Mauro Sassetti

Calcolo differenziale ed integrale

per funzioni di due variabili reali.

Breve esposizione dei principali risultati.

Parte prima : Calcolo differenziale

1. Generalità

1.1 L'insieme $\boldsymbol{R}^2$ *come spazio metrico*

L'insieme $\mathbf{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali

$$\mathbf{R}^2 = \{ (x, y) : x, y \in R \}$$

ha una naturale corrispondenza biunivoca con i punti del piano cartesiano : alla coppia (x , y) resta univocamente associato il punto P di ascissa x e ordinata y. Utilizzando questa corrispondenza, possiamo identificare i due concetti e scrivere P = (x , y) .
Nell'insieme $\mathbf{R}^2$ si può introdurre una struttura metrica, definendo <u>distanza</u> d (P_1 , P_2) tra due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ la quantità

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(distanza euclidea nel piano cartesiano ; la definizione è immediata applicazione del teorema di Pitagora). La distanza tra P_1 e P_2 è anche indicata con la notazione $\| P_1 - P_2 \|$.
Fissato un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, si dice <u>intorno</u> di centro P_0 e raggio r > 0 l'insieme dei punti P = (x , y) che distano da P_0 meno di r :

$$U(P_0, r) = \{ P : \| P - P_0 \| < r \}$$

$$= \left\{ (x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \right\}.$$

Dal punto di vista geometrico U (P_0 , r) è il cerchio di centro P_0 e raggio r privato della circonferenza che lo delimita. Quando non siamo interessati a precisare il valore del raggio r, parliamo semplicemente di intorno U (P_0) .
Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^2$.
Un punto P si dice <u>interno</u> ad A se

$$\exists\, U(P) : U(P) \subset A$$

cioè se P è contenuto in A insieme a tutto un suo intorno.
Il punto P si dice <u>di frontiera</u> per A se

$$\forall\, U(P) ,\ U(P) \cap A \neq \emptyset ,\ U(P) \cap A^c \neq \emptyset$$

cioè se ogni intorno di P contiene sia punti di A che punti del suo complementare. Un punto di frontiera può appartenere o no ad A.
L'insieme A si dice <u>chiuso</u> se contiene la sua frontiera (cioè tutti i suoi punti frontiera) , <u>aperto</u> se tutti i suoi punti sono interni.
L'insieme A si dice <u>limitato</u> se esiste un rettangolo R con i lati paralleli agli assi che contiene A; questo equivale a dire che esistono h , H , k , K tali che :

$$\forall (x, y) \in A ,\quad h \le x \le H ,\ k \le y \le K .$$

1.2 Le funzioni di due variabili

Se D è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}^2$, si chiama funzione reale di due variabili reali (o , più semplicemente , <u>funzione di due variabili</u>) definita sul <u>dominio</u> D e si indica con

$$f : D \to \mathbf{R}$$

una legge (di qualunque natura) che ad ogni punto P = (x , y) $\in$ D associa uno ed un solo numero reale z :

$$\forall (x, y) \in D \ , \ \exists_1 z \in R \ : \ z = f(x, y) \ .$$

Il numero z è il valore che la funzione assume in corrispondenza del punto P , cioè l'immagine di P.

Ad esempio, il volume di un cilindro circolare retto è dato da $V = \pi R^2 h$; V è funzione delle due variabili reali R (raggio del cerchio di base) ed h (altezza del cilindro) ; possiamo dunque parlare della funzione $V(R, h) = \pi R^2 h$. Dato il significato geometrico delle variabili, come dominio D scegliamo il prodotto cartesiano $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

Quando la funzione è definita da una legge di tipo algebrico e il dominio non è esplicitamente indicato, si assume che questo coincida con il <u>campo di esistenza</u> , cioè con l'insieme di tutte le coppie (x , y) per le quali la legge data ha significato.

