Soluzioni [A]

1.

Poiché $e^{2/n} - e^{1/n} \approx 1/n$, la serie dei valori assoluti diverge.

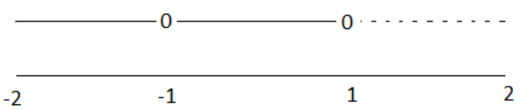
La serie data converge per il teorema di Leibniz, in quanto serie a termini di segno alterno $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con la successione a_n che tende a 0 decrescendo. Che tenda a 0 l'abbiamo già provato; che decresca si prova calcolando la derivata della funzione f (x) = $e^{2/x} - e^{1/x}$ e provando che è negativa (almeno in un intorno di +∞). Infatti f' (x) = $e^{1/x}\,(1 - 2e^{1/x})/x^2$ e il termine in parentesi tende a -1 per x→+∞ (e dunque è localmente negativo).

2.

La funzione f (t) è integrabile in un intorno di 0, mentre non lo è in nessun intorno di ±2.

Infatti $\text{per } t \to 0 \quad f(t) \approx -\log|t|/4 \quad ; \quad \text{per } t \to \pm 2 \quad f(t) \approx k/(t \mp 2)$

Segno f (t)



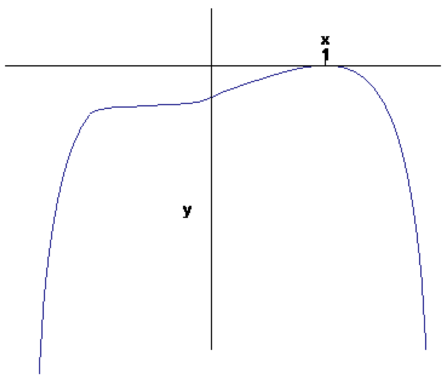
La funzione F (x) è definita in (-2 , 2); è sempre negativa (nulla per x = 1).

Per x →±2 F (x) → -∞

$$F'(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2 - 4}\log|x|$$

Il segno della derivata è quello già trovato per la funzione f.

x = 1 e x = -1 punti a tangente orizzontale, x = 0 punto a tangente verticale



Il programma usato per disegnare il grafico non rileva il punto a tangente verticale

3.

y = 1 soluzione costante

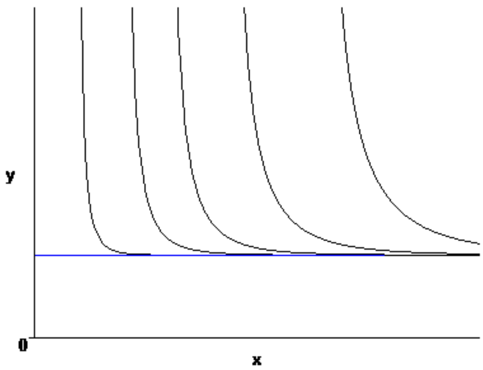
B (y) = 3 (1 – y^2) , B ‘ (1) = -6 Le soluzioni curvilinee non intersecano quella costante

Separando le variabile ed integrando, si trova successivamente:

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int \frac{3}{x}\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = 3\log x + c \Rightarrow \frac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1} = 3\log x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\frac{y+1}{y-1} = 6\log x + 2c \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} = k\,x^6 \quad (k = e^{2c} > 0) \Rightarrow y = \frac{k\,x^6+1}{k\,x^6-1}$$

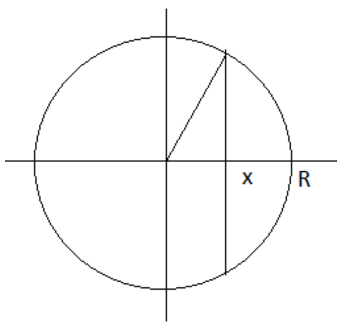
Perché le soluzioni verifichino la condizione y > 1 , deve essere x > 1 / $\sqrt[6]{k}$.



La condizione iniziale y (1) = 2 è soddisfatta per k = 3.

4.

Il piano perpendicolare all’asse x nel punto di ascissa x taglia il cerchio di base in segmento di lunghezza $2\sqrt{R^2 - x^2}$, che è la base del triangolo sezione. L’area del triangolo è dunque $h\sqrt{R^2 - x^2}$, da cui si ricava che il volume del solido è dato da $h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \pi h R^2 / 2$ (l’integrale misura l’area del semicerchio di raggio R.



