Prova scritta del 21 luglio 2006

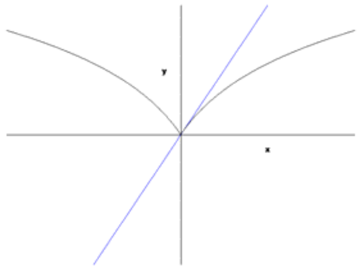
Soluzioni (fila 1)

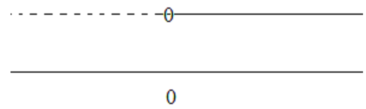
1.

C.E. R

non sono presenti simmetrie

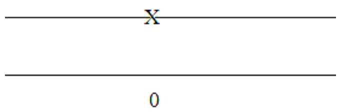
SGN si determina graficamente confrontando $\log (1 + |x|)$ con x :





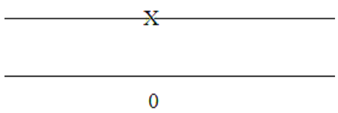
LIM per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pm\infty$ senza asintoto

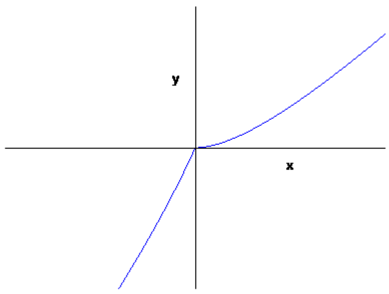
DRV $f'(x) = 1 - \dfrac{\operatorname{sgn} x}{1 + |x|}$



$x = 0$ punto angoloso

$$f''(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^2}$$





2.

Poiché $1 - x + x^2 > 0$ per ogni x , la successione è ben definita ed è positiva.

$a_{n+1} \geq a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq 1$

$a_n < 1$ si verifica per induzione.

In conclusione, la successione è crescente e limitata superiormente; ammette quindi limite, che è dato dall'unico punto fisso : $L = 1$. Per le proprietà delle successioni monotòne, 1 è anche l'estremo superiore, mentre il massimo non esiste; inoltre il minimo e l'estremo inferiore sono il primo termine della successione, cioè ½ .

3.

(a) Il punto di discontinuità è $x = \pi / 2$. Poiché per $x \to \pi / 2$ risulta $f(x) \sim 1 / (2 \cos x) \sim - 1/(2x)$ (l'ultimo passaggio si ottiene, ad esempio, con la formula di Taylor). Dunque la funzione non è integrabile, perché infinita di ordine 1.

(b) Ponendo prima sen $x = t$, $\cos x \, dx = dt$ e poi $t^2 = z$, $2t\,dt = dz$, si ottiene

$$\int_{\sqrt{3}/2}^{1} \frac{2 - t^2}{2t(1 - t^2)} dt = \frac{1}{4}\int_{3/4}^{1} \frac{2 - z}{z(1 - z)} dz .$$

Poiché $\dfrac{z - 2}{z(z - 1)} = \dfrac{2}{z} - \dfrac{1}{z - 1}$, una primitiva è $2 \log|z| - \log|z - 1|$ che diverge per $x \to 1$.

4.

Con le notazioni consuete : $a(x) = 1 / \sqrt{x}$, $A(x) = 2\sqrt{x}$.

$(y(x) \exp(2\sqrt{x}))' = \sqrt{x} \exp(2\sqrt{x})$.

Per calcolare $\int \sqrt{x}\, e^{2\sqrt{x}} dx$, poniamo $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, ottenendo $\int 2t^2 e^{2t} dt$. Questo integrale si può calcolare integrando due volte per parti, ottenendo

$$(t^2 - t + ½)\, e^{2t} + c = (x - \sqrt{x} + ½)\, e^{2\sqrt{x}} + c .$$

In definitiva , $y(x) = x - \sqrt{x} + ½ + c\, e^{-2\sqrt{x}}$.

