soluzioni della seconda parte

[A]

1. Risolvere l'equazione differenziale $y' = \dfrac{e^x}{(e^x - 1)\, y}$, precisando il dominio in cui sono definite le soluzioni e il loro grafico.

C.E. $x, y \neq 0$

SIMMETRIE $y(x)$ soluz. → $-y(x)$ soluz. ; possiamo supporre $y > 0$

SLZ COSTANTI non esistono

SLZ NON COSTANTI

$$\int y\, dy = \int \frac{e^x}{e^x - 1}\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \log\left| e^x - 1 \right| + c$$

$$y = \sqrt{\log(e^x - 1)^2 + 2c}$$

Deve essere

$$\log(e^x - 1)^2 > -2c$$

$$(e^x - 1)^2 > \exp(-2c)$$

$$e^x - 1 > \exp(-c) \quad \text{oppure} \quad e^x - 1 < -\exp(-c)$$

$$e^x - 1 > e^{-c} \Leftrightarrow x > \log(1 + e^{-c}) \qquad \text{con } c \in R$$

oppure

$$e^x - 1 < -e^{-c} \Leftrightarrow x < \log(1 - e^{-c}) \qquad \text{con } c > 0$$

$$y = \sqrt{\log(e^x - 1)^2 + 2c} \qquad x > \log(1 + e^{-c}) \qquad (c \in R)$$

per $x \to \log(1 + e^{-c})^+$ $\quad y \to 0 \quad , \quad y' \to +\infty$ (tg. verticale)

per $x \to +\infty$ $\qquad y \to +\infty \, , \; y \approx \sqrt{2x}$ (non c'è asintoto)

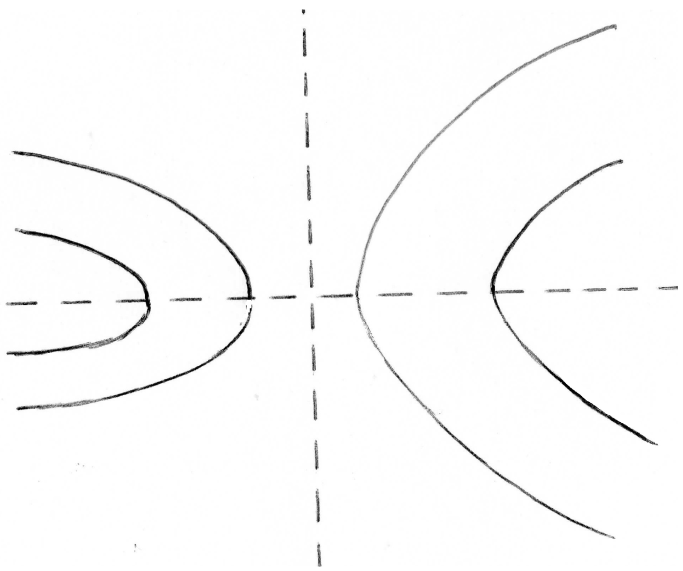
$y' > 0$ (perché $x, y > 0$)

$$y = \sqrt{\log(e^x - 1)^2 + 2c} \qquad x < \log(1 - e^{-c}) \qquad (c > 0)$$

per $x \to \log(1 + e^{-c})^-$ $\quad y \to 0 \quad , \quad y' \to -\infty$ (tg. verticale)

per $x \to -\infty$ $\qquad y \to \sqrt{2c}$ (asintoto orizzontale)

$y' < 0$ (perché $x < 0, y > 0$)



2. Studiare la funzione $f(x) = \log \sqrt{\left| \frac{x+1}{2x-1} \right|}$ e tracciarne il grafico.

In particolare, precisarne il segno, gli intervalli di convessità, gli asintoti.

Trovare il massimo intorno di +∞ in cui la funzione è invertibile e scriverne l'inversa, precisandone il dominio.

