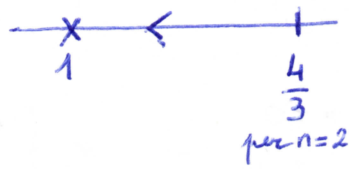
Esercitazione #2

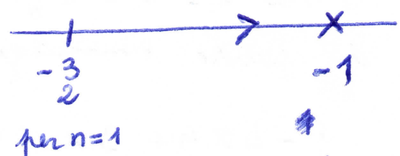
1.

- $\dfrac{n+2}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1}$: la successione è decrescente.

n pari :



n dispari:



è la successione cambiata di segno

$\min = \inf = -3/2$, $\max = \sup = 4/3$; due sottosucc. con limiti diversi

- Per la successione senza il termine $(-1)^n$:

Proviamo che $x_n \to 1$; cioè che $\left| \dfrac{n+2}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ definitiv.

$\iff \left| \dfrac{1}{n+1} \right| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1.$

Questa disug. è sempre vera se $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < 0$, cioè $\varepsilon \geq 1$; è vera definitiv se $0 < \varepsilon < 1$.

Proviamo che $\inf x_n = 1$.

(i) $x_n \geq 1$ $\left(\dfrac{n+2}{n+1} \geq 1 \text{ sempre vera} \right)$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : x_{\bar{n}} < 1 + \varepsilon$, cioè $\left| \dfrac{n+2}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ per almeno un n ; abbiamo visto che è vera definitiv., che è una condizione più forte.

2. CE : $(-\lg 3, +\infty)$; 0 e $+\infty$ sono di accumulazione.

- limite per $x \to 0$

$\left| \lg \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1} \right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \lg \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1} < \varepsilon \iff$

$$e^{-\varepsilon} < \frac{3e^x - 1}{e^x+1} < e^{\varepsilon} \iff \begin{cases} e^{-\varepsilon}(e^x+1) < 3e^x-1 \\ 3e^x-1 < e^{\varepsilon}(e^x+1) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (3-e^{-\varepsilon})e^x > 1+e^{-\varepsilon} \\ (3-e^{\varepsilon})e^x < 1+e^{\varepsilon} \end{cases}$$

$3-e^{-\varepsilon} > 0$ sempre

$3-e^{\varepsilon}$ lo rendiamo positivo scegliendo $0 < \varepsilon < \lg 3$, come è lecito fare

$$\lg\frac{1+e^{-\varepsilon}}{3-e^{-\varepsilon}} < x < \lg\frac{1+e^{\varepsilon}}{3-e^{\varepsilon}}$$

$$\lg\frac{1+e^{-\varepsilon}}{3-e^{-\varepsilon}} > \lg\frac{1}{3} \iff 3+e^{-\varepsilon} < 3-e^{-\varepsilon} \quad \text{vera}$$

Quindi l'intervallo trovato sta nel C.E. della fz.

Rimane da provare che

$$\lg\frac{1+e^{-\varepsilon}}{3-e^{-\varepsilon}} < 0 < \lg\frac{1+e^{\varepsilon}}{3-e^{\varepsilon}} \iff \frac{1+e^{-\varepsilon}}{3-e^{-\varepsilon}} < 1 < \frac{1+e^{\varepsilon}}{3-e^{\varepsilon}} \iff$$

$$\begin{cases} 1+e^{-\varepsilon} < 3-e^{-\varepsilon} \\ 3-e^{\varepsilon} < 1+e^{\varepsilon} \end{cases} \iff \begin{cases} e^{-\varepsilon} < 1 \\ e^{\varepsilon} > 1 \end{cases}$$ sempre verificato

. limite per $x \to +\infty$

$$\left| \lg\frac{3e^x-1}{e^x+1} - \lg 3 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \lg\frac{3e^x-1}{3e^x+3} \right| < \varepsilon$$

L'argomento del lg. è minore di 1. Quindi possiamo scrivere:

$$-\lg\frac{3e^x-1}{3e^x+3} < \varepsilon \iff \lg\frac{3e^x+3}{3e^x-1} < \varepsilon \iff$$

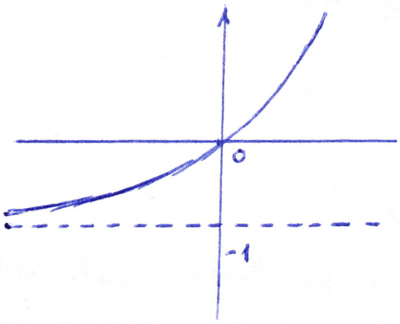
$$0 < \frac{3e^x+3}{3e^x-1} < e^{\varepsilon} \iff 3e^x+3 < 3e^{\varepsilon}e^x - e^{\varepsilon} \iff$$

vero nel C.E.

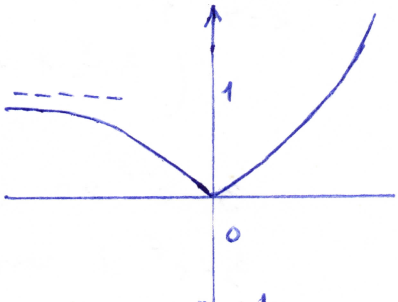
$$e^x > \frac{3+e^{\varepsilon}}{3(e^{\varepsilon}-1)} \iff x > \lg\frac{3+e^{\varepsilon}}{3(e^{\varepsilon}-1)}$$ che è un intorno di $+\infty$.

è $> \lg\frac{1}{3} = -\lg 3$

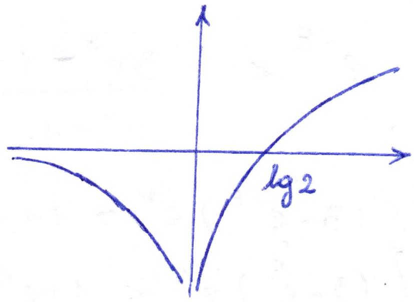
4.



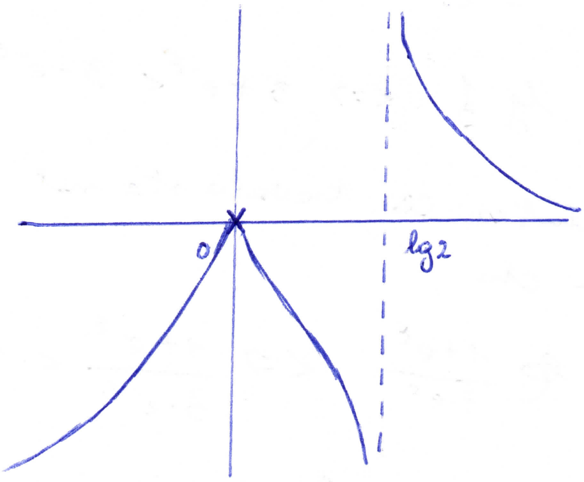
$y = e^x - 1$



$y = |e^x - 1|$



$y = \lg|e^x - 1|$



$$y = \frac{1}{\lg|e^x - 1|}$$