

Calcolo differenziale – soluzioni degli esercizi proposti N. 2

1.

- |     |  |  |
|-----|--|--|
| 1.  | $\max = \sqrt{2}$ per $x = \pi/4$                  | $\min = 0$ per $x = 3\pi/4$                                    |
| 2.  | $\max = 1$ per $x = \pi/6$                         | $\min = 0$ per $x = \pi/2$                                     |
| 3.  | $\sup = +\infty$                                   | $\min = \sqrt{15} / (8\sqrt{15} - 30)$ per $x = \sqrt{15} - 4$ |
| 4.  | $\max = 1$ per $x = \pi$                           | $\inf = -\infty$   |
| 5.  | $\sup = +\infty$                                   | $\min = e$ per $x = e$   |
| 6.  | $\max = \pi/2$ per $x = 0, x = 2$                  | $\min = 0$ per $x = 1$   |
| 7.  | $\max = \arctg 25$ per $x = 2$                     | $\inf = -\pi/2$  |
| 8.  | $\max = 3/2$ per $x = \pi/6, x = 5\pi/6 (+ 2k\pi)$ | $\min = -3$ per $x = 3\pi/2 (+ 2k\pi)$                         |
| 9.  | $\sup = 3$   | $\min = 0$ per $x = 1/4, x = 4$                                |
| 10. | $\max = 3\sqrt{3}$ per $x = 3$                     | $\inf = \pi$   |

2.

- |    |                          |    |   |
|----|--------------------------|----|---|
| 1. | sì ; $\xi = -2/3$        | 2. | no  |
| 3. | sì ; $\xi = -\arctg 1/2$ | 4. | sì per $a = 1$ , no per $a \neq 1$ ; $\xi = -1/2$ |

3.

$$f(x) = \exp\left(\frac{\log \cos^3 x}{\operatorname{tg}^3 x}\right) = \exp\left(3 \frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x}\right).$$

$$f'(x) = -3 \exp\left(3 \frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x}\right) \cdot \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} (\operatorname{sen}^2 x + 3 \log \cos x).$$

Limite per  $x \rightarrow 0^+$

$$3 \frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x} \approx 3 \frac{\log(1 - x^2/2)}{x^3} \approx 3 \frac{-x^2/2}{x^3} = -\frac{3}{2x} \rightarrow -\infty$$

$$f(x) \rightarrow 0$$

Limite per  $x \rightarrow \pi/2^-$

$$3 \frac{\log \cos x}{\operatorname{tg}^3 x} \approx -3 \cos^3 x \log \cos^3 x \rightarrow 0$$

(abbiamo sostituito  $\operatorname{sen} x$  con il suo limite  $-1$ ; inoltre, poiché  $\cos x \rightarrow 0$ , ci riconduciamo a calcolare il limite di  $t \log t$  per  $t \rightarrow 0$ ; questo è un limite notevole e vale  $0$ )

$$f(x) \rightarrow 1.$$

In conclusione, la funzione data può essere prolungata per continuità agli estremi dell'intervallo; poiché  $f(0) \neq f(\pi/2)$ , non vale l'ipotesi del teorema di Rolle.

4.

1. no ;  $\xi = -1/2$

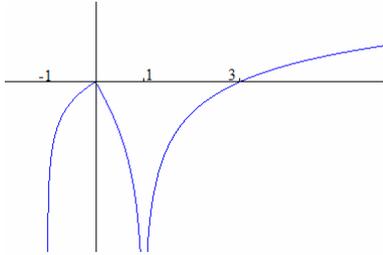
2. si ;  $\xi = \sqrt{(4-\pi)/\pi}$

3. no ;  $\xi = 2 \pm 1/\sqrt{27}$

4. si ;  $\xi = e^2/3$

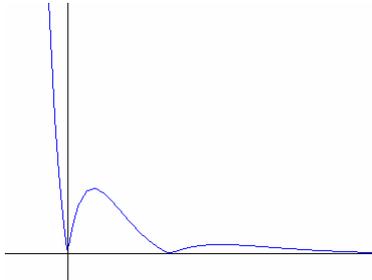
5.