Ad esempio, se $f(x, y) = x + y - 1$, la funzione è definita per ogni scelta di x ed y reali e quindi il suo dominio è $\mathbf{R}^2$; se vogliamo studiarla su un sottoinsieme , la scelta di tale sottoinsieme deve essere dichiarata esplicitamente.
Per la funzione $f(x, y) = \log(1 - x y^2)$ dobbiamo imporre che risulti $1 - x y^2 > 0$. Per $x \le 0$ questa condizione è verificata per ogni valore di y; se invece è $x > 0$, y deve essere compresa tra $-1/\sqrt{x}$ e $1/\sqrt{x}$ (figura 1) .
Infine per la funzione $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y}$ la condizione di esistenza richiede di considerare i punti del piano che stanno sulla parabola $y = 1 - x^2$ e quelli al di sotto di essa (figura 2) .

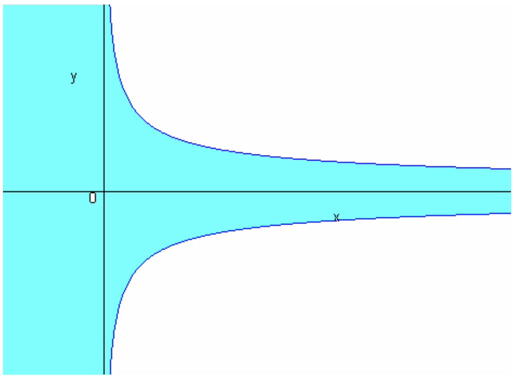

fig.1

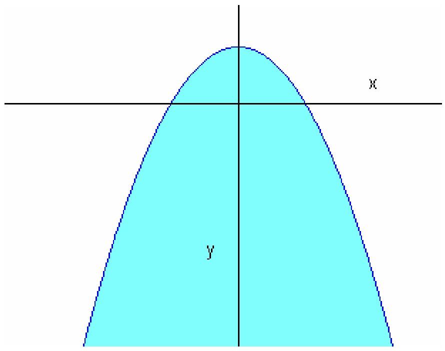

fig.2

Il <u>grafico</u> della funzione f (x , y) è l'insieme dei punti (x , y , z) dello spazio cartesiano tali che :

$$(x, y) \in D \ , \ z = f(x, y) \, .$$

In generale il grafico è una superficie nello spazio che si proietta verticalmente sul dominio D. Tracciare il grafico di una funzione f (x , y) è generalmente difficile : alcuni programmi grafici permettono di ovviare a questa difficoltà con buoni risultati .

Ad esempio , il grafico della funzione $f(x, y) = 1 - x - 2y$ è la superficie di equazione $z = 1 - x - 2y$ ovvero $x + 2y + z = 1$; questo è il piano che interseca gli assi nei punti (1 , 0 , 0) , (0 , ½ , 0) , (0 , 0 , 1).

Il grafico della funzione $f (x , y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ è la semisfera di centro l'origine e raggio 1, situata nel semispazio delle z positive.

Per completezza aggiungiamo che spesso invece che tracciare il grafico della funzione , si preferisce disegnarne le linee di livello. Ogni linea di livello è l'intersezione del grafico con un piano orizzontale, cioè la " linea " che unisce i punti del grafico aventi una stessa quota.
Se f (x , y) rappresenta la quota sul livello del mare del punto di latitudine x e longitudine y, otterremo in questo modo una carta topografica dei rilievi. Se invece f descrive la temperatura o la pressione al variare delle coordinate di una località, avremo le mappe delle isoterme o delle isobare mostrate dai bollettini meteorologici.

Per una funzione di due variabili si possono ripetere le definizioni viste nel caso di una variabile.

La funzione f (x , y) si dice limitata nel dominio D se la sua immagine è limitata, cioè se:

$$\exists\, h , k \in R : \forall (x , y) \in D \ , \ h \leq f (x , y) \leq H .$$

Un numero reale L si dice estremo superiore della funzione f (x , y) e si scrive L = inf f , se sono verificate le seguenti condizioni :

$$\forall (x , y) \in D \ , \ f (x , y) \leq L .$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 , \ \exists (\bar{x} , \bar{y}) \in D \ : \ f (\bar{x} , \bar{y}) > L - \varepsilon .$$

Analoga la definizione estremo inferiore finito.