Soluzioni [B]

1.

Poiché $\dfrac{\log n}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, la serie dei valori assoluti diverge.

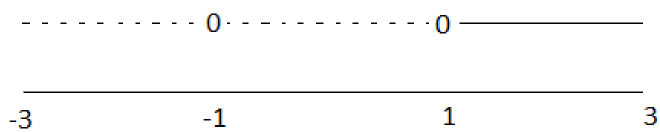
La serie data converge per il teorema di Leibniz, in quanto serie a termini di segno alterno $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con la successione a_n che tende a 0 decrescendo. Che tenda a 0 è immediato; che decresca si prova calcolando la derivata della funzione f (x) = $\log x / \sqrt{x}$ e provando che è negativa (almeno in un intorno di +∞). Infatti f' (x) = $(2 - \log x) / (2\, x^{3/2})$ tende a -∞ per x→+∞ (e dunque è localmente negativa).

2.

La funzione f (t) è integrabile in un intorno di 0, mentre non lo è in nessun intorno di ±3.

Infatti $\text{per } t \to 0 \quad f(t) \approx -\log|t|/9 \quad ; \quad \text{per } t \to \pm 3 \quad f(t) \approx k/(t \mp 3)$

Segno f (t)



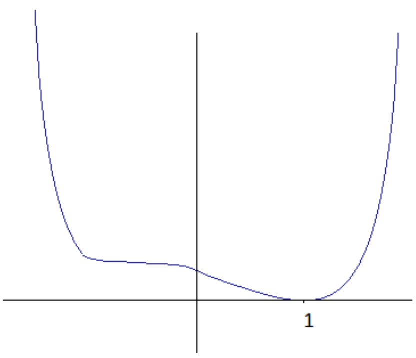
La funzione F (x) è definita in (-3 , 3); è sempre positiva (nulla per x = 1).

Per x →±3 F (x) → +∞

F' (x) = $\dfrac{(x+1)^3}{9 - x^2} \log|x|$.

Il segno della derivata è quello già trovato per la funzione f.

x = 1 e x = -1 punto a tangente orizzontale, x = 0 punto a tangente verticale



Il programma usato per disegnare il grafico non)
rileva il punto a tangente verticale

3.

y = -1 soluzione costante

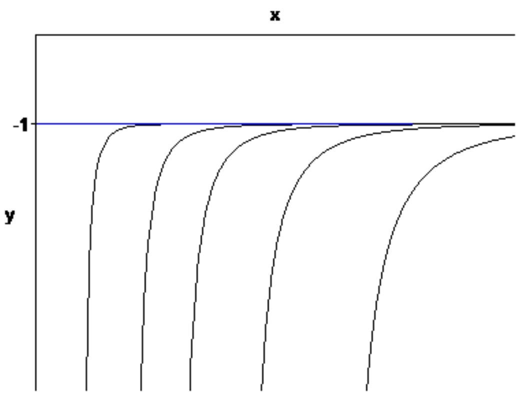
B (y) = 3 (y^2 - 1) , B ' (-1) = -6 Le soluzioni curvilinee non intersecano quella costante

Separando le variabile ed integrando, si trova successivamente:

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{3}{x}\, dx \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 3\log x + c \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} \log \frac{y-1}{y+1} = 3\log x + c \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \log \frac{y-1}{y+1} = 6\log x + 2c \ \Rightarrow \ \frac{y-1}{y+1} = k\, x^6 \quad (k = e^{2c} > 0) \ \Rightarrow \ y = \frac{1 + k\, x^6}{1 - k\, x^6}$$

Perché le soluzioni verifichino la condizione y < -1 , deve essere x > 1 / $\sqrt[6]{k}$.



La condizione iniziale y (1) = -2 è soddisfatta per k = 3.

4.

Il piano perpendicolare all'asse x nel punto di ascissa x taglia il cerchio di base in segmento di lunghezza $2\sqrt{R^2 - x^2}$, che è la base del triangolo sezione. L'altezza del triangolo è $\sqrt{3}\sqrt{R^2 - x^2}$ e dunque l'area vale $\sqrt{3}\,(R^2 - x^2)$. Il volume del solido è dato da $\sqrt{3}\int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = 4R^3 / \sqrt{3}$.