Soluzioni della prova parziale di recupero dell' 1 . 2 . 06 *Fila 1*

1.

- $a_{n+1} \le a_n \Leftrightarrow \dfrac{a_n}{4-a_n} \le a_n \Leftrightarrow \dfrac{a_n(a_n-3)}{4-a_n} \le 0 \Leftrightarrow 0 < a_n \le 3$ oppure $a_n > 4$
- Per induzione si prova che è $0 < a_n < 3 \quad \forall n$.
- In conclusione : la successione è decrescente e limitata e dunque ammette limite reale L con $0 \le L < 1$.
- Per calcolare il valore di L , passando al limite nella relazione ricorsiva e tenendo conto dell'intervallo in cui si trova L , si ricava che deve essere L = 0 .
- Max a_n = sup a_n = 1 , min a_n non esiste , inf a_n = 0 .

2.

$\log(1+\sqrt{x}+x) \approx \sqrt{x}$, $\text{sen}\sqrt{x/(x^2+1)} \approx \sqrt{x}$

Il limite vale 1.

3.

Per il C.E.

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ \sqrt{x+1} > 2x \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \ge 0 \\ x+1 > 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < 0 \text{ oppure } \begin{cases} x \ge 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{17}}{8} < x < \dfrac{1+\sqrt{17}}{8} \end{cases}$$

In conclusione , il C.E. è l'insieme $[-1,(1+\sqrt{17})/8)$.

Per il segno , risulta $f(x) \ge 0$ per :

$$\begin{cases} -1 \le x < (1+\sqrt{17})/8 \\ \sqrt{x+1} \ge 1+2x \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < -1/2 \text{ oppure } \begin{cases} -1/2 \le x < (1+\sqrt{17})/8 \\ 4x^2+3x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \le x < -1/2 \text{ oppure } \begin{cases} -1/2 \le x < (1+\sqrt{17})/8 \\ -3/4 \le x \le 0 \end{cases}$$

In conclusione , $f(x) \ge 0$ per $-1 \le x \le 0$; in particolare $f(x) = 0$ per $x = 0$.

4.

Scritto z nella forma $r \exp(i\theta)$, si ha $i z^2 = r^2 \exp(i(2\theta+\pi/2))$, $-\bar{z} = r\exp(i(-\theta+\pi))$. Da $r^2 = r$ segue $z = 0$ oppure $r = 1$. Nel secondo caso deve essere anche $2\theta + \pi/2 = \pi - \theta + 2k\pi$, cioè $\theta = \pi/6 + 2k\pi/3$ (k = 0 , 1 , 2) . In forma algebrica le soluzioni sono :

$$0 \ , \ \frac{\sqrt{3}+i}{2} \ , \ \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \ , \ -i .$$

5.

Per n = 1 l'identità è verificata , in quanto ambo i membri valgono 1 / 4 .

Supponiamola verificata per n e verifichiamola per n + 1 : a primo membro sostituiamo la somma fino all'indice n con il valore dato per ipotesi e a questo aggiungiamo il termine n+1 – esimo :

$$n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (n+1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Il termine che rimane dopo la semplificazione è proprio il secondo membro dell'identità per n + 1 .

Soluzioni della prova parziale di recupero dell' 1 . 2 . 06 *Fila 2*

1.

- $a_{n+1} \le a_n \Leftrightarrow \dfrac{2a_n}{3-5a_n} \le a_n \Leftrightarrow \dfrac{a_n(5a_n-1)}{3-5a_n} \le 0 \Leftrightarrow 0 < a_n \le 1/5$ oppure $a_n > 3/5$
- Per induzione si prova che è $0 < a_n < 1/5 \quad \forall n$.
- In conclusione :
  la successione è decrescente e limitata e dunque ammette limite reale L con $0 \le L < 1/10$.
- Per calcolare il valore di L , passando al limite nella relazione ricorsiva e tenendo conto dell'intervallo in cui si trova L , si ricava che deve essere L = 0 .
- Max a_n = sup a_n = 1 / 10 , min a_n non esiste , inf a_n = 0 .

2.

$\log(1+x^2) \approx x^2 \quad , \quad 1-\cos(\operatorname{sen}^2 x) \approx 1-\cos(x^2) \approx x^4/2$

Il limite vale 0.

3.

