Prova scritta del 30 giugno 2006

Soluzioni (fila 1)

1.

C.E. $\quad \left| x^2 - 4 \right| \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 \geq 3$ opp. $x^2 - 4 \leq -3$

$x \in (-\infty , -\sqrt{7}\,] \cup [\,-1 , 1\,] \cup [\,\sqrt{7} , +\infty)$

funzione pari : si studia per $x \in [\,0 , 1\,] \cup [\,\sqrt{7} , +\infty)$

SGN $\quad$ sempre positiva; nulla per $x = 1$, $x = \sqrt{7}$

LIM $\quad$ per $x \to +\infty \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 7} \approx x \to +\infty$

$f(x) - x = -7 / (\sqrt{x^2 - 7} + x) \to 0^-$

La bisettrice y = x è asintoto obliquo; il grafico si avvicina all'asintoto da sotto.

DRV $\quad f'(x) = x \,\mathrm{sgn}(x^2 - 4) / \sqrt{\left| x^2 - 4 \right| - 3}$

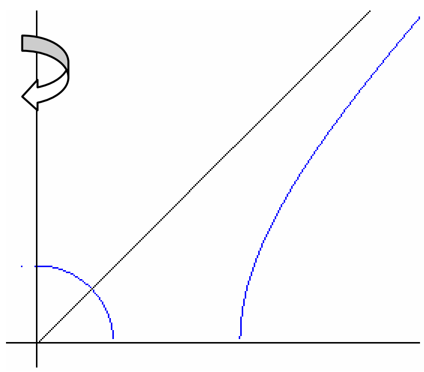
0-------- ∞ $\qquad$ ∞ ________________

0 $\qquad$ 1 $\qquad$ √ 7

$$f''(x) = \frac{\mathrm{sgn}(x^2 - 4)\left(\left| x^2 - 4 \right| - 3 \right) - x^2}{\left(\left| x^2 - 4 \right| - 3 \right)^{3/2}} = \frac{-4 - 3\,\mathrm{sgn}(x^2 - 4)}{\left(\left| x^2 - 4 \right| - 3 \right)^{3/2}}$$

0-------- ∞ $\qquad$ ∞ ------------------

0 $\qquad$ 1 $\qquad$ √ 7



2.

Poniamo z = x + i y . Dopo aver separato parte reale da parte immaginaria, l'equazione fornisce il sistema :

$$\begin{cases} 1 - x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = -2x \\ -2xy = -2y \end{cases}$$

da cui si ottiene ulteriormente

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + \sqrt{1 + y^2} = -2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1 - x^2 + |x| = -2x \\ y = 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema non ammette soluzioni; il secondo, distinguendo il segno di x, si può riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 1 = 0 \\ x \geq 0 \ , \ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x < 0 \ , \ y = 0 \end{cases} .$$

In definitiva, si trova $z = (3 + \sqrt{13})/2$ oppure $z = (1 - \sqrt{5})/2$.

3.

Integrando per parti, si ottiene

$$\frac{x^2}{2} \log(\sqrt{x+2} + 1) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 1} \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \, dx .$$

Nell'integrale che rimane da calcolare si pone $\sqrt{x+2} = t$, $x = t^2 - 2$, $dx = 2t\,dt$, ottenendo

$$\frac{1}{2} \int \frac{(t^2 - 2)^2}{t + 1} \, dt .$$

Per completare il calcolo, eseguiamo la divisione tra numeratore e denominatore in modo da ottenere :

$$\frac{1}{2} \int \left(t^3 - t^2 - 3t + 3 + \frac{1}{t+1} \right) dt .$$

A questo punto si procede senza difficoltà.

4.

Se $x = 0$ non è verificata la condizione necessaria e la serie diverge. Se $x \neq 0$ si ha :

$$a_n \sim \frac{n^n}{n^{2+n} x^{2n}} = \frac{1}{n^2 x^2}$$

e dunque la serie converge perché equivalente ad una serie armonica di esponente $\alpha > 1$.

Prova scritta del 30 giugno 2006

Soluzioni (fila 2)

1.

