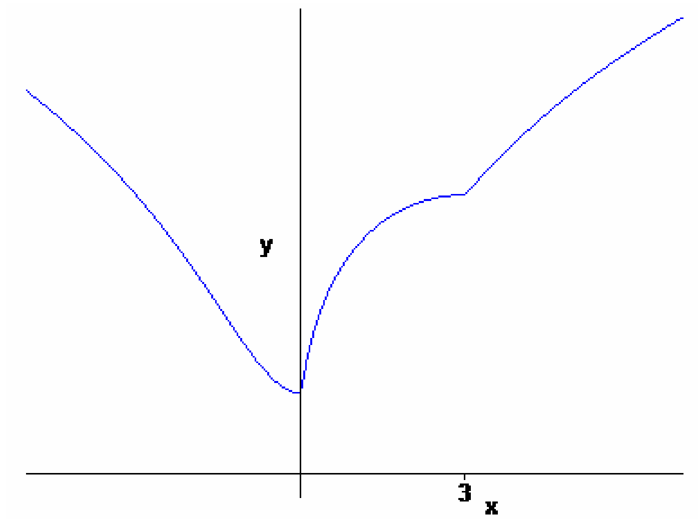
DERIVATA SECONDA

I caso : $f''(x) = \dfrac{2(2 - x^2)}{(x^2 + 2)^2}$




II caso : $f''(x) = \dfrac{2(-x^2 + 6x - 20)}{(-x^2 + 6x + 2)^2}$




**2.**

Studiamo l'equazione omogenea; il polinomio caratteristico $k^2 + 1$ ha le radici $\pm i$, a cui corrispondono le soluzioni reali cos x , sen x .
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, passiamo in campo complesso con termine noto $e^{2ix}$; poiché 2i non è radice del polinomio , cerchiamo una soluzione nella forma $A e^{2ix}$. Sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere $A = -1/3$ . Alla soluzione complessa - $-1/3\, e^{2ix}$ corrisponde la soluzione reale $-1/3 \cos 2x$.
L'integrale generale dell'equazione si scrive dunque nella forma

$$y(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x - 1/3 \cos 2x .$$

Calcoliamo la derivata :

$$y'(x) = -A \operatorname{sen} x + B \cos x + 2/3 \operatorname{sen} 2x .$$

Imponendo le condizioni iniziali , si ottiene $A = 1/3$ , $B = 0$.
La soluzione del problema di Cauchy è dunque la funzione

$$y(x) = 1/3 \cos x - 1/3 \cos 2x .$$

**3.**

L'integrale è improprio solo perché esteso ad una semiretta (non ci sono punti di discontinuità) . Per $x \to \infty$ $f(x) \approx \log x / x^3 < x / x^3 = 1 / x^2$ ; l'esistenza dell'integrale segue dal criterio del confronto.

Per quanto riguarda il calcolo delle primitive, integrando per parti si ottiene :

$$-\frac{1}{2\,(x-3)^2}\,\log(x-5) + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-3)^2\,(x-5)}\ .$$

Il nuovo integrale si calcola con il metodo di scomposizione di Hermite , essendo

$$\frac{1}{(x-3)^2\,(x-5)} = \frac{1/4}{x-5} - \frac{1/4}{x-3} + \left(\frac{1/2}{x-3}\right)'\ .$$

In definitiva, le primitive sono :

$$-\frac{1}{2\,(x-3)^2}\,\log(x-5) + \frac{1}{8}\log(x-5) - \frac{1}{8}\log(x-3) + \frac{1}{4\,(x-3)} + c\ .$$

L'integrale vale ( log 3 ) / 8 - ( 1 / 1 2 ) .

**4.**

$$f(x) = \exp\left(\frac{\log\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)}{\operatorname{tg}x}\right).$$

Per $x \to 0$ $\dfrac{\log\left(\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}\right)}{\operatorname{tg}x} \sim \dfrac{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x} \sim \dfrac{\frac{1+x}{1-x}-1}{x} = \dfrac{2x}{x\,(1-x)} \to 2$

$f(x) \to e^{2}$ .