Per il C.E.

$$\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 2\sqrt{x+1} > 4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < -1/4 \text{ opp. } \begin{cases} x \ge -1/4 \\ 4(x+1) > (4x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \le x < -1/4 \text{ opp. } \begin{cases} x \ge -1/4 \\ \dfrac{-1-\sqrt{13}}{8} < x < \dfrac{-1+\sqrt{13}}{8} \end{cases}$$

In conclusione , il C.E. è l'insieme $[-1, (-1+\sqrt{13})/8)$.

Per il segno , risulta f (x) $\ge$ 0 per :

$$\begin{cases} -1 \le x < (-1+\sqrt{13})/8 \\ \sqrt{x+1} \ge 1+2x \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < -1/2 \text{ oppure } \begin{cases} -1/2 \le x < (-1+\sqrt{13})/8 \\ 4x^2+3x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \le x < -1/2 \text{ oppure } \begin{cases} -1/2 \le x < (-1+\sqrt{13})/8 \\ -3/4 \le x \le 0 \end{cases}$$

In conclusione , f (x) $\ge$ 0 per -1 $\le$ x $\le$ 0 ; in particolare f (x) = 0 per x = 0 .

4.

Scritto z nella forma r exp (i θ) , si ha $\bar{z}^2 = r^2 e^{-2i\vartheta}$, i z = r exp (i (θ + π / 2)) . Da $r^2 = r$ segue z = 0 oppure r = 1 . Nel secondo caso deve essere anche θ + π / 2 = - 2 θ + 2 k π , cioè θ = - π / 6 + 2 k π / 3 (k = 0 , 1 , 2) . In forma algebrica le soluzioni sono :

$$0 \ , \ \frac{\sqrt{3}-i}{2} \ , \ \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \ , \ i.$$

5.

Per n = 1 l'identità è verificata , in quanto ambo i membri valgono 1 / 4 .

Supponiamola verificata per n e verifichiamola per n + 1 : a primo membro sostituiamo la somma fino all'indice n con il valore dato per ipotesi e a questo aggiungiamo il termine n+1 – esimo :

$$n^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + (n+1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - n^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

Il termine che rimane dopo la semplificazione è proprio il secondo membro dell'identità per n + 1 .

Soluzioni della prova parziale di recupero dell' 1 . 2 . 06 *Fila 3*

1.

- $a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \dfrac{5a_n}{8-3a_n} \leq a_n \Leftrightarrow \dfrac{a_n(3a_n-3)}{8-3a_n} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a_n \leq 1$ oppure $a_n > 8/3$
- Per induzione si prova che è $0 < a_n < 1 \quad \forall n$.
- In conclusione :
  la successione è decrescente e limitata e dunque ammette limite reale L con $0 \leq L < 1/2$.
- Per calcolare il valore di L , passando al limite nella relazione ricorsiva e tenendo conto dell'intervallo in cui si trova L , si ricava che deve essere L = 0 .
- $\max a_n = \sup a_n = 1/2$, $\min a_n$ non esiste , $\inf a_n = 0$.

2.

$\operatorname{sen}(1-\cos 2x) \approx 1-\cos 2x \approx 2x^2$, $\exp(3x^2)-1 \approx 3x^2$

Il limite vale 2 / 3 .

3.

Per il C.E.

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 3\sqrt{x+5} > x+2 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq x < -2 \text{ oppure } \begin{cases} x \geq -2 \\ 9x+45 > x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq x < -2 \text{ oppure } \begin{cases} x \geq -2 \\ \dfrac{5-3\sqrt{21}}{2} < x < \dfrac{5+3\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

In conclusione , il C.E. è l'insieme $[-5, (5+3\sqrt{21})/2)$.

Per il segno , risulta $f(x) \geq 0$ per :

$$\begin{cases} -5 \leq x < (5+3\sqrt{21})/2 \\ 3\sqrt{x+5} \geq 3+x \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq x < -3 \text{ oppure } \begin{cases} -3 \leq x < (5+3\sqrt{21})/2 \\ x^2-3x-36 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq x < -3 \text{ oppure } \begin{cases} -3 \leq x < (5+3\sqrt{21})/2 \\ \dfrac{3-3\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \dfrac{3+3\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

In conclusione , $f(x) \geq 0$ per $-5 \leq x \leq \dfrac{3+3\sqrt{17}}{2}$; in particolare $f(x) = 0$ per $x = 0$.

4.