Un numero reale M si dice massimo della funzione f (x , y) e si scrive M = maz f , se sono verificate le seguenti condizioni :

$$\forall (x , y) \in D \ , \ f (x , y) \leq M .$$

$$\exists (\bar{x} , \bar{y}) \in D \ : \ f (\bar{x} , \bar{y}) = M .$$

Il punto $(\bar{x} , \bar{y})$ in cui la funzione assume il valore massimo M , si dice punto di massimo . Mentre il massimo (se esiste) è univocamente determinato , ci può essere più di un punto di massimo.
Analoga le definizioni di minimo (m = min f) e di punto di minimo.

Anche per funzioni di due variabili si può dare la definizione di continuità in termini di limite. Per gli scopi di queste brevi note , preferiamo darla in termini di distanze (cosa che del resto vale anche per funzioni di una sola variabile).
Diciamo che f (x , y) è continua nel punto $P_0 = (x_0 , y_0)$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0 , \ \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, P \in D \ , \ \| P - P_0 \| < \delta \ \Rightarrow \ | f (P) - f (P_0) | < \varepsilon .$$

Questo significa che la funzione è definita nel punto P_0 ed assume valori f (P) arbitrariamente vicini a $f (P_0)$ purché P sia opportunamente vicino a P_0 .
Come già per funzioni di una variabile, una funzione f (x , y) elementare (cioè esprimibile in termini algebrici) è continua in ogni punto del suo campo di esistenza.

In sostanza, la funzione è continua in un punto P_0 se, quando il generico punto P si sposta lungo una qualunque traiettoria nel dominio, in corrispondenza di questo spostamento la funzione assume valori arbitrariamente vicini a $f (P_0)$.

Ad esempio, la funzione

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2 + y^4}$$

è elementare e dunque continua in ogni punto del suo campo di esistenza, cioè in $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$.
Controlliamo se la funzione può essere prolungata per continuità in O = (0 , 0), cioè se questa discontinuità è eliminabile. Se P = (x , y) si avvicina ad O lungo l'asse delle x, dobbiamo considerare la restrizione f (x , 0) per $x \neq 0$ e far tendere x a 0 ; poiché la restrizione vale costantemente 0 , anche il suo limite è 0. Lo stesso accade se P si avvicina a O lungo l'asse delle y : la restrizione f (0 , y) vale 0 e dunque anche il limite per $y \to 0$ vale 0. Se la traiettoria è una qualunque altra retta y = m x passante per l'origine , anche la restrizione $f(x, mx) = m^2 x / (1 + m^4 x^2)$ tende a 0 per $x \to 0$. Le traiettorie rettilinee non esauriscono la possibili traiettorie di avvicinamento ad O : se il punto P si sposta lungo la parabola di equazione $y^2 = x$, la funzione vale costantemente ½ e questo è anche il suo limite. Dato che il valore del limite deve essere indipendente dalla particolare traiettoria, i risultati trovati provano che la funzione data non ha limite per $P \to P_0$.
La funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(anch'essa elementare) si può invece prolungare per continuità in O. Per provare questa affermazione, riscriviamo la funzione usando le coordinate polari r , θ : $f(r\cos\theta, r \,\mathrm{sen}\,\theta) = r\cos 2\theta$. Qualunque sia la traiettoria seguita da P, il suo avvicinamento ad O equivale ad imporre che sia $r \to 0$. Poiché $0 \leq |f| \leq r$, si ottiene per confronto che la funzione tende a 0 e dunque possiamo eliminare la discontinuità definendo f (0 , 0) = 0 .

