Soluzioni della prova scritta parziale n.3 del 4. 4. 06 - Fila 1

1.

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + o(x^8)$$

$$\sqrt{1 - x^4} = 1 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{8} + o(x^8)$$

$$\operatorname{sen} x^2 = x^2 + o(x^4)$$

$$\log^2(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11\, x^4}{24} + o(x^4)$$

$$f(x) \approx \frac{x^8/6}{-x^3} \to 0$$

2.

Dobbiamo calcolare il limite per $x \to 0$ da entrambe le direzioni :

$$(\cos x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\log \cos x}{x}\right) \approx \exp\left(\frac{\cos x - 1}{x}\right) \approx \exp\left(\frac{-x^2/2}{x}\right) \to 1$$

$$\frac{x^2}{2(1 - \cos x)} \approx \frac{x^2}{x^2} \to 1 .$$

La funzione si può prolungare con continuità in $x = 0$, definendo $f(0) = 1$.

La derivata per $x \neq 0$ è data da :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(1-\cos x) - x^2 \operatorname{sen} x}{2(1-\cos x)^2} & \text{se } -\pi/2 \le x < 0 \\[2ex] (\cos x)^{1/x}\, \dfrac{-x \operatorname{tg} x - \log \cos x}{x^2} & \text{se } 0 < x \le \pi/2 \end{cases} .$$

Per vedere se esiste anche per $x = 0$, dobbiamo calcolare il limite della derivata per $x \to 0$ da entrambe le direzioni : lo faremo utilizzando il teorema dell'Hôpital , dopo aver sostituito i fattori $(\cos x)^{1/x}$ con il suo limite 1 e $(1 - \cos x)^2$ con $x^4/4$.

Per $x \to 0^-$

$$\frac{2x(1-\cos x) - x^2 \operatorname{sen} x}{x^4/2} = \frac{4(1-\cos x) - 2x \operatorname{sen} x}{x^3} \underset{H}{=} \frac{2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x}{3x^2} \underset{H}{=} \frac{2x \operatorname{sen} x}{6x} \to 0$$

Per $x \to 0^+$

$$\frac{-x \operatorname{tg} x - \log \cos x}{x^2} \underset{H}{=} \frac{-x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{2x} \to -1/2 .$$

Nel punto x = 0 la funzione non è derivabile (punto angoloso) .

3.

La funzione è pari ed ha periodo π : basterà dunque studiarla per $0 \le x \le \pi/2$.

C.E. $\quad \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x > 0 \iff 1 - 2\cos^2 x > 0 \iff -1/\sqrt{2} < \cos x < 1/\sqrt{2} \iff$
$x \in (\pi/4, \pi/2]$

SGN $\quad f(x) \ge 0 \iff \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \ge 1 \iff 1 - 2\cos^2 x \ge 1 \iff -2\cos^2 x \ge 0$
La funzione è sempre negativa , eccetto che per $x = \pi/2$ in cui si annulla

LIM $\quad$ per $x \to \pi/4 \quad f(x) \to -\infty$

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{4 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}$

Nel C.E. la derivata è sempre positiva ; si annulla per $x = \pi/2$.
Dunque nel CE la funzione è crescente ed assume valore massimo per $x = \pi/2$.

DRV² $\quad f''(x) = -4 \dfrac{(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)^2 + 4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)^2}$
La derivata seconda è sempre negativa e dunque la funzione è sempre concava.