C.E. $\quad \left| x^2 - 9 \right| \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 \geq 4$ opp. $x^2 - 9 \leq -4$

$x \in (-\infty, -\sqrt{13}\,] \cup [\,-\sqrt{5}, \sqrt{5}\,] \cup [\,\sqrt{13}, +\infty)$

funzione pari : si studia per $x \in [\,0, \sqrt{5}\,] \cup [\,\sqrt{13}, +\infty)$

SGN $\quad$ sempre positiva; nulla per $x = \sqrt{5}$, $x = \sqrt{13}$

LIM $\quad$ per $x \to +\infty \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 13} \approx x \to +\infty$

$f(x) - x = -13 / (\sqrt{x^2 - 13} + x) \to 0^-$

La bisettrice $y = x$ è asintoto obliquo; il grafico si avvicina all'asintoto da sotto.

DRV $\quad f'(x) = x \operatorname{sgn}(x^2 - 9) / \sqrt{\left| x^2 - 9 \right| - 4}$

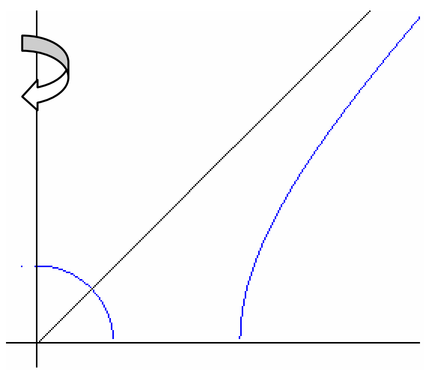
0-------- ∞ $\qquad$ ∞ ________________

0 $\qquad$ √5 $\qquad$ √13

$$f''(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x^2 - 9)\left(\left| x^2 - 9 \right| - 4\right) - x^2}{\left(\left| x^2 - 9 \right| - 4\right)^{3/2}} = \frac{-9 - 4\operatorname{sgn}(x^2 - 9)}{\left(\left| x^2 - 9 \right| - 4\right)^{3/2}}$$

0-------- ∞ $\qquad$ ∞ ------------------

0 $\qquad$ √5 $\qquad$ √13



2.

Poniamo $z = x + i\,y$. Dopo aver separato parte reale da parte immaginaria, l'equazione fornisce il sistema :

$$\begin{cases} 1 - x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} + x = 2x \\ -2xy - y = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene ulteriormente

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + \sqrt{1/4 + y^2} = -5/4 \\ x = -1/2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 1 - x^2 + |x| + x = 2x \\ y = 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema non ammette soluzioni; il secondo, distinguendo il segno di x , si può riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ x \geq 0 \quad , \quad y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0 \\ x < 0 \quad , \quad y = 0 \end{cases} .$$

In definitiva, si trova $z = 1$ oppure $z = -1 - \sqrt{2}$.

3.

Integrando per parti, si ottiene

$$x \log (2 + \sqrt{x + 1}) - \int \frac{x}{2 + \sqrt{x + 1}} \frac{1}{2 \sqrt{x + 1}} dx .$$

Nell'integrale che rimane da calcolare si pone $\sqrt{x + 1} = t$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t\,dt$, ottenendo

$$\int \frac{t^2 - 1}{t + 2} dt .$$

Per completare il calcolo, eseguiamo la divisione tra numeratore e denominatore in modo da ottenere :

$$\int (t - 2 + \frac{3}{t + 2}) dt .$$

A questo punto si procede senza difficoltà.

4.

Se $x = 0$, $a_n \sim \frac{1}{n^n n^3}$; applicando il criterio della radice, si ottiene 0 come limite e dunque la serie converge.

Se $x \neq 0$, $a_n \sim \frac{x^{2n} n^n}{n^{3+n}} = \frac{x^{2n}}{n^3}$; applicando il criterio della radice, si ottiene x^2 come limite e dunque la serie converge per $-1 < x < 1$, diverge per $x < -1$ e per $x > 1$.

Per $x = \pm 1$ si ottiene $a_n \sim \frac{1}{n^3}$ e dunque la serie converge.

e dunque la serie converge perché equivalente ad una serie armonica di esponente $\alpha > 1$.