1.



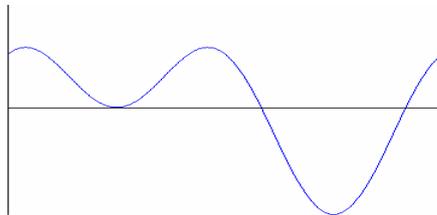
$$f'(x) = \frac{1 + (\operatorname{sgn} x)(x + 2)}{(|x| - 1)(x + 1)}$$

2.



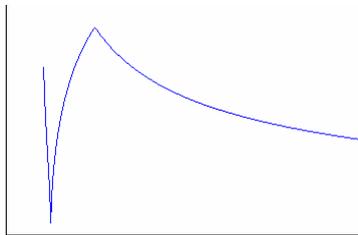
$$f'(x) = 2e^{-2x} \operatorname{sgn}(4x - 3x^2)(3x^2 - 7x + 2)$$

3.



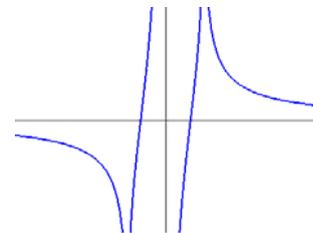
$$f'(x) = \cos x (1 - 4 \operatorname{sen} x)$$

4.



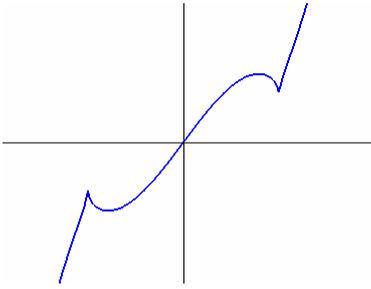
$$f'(x) = \frac{(1-x) \operatorname{sgn}(2x-1)}{x \sqrt{|2x-1|} \sqrt{x^2 - |2x-1|}}$$

5.



$$f'(x) = -\frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)}$$

6.



$$f'(x) = e^{\sqrt{|x^2-1|}} \left\{ 1 + \frac{x^2 \operatorname{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}} \right\}$$

6.

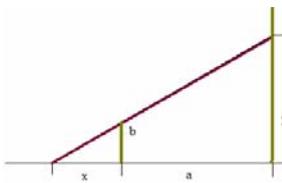
1. Indicata con  $H$  la lunghezza ( data ) dell'ipotenusa e con  $x$  quella di uno dei cateti, l'altro cateto misura  $\sqrt{H^2 - x^2}$  e dunque l'area è espressa dalla funzione  $A(x) = x \sqrt{H^2 - x^2} / 2$ , con  $x \in [0, H]$ .

Il valore massimo si ottiene per  $x = H / \sqrt{2}$ , in corrispondenza del triangolo isoscele.

2. Scritta la retta nella forma  $y = 2 + m(x - 1)$  (con  $m < 0$ ), i punti di intersezione con gli assi sono  $((m - 2) / m, 0)$ ,  $(0, 2 - m)$ ; l'area è data da  $A(m) = -(m - 2)^2 / (2m)$ , definita per  $m < 0$ . Il minimo si ottiene per  $m = -2$ .

3. La circonferenza di base misura  $x$  e dunque il raggio di base è  $x / 2\pi$ . Tenendo conto che  $x + y = H$ , l'altezza del cilindro vale  $H - x$ . Il volume è dunque  $V(x) = x^2 (H - x) / 4\pi$ , con  $0 \leq x \leq H$ . Il volume è massimo per  $x = 12$ .

4. Indichiamo con  $x$  la distanza tra il punto di appoggio della trave dal muro e con  $y$  l'altezza del punto di appoggio della trave all'edificio. ( v. fig. ).