2. *Calcolo differenziale per funzioni di due variabili reali*

2.1 *Derivate parziali*

Sia f (x , y) una funzione definita su un dominio D e sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto interno al dominio. La funzione

$$F(h) = \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

è detta rapporto incrementale rispetto alla variabile x . La funzione è definita per h in un opportuno intorno di 0 (0 escluso). Se esiste finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} ,$$

ad esso diamo il nome di <u>derivata parziale rispetto alla variabile x</u> nel punto P_0 . Per indicare questa derivata si usa una delle seguenti notazioni :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} , \quad D_x f(x_0, y_0) , \quad f_x(x_0, y_0) .$$

La derivata indica la rapidità di variazione della funzione rispetto ad x per $x = x_0$ quando y è tenuto fisso a y_0 . Il piano perpendicolare all'asse y nel punto di ordinata y_0 taglia la superficie grafico in una curva : la derivata sopra definita rappresenta il coefficiente angolare della sua retta tangente nel punto P_0 .

Analogamente si definisce <u>derivata parziale rispetto a y</u> il valore del limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

quando questo esiste finito. Le notazioni per indicare questa derivata sono

$$\frac{\partial f(x_0 , y_0)}{\partial y} \quad , \quad D_y f(x_0 , y_0) \quad , \quad f_y(x_0 , y_0) \; .$$

L'interpretazione geometrica è analoga alla precedente, solo che adesso si seziona il grafico con il piano perpendicolare all'asse x nel punto di ascissa x_0 .

In pratica , per calcolare $D_x f(x_0 , y_0)$ si considera la funzione $f(x , y_0)$ ottenuta tenendo fissa la y e facendo variare la x ; di questa funzione si calcola la derivata per $x = x_0$, seguendo le regole consuete di derivazione per funzioni di una variabile. Analogamente, per calcolare $D_y f(x_0 , y_0)$ si considera la funzione $f(x_0 , y)$ ottenuta tenendo fissa la x e facendo variare la x ; di questa funzione si calcola la derivata per $y = y_0$.

Ancora più semplicemente, per calcolare $D_x f(x_0 , y_0)$ si considera la funzione $f(x , y)$ e si deriva interpretando x come variabile e y come costante ; la derivata così ottenuta si calcola per $x = x_0$ ed $y = y_0$. In maniera analoga ci si comporta per la derivata rispetto ad y.
In realtà questo procedimento semplificato, pur comunemente usato nella pratica, richiede alcune limitazioni per la sua validità (precisamente, l'esistenza della derivata in tutto un intorno del punto e la sua continuità nel punto stesso); riprenderemo questa osservazione nel successivo esempio 2.

Se in un punto P esistono entrambe le derivate parziali, la funzione si dice <u>derivabile</u> in questo punto; se poi le derivate esistono in ogni punto del dominio A , la funzione si dice derivabile in A.
Il vettore le cui componenti sono le derivate parziali nel punto P prende il nome di <u>gradiente</u> e si indica con la notazione grad f (P) oppure $\nabla f(P)$:

$$\text{grad}\, f(P) = (f_x(x , y) , f_y(x , y)) .$$

<u>Esempio 1.</u>

Per la funzione $f(x , y) = \log(1 - x y^2)$ calcoliamo le derivate parziali nel punto $P_0 = (-1 , 1)$.

Primo procedimento:

$F(x) = f(x , 1) = \log(1 - x)$.
$F'(x) = 1/(x - 1)$, $F'(-1) = f_x(-1 , 1) = -1/2$.

$G(y) = f(-1 , y) = \log(1 + y^2)$.
$G'(y) = 2y/(1 + y^2)$, $G'(1) = f_y(-1 , 1) = 1$.

Secondo procedimento:

$f_x(x , y) = -y^2/(1 - x y^2)$, $f_x(-1 , 1) = -1/2$.
$f_y(x , y) = -2xy/(1 - x y^2)$, $f_y(-1 , 1) = 1$.

Esempio 2.

