Prova scritta del 15 settembre 2006

Soluzioni

1.

Possiamo studiare la funzione senza il valore assoluto: la funzione data coincide con questa dove sen x ≥ 0 , ne è l'opposta (e quindi il suo grafico si ottiene mediante rotazione attorno all'asse x) dove sen x < 0 .
Inoltre la funzione è periodica di periodo 2π: basta quindi studiarla in un intervallo di ampiezza il periodo, ad esempio in $[0 , 2\pi]$.
Studiamo dunque la funzione

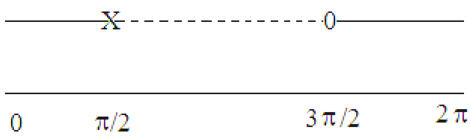
$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{1 - \text{sen } x} \quad , \quad x \in [0 , 2\pi]$$

C.E. $\qquad x \neq \pi/2$

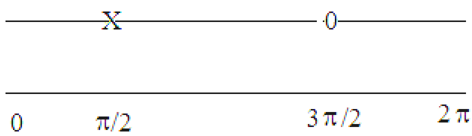
SGN $\qquad$ è sempre positiva, eccetto per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ che sono zeri della funzione

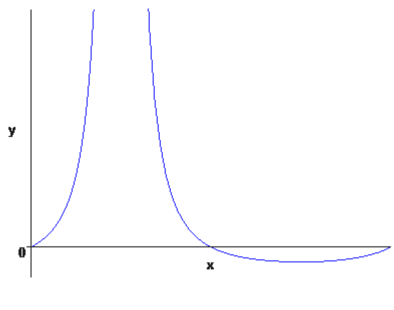
LIM $\qquad$ per $x \to \pi/2 \quad f(x) \to +\infty$ $\quad$ asintoto verticale

DRV $\qquad f'(x) = \dfrac{\cos x}{(1 - \text{sen } x)^2}$

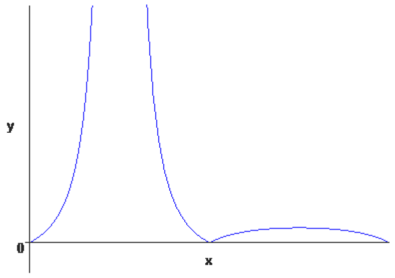


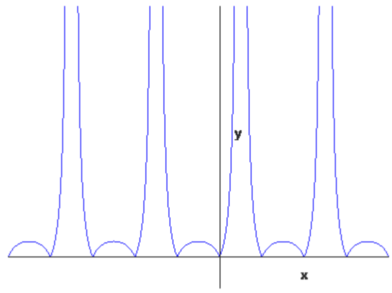
$$f''(x) = \frac{\text{sen}^2 x - \text{sen } x + 2\cos^2 x}{(1 - \text{sen } x)^3} = \frac{-\text{sen}^2 x - \text{sen } x + 2}{(1 - \text{sen } x)^3}$$





Per trovare il grafico della funzione di partenza, ruotiamo attorno all'asse x la parte di grafico situata nel semipiano delle ordinate negative: questo crea un punto angoloso per $x = \pi$; ripetendo il grafico per periodicità, i punti angolosi si presentano in corrispondenza di tutti i valori $x = k\,\pi$.
Nella rotazione, la funzione da convessa che era diventa concava nell'intervallo $[\,\pi\,,\,2\pi\,]$, come pure negli intervalli ad esso corrispondenti per periodicità.





2.

(a) L'integrale è improprio, perché esteso ad un intervallo non limitato. Occorre studiare il comportamento della funzione all'infinito. Poiché per $x \to +\infty$ risulta

$$f(x) \sim \frac{2\log x}{x^3} \leq \frac{2x^{\alpha}}{x^3} = \frac{2}{x^{3-\alpha}}$$

per ogni $\alpha > 0$, se scegliamo un valore di α per cui la funzione $2/x^{3-\alpha}$ risulta integrabile, la stima ottenuta permette di concludere che lo è anche la funzione data. Per ottenere questo dobbiamo scegliere α in modo che sia $3 - \alpha > 1$, cioè $0 < \alpha < 2$.

(b) Ponendo $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$, $\log x = \log\sqrt{x^2} = \log t/2$, si ottiene

$$\int_1^{\infty} \frac{\log t}{2(1+t)^2}\,dt \quad .$$

Integrando per parti :

$$-\frac{1}{2(1+t)}\log t + \int \frac{dt}{2(1+t)\,t} \quad .$$

Poiché $\dfrac{1}{2(1+t)\,t} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{1+t}\right)$, per le primitive cercate si ottiene (a meno di una costante additiva)

$$- \frac{\log t}{2(1+t)} + \frac{1}{2} \log \frac{t}{1+t} = .$$

Poiché questa funzione tende a 0 per $t \to +\infty$, per l'integrale si ottiene il valore log2 / 2.

3.

Il polinomio caratteristico $k^2 + 2k + 3$ ha radici complesse $-1 \pm \sqrt{2}\, i$, cui corrispondono per l'equazione omogenea la base di soluzioni data da $e^{-x} \cos \sqrt{2}\, x$, $e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa, passiamo in campo complesso riscrivendo l'equazione nella forma $z'' + 2z' + 3z = \exp(ix)$ e di questa equazione cerchiamo una soluzione nella forma $A \exp(ix)$. Sostituendo nell'equazione, si trova che deve essere $A = 1/[2(1+i)] = (1-i)/4$.
Dunque :

$$\bar{y}(x) = \operatorname{Re}\left\{ \frac{1-i}{4} (\cos x + i \operatorname{sen} x) \right\} = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{4}.$$

In definitiva, l'integrale generale dell'equazione è dato da:

$$y(x) = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{4} + c_1 e^{-x} \cos \sqrt{2}\, x + c_2 e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x .$$

Dopo averne calcolato la derivata :

$$y'(x) = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{4} - c_1 e^{-x} (\cos \sqrt{2}\, x + \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}\, x) + c_2 e^{-x} (-\operatorname{sen} \sqrt{2}\, x + \sqrt{2} \cos \sqrt{2}\, x)$$

possiamo imporre le condizioni iniziali, trovando che deve essere $c_1 = -1/4$, $c_2 = \sqrt{2}/4$.

4.

- Riscritta la funzione nella forma esponenziale

$$f(x) = \exp\left(\frac{\log(1 + \operatorname{sen} x \log x)}{\operatorname{sen} x} \right),$$

si ottiene

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{\left(\dfrac{\cos x \log x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \operatorname{sen} x \log x} \right) \operatorname{sen} x - \log(1 + \operatorname{sen} x \log x) \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \right)$$

- Per $x \to 0$ $x \log x \to 0$ e dunque

$$\exp\left(\frac{\log(1+\operatorname{sen} x \log x)}{\operatorname{sen} x}\right) \sim \exp\left(\frac{\log(1+x\log x}{x}\right) \sim \exp\left(\frac{x\log x}{x}\right) = x \to 0 \quad .$$

Per $x \to \pi$ $\quad$ $\operatorname{sen} x \sim \pi - x$ (ad esempio , utilizzando la formula di Taylor) e dunque

$$\exp\left(\frac{\log(1+(\pi - x)\log\pi)}{\pi - x}\right) \sim \exp\left(\frac{(\pi - x)\log\pi}{\pi - x}\right) = \pi \quad .$$

Dunque la funzione data si può prolungare per continuità in $x = 0$ con il valore 0 e in $x = \pi$ con il valore π .