Esercitazione #1

1. $\vartheta = \arccos(-1/4) = \pi - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{15}}{4} = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{15}$

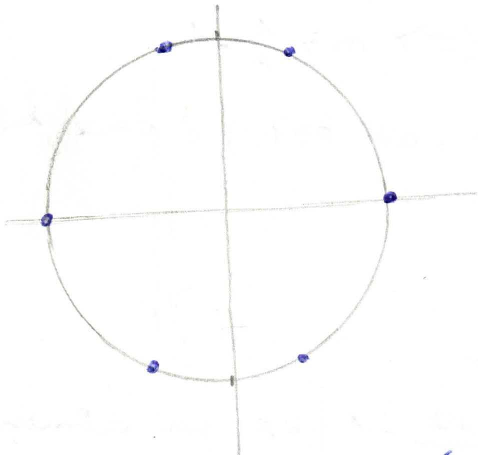
2. Posto $z = x+iy$; sostituendo e separando parte reale da parte immaginaria:

$$\begin{cases} -4xy+3x=0 \\ 2x^2-2y^2-3y+5=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=0\\ 2y^2+3y-5=0\end{cases} \vee \begin{cases} y=3/4 \\ 2x^2+\frac{23}{8}=0\end{cases}$$

$z = i$, $z=-\frac{5}{2} i$ (dal primo sistema; il secondo non ha slz.)

3. $z=0$ è slz.
Cerchiamo slz. non nulle, ponendo $z=re^{i\theta}$:

$$r^2e^{2i\theta} = r^4 e^{-4i\theta} \iff \begin{cases} r=1 & (r=0 \text{ già considerato})\\ 6\theta = 2k\pi & \text{cioè } \theta = k\frac{\pi}{3}\end{cases}$$



$z=\pm1$

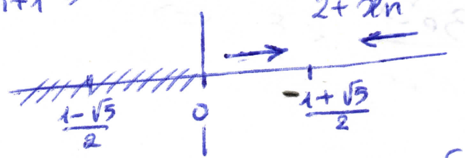
$z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt3}{2}$

$z=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt3}{2}$

4. • Proviamo che è $x_n \ge 0$ (questo implica che è ben definita; la successione, infatti, si interrompe solo se fosse $x_n=-2$)
 . per $n=1$ è vera
 . se $x_n\ge0$, allora è anche $\frac{1+x_n}{2+x_n}\ge 0$.

In realtà è facile vedere che è sempre $x_n>0$ per $n\ge2$.

• $x_{n+1}\ge x_n \iff \frac{1+x_n}{2+x_n}\ge x_n \iff x_n^2+x_n-1\le0 \iff 0\le x_n\le \frac{-1+\sqrt5}{2}$



• $x_n < \frac{-1+\sqrt5}{2} \overset{?}{\Rightarrow} x_{n+1} < \frac{-1+\sqrt5}{2}$

$\frac{1+x_n}{2+x_n} < \frac{-1+\sqrt5}{2}$ ...

$x_n < \frac{2(\sqrt5-2)}{3-\sqrt5} = \frac{2(\sqrt5-2)(3+\sqrt5)}{4} = (-1+\sqrt5)/2$

La successione è crescente.