Per la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

calcoliamo le derivate parziali nel punto O = (0 , 0).
Poiché $f(x,0) = f(0,y) = 0$, si ottiene $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
Osserviamo che per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha :

$$f_x(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad f_y(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad .$$

Non possiamo utilizzare queste espressioni per calcolare le derivate in O , dato che queste funzioni non sono definite nel punto (nemmeno come prolungamento continuo). In altre parole, queste derivate esistono in tutto $\mathbf{R}^2$, ma sono discontinue in O.
In questo caso, dunque, non possiamo usare il procedimento semplificato per il calcolo delle derivate nel punto.
Si osservi che anche la funzione $f(x,y)$ data è discontinua in O. Infatti , su una traiettoria rettilinea $y = m x$ la funzione vale

$$f(x, m x) = m / (1 + m^2) ,$$

cioè è costante su ciascuna retta , ma la costante dipende dalla retta ; dunque il suo limite dipende dalla traiettoria.
Questa osservazione prova che una funzione $f(x,y)$ derivabile NON è detto che sia anche continua, contrariamente a quello che accade per funzioni di una sola variabile.

Una funzione $f(x,y)$ si dice <u>differenziabile</u> in un punto P_0 se le sue derivate esistono in un intorno del punto e sono continue in questo punto.
In realtà, la definizione di differenziabilità per una funzione di due variabili è analoga a quella per funzioni di una variabile e si riferisce all'approssimazione lineare della funzione. La definizione che abbiamo dato è più forte di quella consueta, cioè rappresenta una condizione sufficiente per la sua validità. Ai fini di queste note è inutile considerare la definizione più generale.
Si può provare che le funzioni differenziabili sono continue.
Dunque, mentre per le funzioni di una variabile derivabilità e differenziabilità sono proprietà equivalenti, per le funzioni di due variabili la differenziabilità è una proprietà più forte della derivabilità (infatti è solo la prima che assicura la continuità della funzione).

Una volta calcolate le derivate f_x , f_y nel dominio D , se queste risultano a loro volta derivabili rimangono definite quattro nuove funzioni, che sono dette derivate parziali seconde:

$$f_{xx} = (f_x)_x \qquad f_{xy} = (f_x)_y \qquad f_{yx} = (f_y)_x \qquad f_{yy} = (f_x)_y .$$

Altre notazioni per indicare queste derivate sono , rispettivamente :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$D^2_{xx} f \qquad D^2_{xy} f \qquad D^2_{yx} f \qquad D^2_{yy} f \; .$$

<u>Esempio</u>

Per la funzione $f(x, y) = x^3 + 4 x y^2$, si ha

$$f_x = 3x^2 + 4y^2 \qquad\qquad f_y = 8xy$$

e dunque

$$f_{xx} = 6x \qquad f_{xy} = 8y \qquad f_{yx} = 8y \qquad f_{yy} = 8x \; .$$

Si osservi che è $f_{xy} = f_{yx}$. L'uguaglianza di queste due derivate (dette derivate seconde miste) è un risultato generale, valido sotto opportune ipotesi (ad esempio, se queste derivate sono continue).

Il procedimento di calcolo si può estendere alle derivate di ordine maggiore di due. Anche in questo caso non importa precisare l'ordine con cui si deriva: basta solo sapere quante volte si deriva rispetto alle singole variabili.
Ad esempio, nel caso della funzione precedente , si ha :

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} = 8 \; .$$

Queste tre derivate possono essere indicate con il simbolo $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \, \partial^2 y}$.

2.2 Derivate direzionali.

Sia $V = (\alpha, \beta)$ un versore del piano (cioè un vettore di lunghezza unitaria: $\| V \| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$).
I punti del piano della forma

$$X = P_0 + h V \quad (\text{con } h \in \mathbf{R})$$

ovvero

$$x = x_0 + h\alpha \quad , \quad y = y_0 + h\beta$$

descrivono la retta che passa per il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ ed ha la direzione individuata dal vettore V.

La funzione

$$F(h) = \frac{f(X_0 + hV) - f(X_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h\alpha, y_0 + h\beta) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si dice rapporto incrementale della funzione f nel punto P_0 nella direzione V .
Se P_0 è interno al dominio della funzione , F (h) è definita per h che varia in un intorno di 0 (0 escluso) .
Si chiama derivata nella direzione V nel punto P_0 il valore del limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\alpha, y_0 + h\beta) - f(x_0, y_0)}{h}$$

purché esista finito.
Le notazioni per indicare questa derivata sono

$$\frac{\partial f}{\partial V}(x_0, y_0) \quad , \quad D_V f(x_0, y_0) \quad , \quad f_V(x_0, y_0) \ .$$