Dire se esiste finita l'area della regione compresa tra il grafico e l'asintoto orizzontale e situata a destra della retta x = 2.

C.E. $x \neq -1$, $x \neq 1/2$

SGN positiva se

$$\frac{x+1}{2x-1} \geq 1 \text{ oppure } \frac{x+1}{2x-1} \leq -1$$

$$\frac{2-x}{2x-1} \geq 0 \text{ oppure } \frac{x}{2x-1} \leq 0$$

$$1/2 < x \leq 2 \text{ oppure } 0 \leq x < 1/2$$

$$[0, 1/2) \cup (1/2, 2]$$

nulla se x = 0 , x = 2

LIM per $x \to 1/2$ $f(x) \to +\infty$ as. verticale

per $x \to -1$ $f(x) \to -\infty$ as. verticale

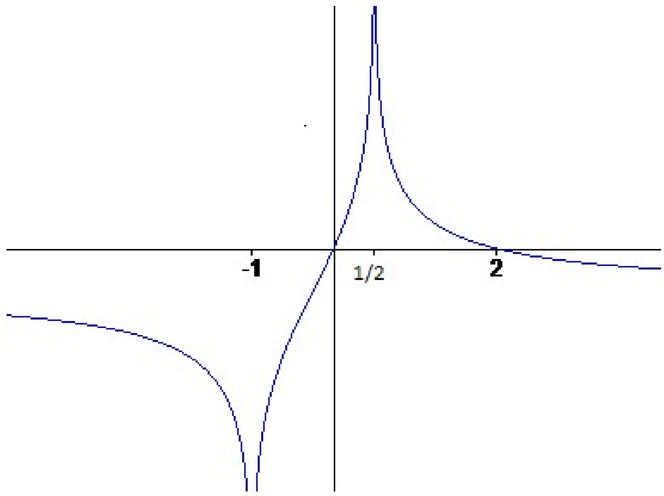
per $x \to \pm\infty$ $f(x) \to -\log 2 / 2$ as. orizzontale

DRV $f'(x) = \frac{-3/2}{(x+1)(2x-1)}$

positiva per $-1 < x < 1/2$

DRV^2 $\quad f''(x) = \dfrac{3(4x+1)}{2(x+1)^2(2x-1)^2}$

positiva per x > -1/4 ; x = -1/4 punto di flesso



f : (½ , +∞) → (- log2 / 2 , +∞) è invertibile

$$\log\sqrt{\left|\frac{x+1}{2x-1}\right|} = k \;\rightarrow\; \log\frac{x+1}{2x-1} = 2k \;\rightarrow\; \frac{x+1}{2x-1} = e^{2k}$$

$$x = \frac{e^{2k}+1}{2e^{2k}-1}$$

Dobbiamo studiare l'esistenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{2x-1}\right) + \frac{1}{2}\log 2\right)dx =$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{2}\log\left(\frac{2x+2}{2x-1}\right)dx$$

per $x \rightarrow +\infty$ $\quad \log\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right) \approx \dfrac{2x+2}{2x-1} - 1 = \dfrac{3}{2x-1} \approx \dfrac{3}{2x}$

L'integrale non esiste.

3. Data la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = -4 \qquad a_{n+1} = \frac{7a_n + 2}{2a_n + 4}$$

trovarne (se esistono) limite , massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore.

Solo per esame da 12 crediti:

Indicato con L il limite della successione, studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - L)$

A partire da $a_2 = 13/2$ la successione si mantiene di segno positivo (si prova per induzione).

Studiamo la successione a partire da a_2 .

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \frac{7a_n + 2}{2a_n + 4} \geq a_n \iff 2a_n^2 - 3a_n - 2 \leq 0 \iff 0 \leq a_n \leq 2$$

Poiché $a_2 > 2$, facciamo vedere per induzione che la successione si mantiene sempre > 2.

$$a_{n+1} > 2 \iff \frac{7a_n + 2}{2a_n + 4} > 2 \iff 7a_n + 2 > 4a_n + 8 \iff a_n > 2$$

Quindi la successione tende a 2 decrescendo (dal secondo termine in poi).

min = inf = - 4 ; max = sup = 13/2.

