

Calcolo differenziale – soluzioni degli esercizi proposti N. 2

1.

- | | | |
|-----|--|--|
| 1. | $\max = \sqrt{2}$ per $x = \pi/4$ | $\min = 0$ per $x = 3\pi/4$ |
| 2. | $\max = 1$ per $x = \pi/6$ | $\min = 0$ per $x = \pi/2$ |
| 3. | $\sup = +\infty$ | $\min = \sqrt{15} / (8\sqrt{15} - 30)$ per $x = \sqrt{15} - 4$ |
| 4. | $\max = 1$ per $x = \pi$ | $\inf = -\infty$ |
| 5. | $\sup = +\infty$ | $\min = e$ per $x = e$ |
| 6. | $\max = \pi/2$ per $x = 0, x = 2$ | $\min = 0$ per $x = 1$ |
| 7. | $\max = \arctg 25$ per $x = 2$ | $\inf = -\pi/2$ |
| 8. | $\max = 3/2$ per $x = \pi/6, x = 5\pi/6 (+ 2k\pi)$ | $\min = -3$ per $x = 3\pi/2 (+ 2k\pi)$ |
| 9. | $\sup = 3$ | $\min = 0$ per $x = 1/4, x = 4$ |
| 10. | $\max = 3\sqrt{3}$ per $x = 3$ | $\inf = \pi$ |

2.

- | | | | |
|----|--------------------------|----|---|
| 1. | sì ; $\xi = -2/3$ | 2. | no |
| 3. | sì ; $\xi = -\arctg 1/2$ | 4. | sì per $a = 1$, no per $a \neq 1$; $\xi = -1/2$ |

3.

$$f(x) = \exp\left(\frac{\log \cos^3 x}{\operatorname{tg}^3 x}\right) = \exp\left(3 \frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x}\right).$$

$$f'(x) = -3 \exp\left(3 \frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x}\right) \cdot \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} (\operatorname{sen}^2 x + 3 \log \cos x).$$

Limite per $x \rightarrow 0^+$

$$3 \frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x} \approx 3 \frac{\log(1 - x^2/2)}{x^3} \approx 3 \frac{-x^2/2}{x^3} = -\frac{3}{2x} \rightarrow -\infty$$

$$f(x) \rightarrow 0$$

Limite per $x \rightarrow \pi/2^-$

$$3 \frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x} \approx -3 \cos^3 x \log \cos^3 x \rightarrow 0$$

(abbiamo sostituito $\operatorname{sen} x$ con il suo limite -1 ; inoltre, poiché $\cos x \rightarrow 0$, ci riconduciamo a calcolare il limite di $t \log t$ per $t \rightarrow 0$; questo è un limite notevole e vale 0)

$$f(x) \rightarrow 1.$$

In conclusione, la funzione data può essere prolungata per continuità agli estremi dell'intervallo; poiché $f(0) \neq f(\pi/2)$, non vale l'ipotesi del teorema di Rolle.

4.

1. no ; $\xi = -1/2$

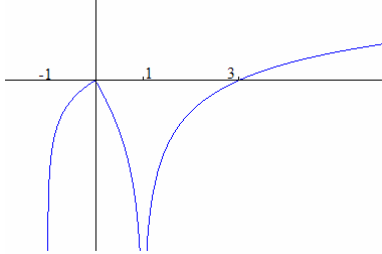
3. no ; $\xi = 2 \pm 1/\sqrt{27}$

2. si ; $\xi = \sqrt{(4-\pi)/\pi}$

4. si ; $\xi = e^2/3$

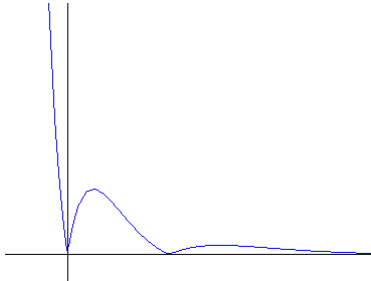
5.

1.



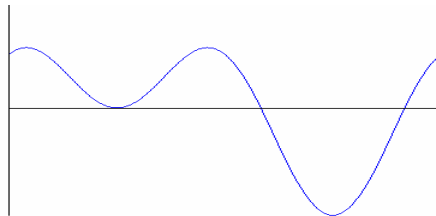
$$f'(x) = \frac{1 + (\operatorname{sgn} x)(x + 2)}{(|x| - 1)(x + 1)}$$

2.



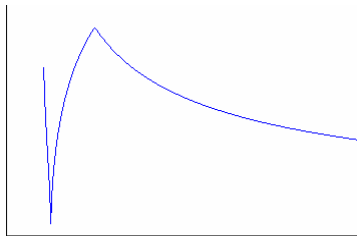
$$f'(x) = 2e^{-2x} \operatorname{sgn}(4x - 3x^2)(3x^2 - 7x + 2)$$

3.



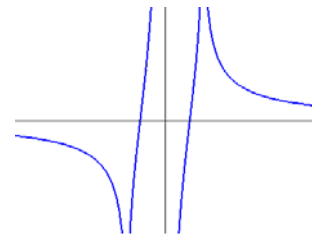
$$f'(x) = \cos x (1 - 4 \operatorname{sen} x)$$

4.