Scritto z nella forma $r\exp(i\theta)$, si ha $2z = 2r\exp(i\theta)$, $-i\,\bar{z}^{2} = r^2\exp(i(-2\theta-\pi/2))$. Da $r^2 = 2r$ segue $z = 0$ oppure $r = 2$. Nel secondo caso deve essere anche $\theta = -\pi/2 - 2\theta + 2k\pi$, cioè $\theta = -\pi/6 + 2k\pi/3$ (k = 0 , 1 , 2) . In forma algebrica le soluzioni sono :

0 , $\sqrt{3}-i$, $-\sqrt{3}-i$, $2i$.

5.

Per n = 1 l'identità è verificata , in quanto ambo i membri valgono 1 / 4 .

Supponiamola verificata per n e verifichiamola per n + 1 : a primo membro sostituiamo la somma fino all'indice n con il valore dato per ipotesi e a questo aggiungiamo il termine n+1 – esimo :

$$n^2\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + (n+1)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{n+2} - n^2\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

Il termine che rimane dopo la semplificazione è proprio il secondo membro dell'identità per n + 1 .

Soluzioni della prova parziale di recupero dell' 1 . 2 . 06 <u>*Fila 4*</u>

1.

- $a_{n+1} \le a_n \Leftrightarrow \dfrac{6\,a_n}{10-2\,a_n} \le a_n \Leftrightarrow \dfrac{a_n\,(2\,a_n - 4)}{10-2\,a_n} \le 0 \Leftrightarrow 0 < a_n \le 2$ oppure $a_n > 5$
- Per induzione si prova che è $0 < a_n < 2 \quad \forall n$.
- In conclusione :
  la successione è decrescente e limitata e dunque ammette limite reale L con $0 \le L < 1$.
- Per calcolare il valore di L , passando al limite nella relazione ricorsiva e tenendo conto dell'intervallo in cui si trova L , si ricava che deve essere L = 0 .
- Max a_n = sup a_n = 1 , min a_n non esiste , inf a_n = 0 .

2.

$\log(1+\sqrt{1-\cos x}\,) \approx \sqrt{1-\cos x} \approx |x|/\sqrt{2}$, $1-\exp(\operatorname{sen} 3x) \approx -\operatorname{sen} 3x \approx -3x$

Il limite vale – 1 / (3 √2) .

3.

Per il C.E.

$$\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ 5\sqrt{x+2} > 3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x < -4/3 \text{ oppure } \begin{cases} x \ge -4/3 \\ 25(x+2) > 9x^2+24x+16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \le x < -4/3 \text{ oppure } \begin{cases} x \ge -4/3 \\ -\dfrac{17}{9} < x < 2 \end{cases}$$

In conclusione , il C.E. è l'insieme [-2 , 2) .

Per il segno , risulta f (x) ≥ 0 per :

$$\begin{cases} -2 \le x < 2 \\ 5\sqrt{x+2} \ge 5+3x \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x < -5/3 \text{ oppure } \begin{cases} -5/3 \le x < 2 \\ 9x^2+5x-25 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \le x < -5/3 \text{ oppure } \begin{cases} -5/3 \le x < 2 \\ (-5-5\sqrt{37}\,)/18 \le x \le (-5+5\sqrt{37}\,)/18 \end{cases}$$

In conclusione , f (x) ≥ 0 per $-2 \le x \le (-5+5\sqrt{37}\,)/18$; in particolare f (x) = 0 per x = 0 .

4.

Scritto z nella forma r exp (i θ) , si ha $3\,i\,\bar{z}^{-2} = 3\,r^{2}\exp(i(-2\theta+\pi/2))$, $2z = 2\,r\exp(i\theta)$. Da $3r^2 = 2r$ segue z = 0 oppure r = 2 / 3 . Nel secondo caso deve essere anche θ = – 2 θ + π / 2 + 2 k π , cioè θ = π / 6 + 2 k π / 3 (k = 0 , 1 , 2) . In forma algebrica le soluzioni sono :

$$0 \;,\; \frac{\sqrt{3}+i}{3} \;,\; \frac{-\sqrt{3}+i}{3} \;,\; -\frac{2}{3}i.$$

5.

Per n = 1 l'identità è verificata , in quanto ambo i membri valgono 1 / 4 .
Supponiamola verificata per n e verifichiamola per n + 1 : a primo membro sostituiamo la somma fino all'indice n con il valore dato per ipotesi e a questo aggiungiamo il termine n+1 – esimo :

$$n^2\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} + (n+1)^2\left(\frac{4}{3}\right)^{n+2} - n^2\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$$

Il termine che rimane dopo la semplificazione è proprio il secondo membro dell'identità per n + 1 .