[B]

1. Risolvere l'equazione differenziale y' = $\dfrac{e^x}{(1-e^x)\,y}$, precisando il dominio in cui sono definite le soluzioni e il loro grafico.

C.E. x , y ≠ 0

SIMMETRIE y (x) soluz. → - y (x) soluz. ; possiamo supporre y > 0

SLZ COSTANTI non esistono

SLZ NON COSTANTI

$$\int y\,dy = \int \frac{e^x}{1-e^x}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\log\left| e^x - 1\right| + c$$

$$y = \sqrt{\log(e^x-1)^{-2} + 2c}$$

Deve essere

$$\log(e^x-1)^{-2} > -2c$$

$$(e^x-1)^{-2} > e^{-2c} \quad \Leftrightarrow \quad (e^x-1)^2 < e^{2c}$$

$$1-e^c < e^x < 1+e^c$$

$\log(1-e^c) < x < \log(1+e^c)$, x ≠ 0 con c < 0

oppure

$x < \log(1+e^c)$, x ≠ 0 con c > 0

$$y = \sqrt{\log(e^x - 1)^{-2} + 2c}$$

$\log(1 - e^c) < x < \log(1 + e^c)$, $x \neq 0$ con $c < 0$

per $x \to \log(1 - e^c)^+$ $y \to 0$, $y' \to +\infty$ (tg. verticale)

per $x \to \log(1 + e^c)^-$ $y \to 0$, $y' \to +\infty$ (tg. verticale)

per $x \to 0$ $y \to +\infty$

y ' ha il segno opposto ad x

$$y = \sqrt{\log(e^x - 1)^{-2} + 2c}$$

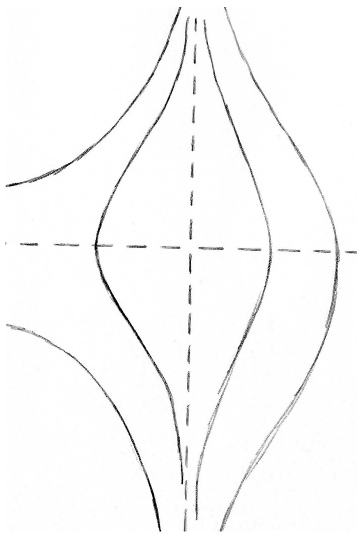
$x < \log(1 + e^c)$, $x \neq 0$ con $c > 0$

per $x \to \log(1 + e^{-c})^-$ $y \to 0$, $y' \to -\infty$ (tg. verticale)

per $x \to -\infty$ $y \to \sqrt{2c}$ (asintoto orizzontale)

per $x \to 0$ $y \to +\infty$

y ' ha il segno opposto ad x



2. Studiare la funzione f (x) = $\log \sqrt{\left| \dfrac{x-1}{2x+1} \right|}$ e tracciarne il grafico. In particolare, precisarne il segno, gli intervalli di convessità, gli asintoti.

Trovare il massimo intorno di +∞ in cui la funzione è invertibile e scriverne l'inversa, precisandone il dominio.

Dire se esiste finita l'area della regione compresa tra il grafico e l'asintoto orizzontale e situata a destra della retta x = 2.

