Analisi Matematica I C

Soluzioni della prova scritta dell' 1 . 02 . 2006

1.

Possiamo procedere in due modi diversi , tra loro equivalenti :

- Studiare la funzione $h(x) = \begin{cases} e^{-2x}(4x - 3x^2) & \text{per } x \in [0, 4/3] \\ e^{-2x}(3x^2 - 4x) & \text{altrimenti} \end{cases}$
- Studiare direttamente la funzione data . E' questo il procedimento che riportiamo di seguito.

C.E. $\quad R$

Segno $\quad f(x) \geq 0$ sempre , $f(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = 4/3$

Limiti $\quad$ per $x \to +\infty \quad f(x) \to 0$

per $x \to -\infty \quad f(x) \to +\infty$, $f(x)/x \to -\infty$ (non c'è asintoto)

Derivata $\quad f'(x) = -2e^{-2x}\left|4x - 3x^2\right| + e^{-2x}(4 - 6x)\,\mathrm{sgn}(4x - 3x^2) =$

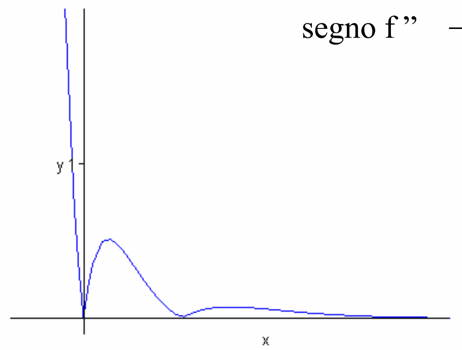
$$= 2e^{-2x}\mathrm{sgn}(4x - 3x^2)\,(3x^2 - 7x + 2)$$

Definita per $x \neq 0$ e per $x \neq 4/3$ (punti angolosi)

segno f ' $\quad$ ------X——0------------X———0-----------

$\qquad\qquad$ 0 $\quad$ 1/3 $\qquad$ 4/3 $\quad$ 2

Derivata seconda $\quad f''(x) = 2e^{-2x}\mathrm{sgn}(4x - 3x^2)\,(-6x^2 + 20x - 11)$



segno f " $\quad$ ——X-------------0—— X------------0——

$\qquad\qquad$ 0 $\qquad$ α $\quad$ 4/3 $\qquad$ β

$\alpha = (10 - \sqrt{34})/6$, $\beta = (10 + \sqrt{34})/6$

2.

Poniamo $\sqrt{x^2 - 1} = x + t$, da cui segue :

$$x = -\frac{1 + t^2}{2t} \quad , \quad dx = \frac{1 - t^2}{2t^2}\,dt \quad , \quad \sqrt{x^2 - 1} = \frac{t^2 - 1}{2t} .$$

Sostituendo , si ottiene : $\displaystyle\int \frac{2}{t^2 + 1}\,dt = \mathrm{arctg}\,t + c = \mathrm{arctg}(\sqrt{x^2 - 1} - x) + c$.

3.

Risolviamo per prima l'equazione omogenea : il polinomio caratteristico associato $k^2 + 4$ ha come radici la coppia coniugata $\pm 2i$. Due soluzioni complesse dell'equazione omogenea sono dunque le funzioni $\cos 2x \pm i \,\text{sen}\, 2x$ e da queste deduciamo le due soluzioni reali $\cos 2x$, $\text{sen}\, 2x$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione completa , cerchiamone una dell'equazione complessa $z'' + 4z = e^{ix}$ nella forma $A e^{ix}$. Sostituendo nell'equazione , si trova che deve essere $A = 1/3$. Dalla soluzione complessa $e^{ix}/3$ si deduce una soluzione reale dell'equazione data prendendone la parte immaginaria : $(\text{sen}\, x)/3$.
In conclusione le soluzioni dell'equazione sono le funzioni

$$y(x) = a \cos 2x + b \,\text{sen}\, 2x + (\text{sen}\, x)/3 \quad (a, b \text{ costanti arbitrarie}) .$$

4.

$\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2/2 - x^4/8 + o(x^4)$ $\qquad$ $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$

$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm x/2 + o(x)$ $\qquad$ $\log^2(1+x+x^2) \approx \log^2(1+x) \approx x^2$

Sostituendo , il numeratore equivale a $x^4/3$, il denominatore a x^3 .
Il limite richiesta vale dunque 0 .

.