Dalla similitudine dei triangoli ricaviamo

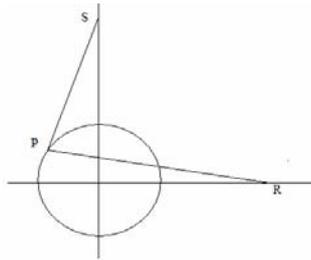
$$y : b = (a + x) : x \text{ cioè } y = b(1 + a/x).$$

La lunghezza della trave si ottiene dal teorema di Pitagora :

$$l(x) = \sqrt{(a+x)^2 + b^2(1 + (a/x))^2} \text{ con } x \geq 0.$$

La lunghezza è minima per  $x = \sqrt[3]{ab^2}$ .

5. Il generico punto della semiretta è  $P = (x, \sqrt{16 - x^2})$ , con  $-4 \leq x \leq 4$ . La funzione di cui dobbiamo calcolare valore massimo e minimo è data da :

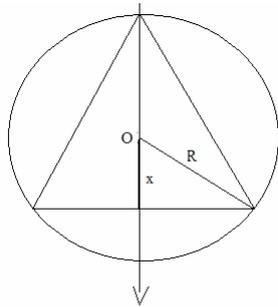


$$S(x) = x^2 + (\sqrt{16-x^2} - 8)^2 + (x-8)^2 + 16 - x^2$$

$$= 16(10 - x - \sqrt{16-x^2})$$

La funzione è minima per  $x = 2\sqrt{2}$  (in questo caso P è il punto che sta sulla bisettrice del I quadrante), massima per  $x = -4$  (in questo caso  $P = (-4, 0)$ )

6. Indichiamo con  $x$  la distanza con segno dal centro (v. fig.) :  $x$  è considerato positivo se la base sta al di sotto del centro ; dunque  $-R \leq x \leq R$ .

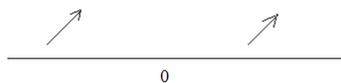


Il solido generato è costituito da due coni con raggio di base  $R+x$  e altezza  $\sqrt{R^2-x^2}$ . Il volume complessivo è dunque dato da  $V(x) = 2\pi(R+x)^2\sqrt{R^2-x^2}/3$ . Questo è massimo per  $x = 2R/3$ .

7.

$$x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow e^{x_n} - 1 \geq x_n$$

Per risolvere la disequazione, possiamo studiare graficamente il segno della funzione  $f(x) = e^x - 1 - x$ ; si trova che questa è sempre positiva, eccetto che per  $x = 0$  dove si annulla.



Dunque la successione è crescente ed ha come unico punto fisso 0.

In conclusione :

- se  $k = 0$  la successione è costantemente nulla
- se  $k < 0$  la successione tende a 0 crescendo
- se  $k > 0$  la successione tende a  $+\infty$  crescendo.

8.

La funzione  $f_1$  è definita in  $[-1, 1]$ ; la sua derivata  $1 - (1-x^2)^{1/2}$  è negativa e dunque la funzione è decrescente, condizione che assicura l'invertibilità.

Poiché  $f_1(x) = 0$  per  $x = 1$ , la derivata della funzione inversa in  $y = 0$  è l'inverso della derivata della funzione in  $x = 1$ ; però  $x = 1$  è un punto a tangente verticale per la funzione e dunque  $y = 0$  è un punto a tangente orizzontale per l'inversa; in altre parole  $f_1^{-1}(0) = 0$ .

La funzione  $f_2$  è definita in  $\mathbb{R}$ ; la sua derivata  $2 - \sin x$  è positiva e dunque la funzione è crescente, condizione che assicura l'invertibilità.

Poiché  $f_2(x) = 1$  per  $x = 0$ , la derivata della funzione inversa in  $y = 1$  è l'inverso della derivata della funzione in  $x = 0$ :  $f_2^{-1}(1) = 1/2$ .