C.E. x ≠1 , x ≠ - ½

SGN positiva se

$$\frac{x-1}{2x+1} \geq 1 \text{ oppure } \frac{x-1}{2x+1} \leq -1$$

$$\frac{-2-x}{2x+1} \geq 0 \text{ oppure } \frac{3x}{2x+1} \leq 0$$

$$-2 \leq x < -1/2 \text{ oppure } -1/2 < x \leq 0$$

$$[-2, 1/2) \cup (1/2, 0]$$

nulla se x = 0 , x = -2

LIM per x → - ½ f (x) → +∞ as. verticale

per x → 1 f (x) → -∞ as. verticale

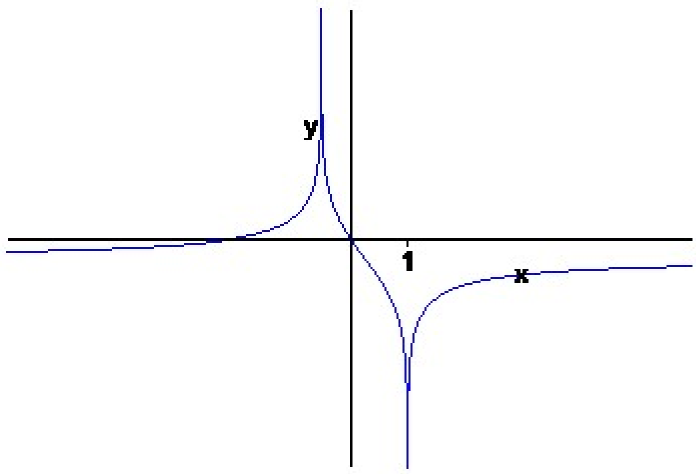
per x →±∞ f (x) → - log2 / 2 as. orizzontale

DRV f ' (x) = $\dfrac{3/2}{(x-1)(2x+1)}$

positiva per x < -1/2 oppure x > 1

DRV^2 $\qquad f''(x) = \dfrac{3(1-4x)}{2(x+1)^2(2x-1)^2}$

positiva per $x < 1/4$; $x = 1/4$ punto di flesso



f : $(1, +\infty) \rightarrow (-\infty, -\log 2/2)$ è invertibile

$$\log\sqrt{\left|\frac{x-1}{2x+1}\right|} = k \;\rightarrow\; \log\frac{x-1}{2x+1} = 2k \;\rightarrow\; \frac{x-1}{2x+1} = e^{2k}$$

$$x = \frac{1+e^{2k}}{1-2e^{2k}}$$

Dobbiamo studiare l'esistenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)\right)dx =$$

$$\int_2^{+\infty} -\frac{1}{2}\log\left(\frac{2x-2}{2x+1}\right)dx$$

per $x \rightarrow +\infty$ $\quad \log\left(\dfrac{2x-2}{2x+1}\right) \approx \dfrac{2x-2}{2x+1} - 1 = \dfrac{1}{2x+1} \approx \dfrac{1}{2x}$

L'integrale non esiste.

3. Data la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = -3 \qquad a_{n+1} = \frac{5a_n + 4}{a_n + 2}$$

trovarne (se esistono) limite , massimo, minimo, estremo superiore ed inferiore.

Solo per esame da 12 crediti:

Indicato con L il limite della successione, studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - L)$

A partire da $a_2 = 11$ la successione si mantiene di segno positivo (si prova per induzione).

Studiamo la successione a partire da a_2 .

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \frac{5a_n + 4}{a_n + 2} \geq a_n \Leftrightarrow a_n^2 - 3a_n - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a_n \leq 4$$

Poiché $a_2 > 4$, facciamo vedere per induzione che la successione si mantiene sempre > 4.

$$a_{n+1} > 4 \Leftrightarrow \frac{5a_n + 4}{a_n + 2} > 4 \Leftrightarrow 5a_n + 4 > 4a_n + 8 \Leftrightarrow a_n > 4$$

Quindi la successione tende a 4 decrescendo (dal secondo termine in poi).

min = inf = - 3 ; max = sup = 11

Per studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 4)$, applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1} - 4}{a_n - 4} = \frac{\frac{5a_n + 4}{a_n + 2} - 4}{a_n - 4} = \frac{1}{a_n + 2} \to \frac{1}{6} < 1$$

La serie converge.