Se V = **i** = (1 , 0) oppure V = **j** = (0 , 1) , la definizione coincide con quella della derivata parziale rispetto ad x o ad y.
La derivata direzionale indica la rapidità di variazione della funzione nel punto P_0 nella direzione V.
Il piano parallelo all'asse z e contenente la retta per P_0 nella direzione V taglia la superficie grafico in una curva : la derivata direzionale rappresenta il coefficiente angolare della sua retta tangente nel punto P_0 .
Se f è differenziabile nel punto P_0 , a partire dalle sole derivate parziali si può ottenere la derivata rispetto ad una qualunque direzione. Infatti vale la seguente uguaglianza :

$$\frac{\partial f}{\partial V}(x_0, y_0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

ovvero , in forma vettoriale :

$$\frac{\partial f}{\partial V}(x_0, y_0) = \text{grad}\, f(x_0, y_0) \cdot V$$

dove a secondo membro compare il prodotto scalare tra vettori.

Esempio

Vogliamo calcolare la derivata della funzione $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ nel punto $P_0 = (0, 1)$ nelle direzioni individuate dai vettori

(a) **i** + 2 **j** (b) **j** - 2 **i** (c) 3 **i** (d) **i** + **j** .

Per prima cosa calcoliamo il gradiente della funzione :

$$\text{grad}\ f(x, y) = (2y^3 + 2xy^2 \ , \ 4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y) .$$

Poiché le derivate sono continue , la funzione è differenziabile.

Calcoliamo il gradiente nel punto P_0 :

grad $f(x_0, y_0) = (2, 4)$.

A questo punto possiamo calcolare le derivate direzionali :

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial V}(0,1) = \dfrac{(2,4)\cdot(1,2)}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial V}(0,1) = \dfrac{(2,4)\cdot(-2,1)}{\sqrt{5}} = 0$

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial V}(0,1) = \dfrac{(2,4)\cdot(3,0)}{3} = 2$

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial V}(0,1) = \dfrac{(2,4)\cdot(1,1)}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

N.B.: nei calcoli precedenti la quantità che compare al denominatore indica la lunghezza del vettore dato ; si ricordi infatti che nella definizione di derivata direzionale si utilizza un versore : se si divide un vettore per la sua lunghezza si ottiene il versore che ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore dato.

Abbiamo già detto che $f_V(P_0)$ indica il coefficiente angolare della retta tangente alla curva che si ottiene sezionando il grafico della funzione con il piano passante per la retta di equazione $X = P_0 + hV$ e parallelo all'asse delle z . Se la funzione è differenziabile nel punto P_0 tutte queste rette tangenti ottenute al variare della direzione V stanno su uno stesso piano, detto <u>piano tangente</u> ; la sua equazione è data da:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) .$$

Tra tutti i piani passanti per il punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ il piano tangente è quello che meglio approssima il grafico della funzione.

Si osservi che l'equazione del piano tangente ha senso nella sola ipotesi che nel punto P_0 esistano le derivate parziali. Però è solo sotto l'ulteriore ipotesi di differenziabilità che questo piano ha le proprietà sopra dette, cioè quella di contenere tutte le rette tangenti e quella di costituire la migliore approssimazione lineare del grafico.

Il piano parallelo a quello tangente e passante per l'origine ha equazione $z = \nabla f(P_0)\cdot P$, ovvero $-\nabla f(P_0)\cdot P + z = 0$; questo indica che il vettore $(-\nabla f(P_0), 1)$ ha la direzione normale al piano e quindi al grafico.

Poiché

$$f_V(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot V = \|\nabla f(P_0)\| \cos\vartheta ,$$

dove ϑ è l'angolo compreso tra i due vettori , la derivata direzionale è massima quando $\cos\vartheta = 1$, cioè quando V ha la direzione del gradiente nel punto. In altre parole $\nabla f(P_0)$ indica la direzione di massima crescenza per la funzione (e il suo opposto la direzione di massima decrescenza).