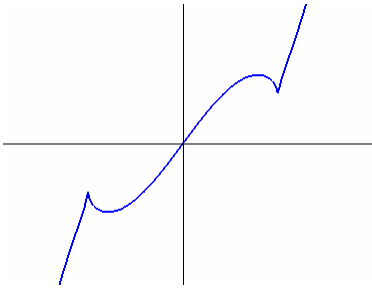
$$f'(x) = \frac{(1-x) \operatorname{sgn}(2x-1)}{x \sqrt{|2x-1|} \sqrt{x^2 - |2x-1|}}$$

5.



$$f'(x) = -\frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)}$$

6.



$$f'(x) = e^{\sqrt{|x^2-1|}} \left\{ 1 + \frac{x^2 \operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}} \right\}$$

6.

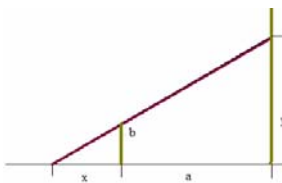
1. Indicata con H la lunghezza (data) dell'ipotenusa e con x quella di uno dei cateti, l'altro cateto misura $\sqrt{H^2 - x^2}$ e dunque l'area è espressa dalla funzione $A(x) = x\sqrt{H^2 - x^2}/2$, con $x \in [0, H]$.

Il valore massimo si ottiene per $x = H/\sqrt{2}$, in corrispondenza del triangolo isoscele.

2. Scritta la retta nella forma $y = 2 + m(x - 1)$ (con $m < 0$), i punti di intersezione con gli assi sono $((m - 2)/m, 0)$, $(0, 2 - m)$; l'area è data da $A(m) = -(m - 2)^2 / (2m)$, definita per $m < 0$. Il minimo si ottiene per $m = -2$.

3. La circonferenza di base misura x e dunque il raggio di base è $x/2\pi$. Tenendo conto che $x + y = H$, l'altezza del cilindro vale $H - x$. Il volume è dunque $V(x) = x^2(H - x)/4\pi$, con $0 \leq x \leq H$. Il volume è massimo per $x = 12$.

4. Indichiamo con x la distanza tra il punto di appoggio della trave dal muro e con y l'altezza del punto di appoggio della trave all'edificio. (v. fig.).



Dalla similitudine dei triangoli ricaviamo

$$y : b = (a + x) : x \text{ cioè } y = b(1 + a/x).$$

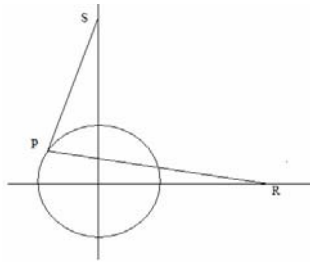
La lunghezza della trave si ottiene dal teorema di Pitagora :

$$l(x) = \sqrt{(a+x)^2 + b^2(1 + (a/x))^2} \text{ con } x \geq 0.$$

La lunghezza è minima per $x = \sqrt[3]{ab^2}$.

5. Il generico punto della semiretta è $P = (x, \sqrt{16 - x^2})$, con $-4 \leq x \leq 4$.

La funzione di cui dobbiamo calcolare valore massimo e minimo è data da :

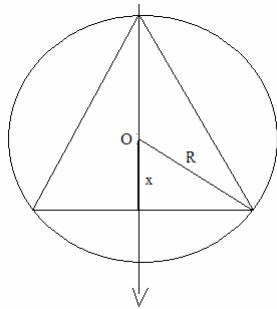


$$S(x) = x^2 + (\sqrt{16-x^2} - 8)^2 + (x-8)^2 + 16 - x^2$$

$$= 16(10 - x - \sqrt{16-x^2})$$

La funzione è minima per $x = 2\sqrt{2}$ (in questo caso P è il punto che sta sulla bisettrice del I quadrante), massima per $x = -4$ (in questo caso $P = (-4, 0)$)

6. Indichiamo con x la distanza con segno dal centro (v. fig.) : x è considerato positivo se la base sta al di sotto del centro ; dunque $-R \leq x \leq R$.

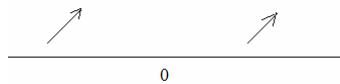


Il solido generato è costituito da due coni con raggio di base $R+x$ e altezza $\sqrt{R^2-x^2}$. Il volume complessivo è dunque dato da $V(x) = 2\pi(R+x)^2\sqrt{R^2-x^2}/3$. Questo è massimo per $x = 2R/3$.

7.

$$x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow e^{x_n} - 1 \geq x_n$$

Per risolvere la disequazione, possiamo studiare graficamente il segno della funzione $f(x) = e^x - 1 - x$; si trova che questa è sempre positiva, eccetto che per $x = 0$ dove si annulla.



Dunque la successione è crescente ed ha come unico punto fisso 0.

In conclusione :

- se $k = 0$ la successione è costantemente nulla
- se $k < 0$ la successione tende a 0 crescendo
- se $k > 0$ la successione tende a $+\infty$ crescendo.

8.

La funzione f_1 è definita in $[-1, 1]$; la sua derivata $1 - (1-x^2)^{1/2}$ è negativa e dunque la funzione è decrescente, condizione che assicura l'invertibilità.

Poiché $f_1(x) = 0$ per $x = 1$, la derivata della funzione inversa in $y = 0$ è l'inverso della derivata della funzione in $x = 1$; però $x = 1$ è un punto a tangente verticale per la funzione e dunque $y = 0$ è un punto a tangente orizzontale per l'inversa; in altre parole $f_1^{-1}(0) = 0$.

La funzione f_2 è definita in \mathbb{R} ; la sua derivata $2 - \sin x$ è positiva e dunque la funzione è crescente, condizione che assicura l'invertibilità.

Poiché $f_2(x) = 1$ per $x = 0$, la derivata della funzione inversa in $y = 1$ è l'inverso della derivata della funzione in $x = 0$: $f_2^{-1}(1) = 1/2$.