Prova scritta del 21 luglio 2006

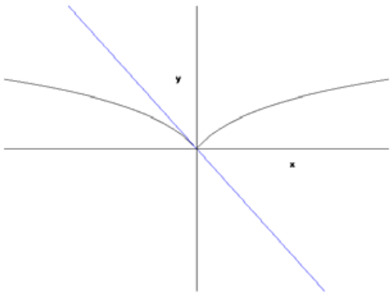
Soluzioni (fila 2)

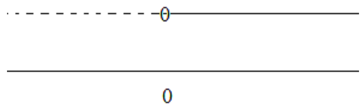
1.

C.E. R

non sono presenti simmetrie

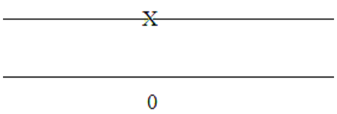
SGN si determina graficamente confrontando $\log(1 + |x|)$ con $-x$:





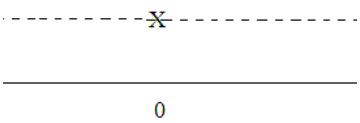
LIM per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to \pm\infty$ senza asintoto

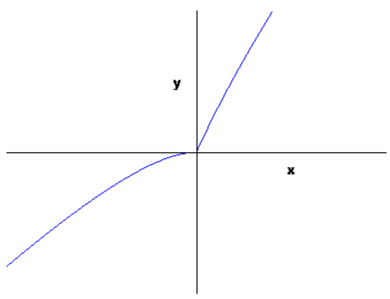
DRV $f'(x) = 1 + \dfrac{\operatorname{sgn} x}{1 + |x|}$



$x = 0$ punto angoloso

$$f''(x) = \frac{-1}{(1 + |x|)^2}$$





2.

Poiché $4 - x + x^2 > 0$ per ogni x , la successione è ben definita ed è positiva.

$a_{n+1} \geq a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq 4$

$a_n < 4$ si verifica per induzione.

In conclusione, la successione è crescente e limitata superiormente; ammette quindi limite, che è dato dall'unico punto fisso : $L = 4$. Per le proprietà delle successioni monotòne, 4 è anche l'estremo superiore, mentre il massimo non esiste; inoltre il minimo e l'estremo inferiore sono il primo termine della successione, cioè 2 .

3.

(a) Il punto di discontinuità è $x = \pi / 2$. Poiché per $x \to \pi / 2$ risulta $f(x) \sim 1 / \cos x \sim - 1 / x$ (l'ultimo passaggio si ottiene, ad esempio, con la formula di Taylor). Dunque la funzione non è integrabile, perché infinita di ordine 1.

(b) Ponendo prima $\cos x = t$, $- \operatorname{sen} x \, dx = dt$ e poi $t^2 = z$, $2t\,dt = dz$, si ottiene

$$\int_0^{1/2} \frac{2 - t^2}{2t(1 - t^2)}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{1/4} \frac{2 - z}{z(z-1)}\,dz .$$

Poiché $\dfrac{2 - z}{z(z - 1)} = -\dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z - 1}$, una primitiva è $-2 \log|z| + \log|z - 1|$ che diverge per $x \to 0$.

4.

Con le notazioni consuete : $a(x) = - 1 / \sqrt{x}$, $A(x) = - 2\sqrt{x}$.

$(y(x) \exp(-2\sqrt{x}))' = \sqrt{x} \exp(-2\sqrt{x})$.

Per calcolare $\int \sqrt{x}\, e^{-2\sqrt{x}}\,dx$, poniamo $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, ottenendo $\int 2t^2 e^{-2t}\,dt$. Questo integrale si può calcolare integrando due volte per parti, ottenendo

$$(-t^2 - t - \tfrac{1}{2})\, e^{-2t} + c = -(x + \sqrt{x} + \tfrac{1}{2})\, e^{-2\sqrt{x}} + c .$$

In definitiva , $y(x) = - x - \sqrt{x} - \tfrac{1}{2} + c\, e^{2\sqrt{x}}$.