Soluzioni

1. La funzione è 2π-periodica; possiamo dunque limitarci a studiarla in $[0, 2\pi]$.

C.E. $\quad x \in [0, 2\pi] - \{ \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \}$

SGN $\quad$ sempre positiva

LIM $\quad$ per $x \to \frac{\pi}{2}$ $\quad f(x) \to +\infty$ $\quad$ as. verticale

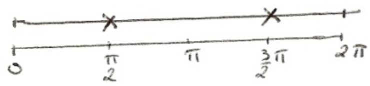
per $x \to \frac{3}{2}\pi$ $\quad f(x) \to 0$ $\quad$ disc. eliminabile; si pone $f(\frac{3}{2}\pi) = 0$

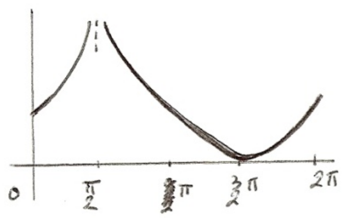
$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 1$

DRV $\quad f'(x) = \dfrac{2 + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}{|\cos x|^{3/2}} \operatorname{sgn} \cos x$

per $x \to \frac{3}{2}\pi$ $\quad f'(x) \to 0$; dunque $f'(0) = 0$

DRV^2 $\quad f''(x) = \dfrac{(\operatorname{sen}^2 x + 2)(\operatorname{sen} x + 1)}{2\,|\cos x|^{5/2}}$





$y = f(x)$

2. $$\int \frac{\lg(x^2 - 2x + 2)}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} \lg(x^2 - 2x + 2) + \int \frac{2(x-1)}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx$$

$$= -\frac{1}{x} \lg(x^2 - 2x + 2) + \int \left\{ -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 2x + 2} \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{x} \lg(x^2 - 2x + 2) - \lg|x| + \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}\, dx + \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1}$$

$$= -\frac{1}{x} \lg(x^2 - 2x + 2) - \lg|x| + \frac{1}{2} \lg(x^2 - 2x + 2) + \operatorname{arctg}(x - 1) + c$$

3.

$$f(x) = \lg\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right) + x\, e^{x \lg(1+x)}$$

$$\lg(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^{x\lg(1+x)} = e^{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$x\, e^{x\lg(1+x)} = x + x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{(1-x)}{1+x^2} = (1-x)(1-x^2+o(x^3)) = 1 - x - x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\lg\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right) = (-x-x^2+x^3) - \frac{1}{2}(x^2+2x^3) + \frac{1}{3}(-x^3) + o(x^3)$$

$$= -x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

La funzione è un infinitesimo del secondo ordine ed ha come p. principale $-\frac{3}{2}x^2$.

4. Per $x=0$ la serie è nulla.

Per $x \neq 0$:

$|a_n| \sim \frac{|x|^n}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \to |x|$

Dunque:

se $-1 < x < 1$ la serie converge

se $x < -1 \vee x > 1$ la serie non converge.

Per $x = 1$: $\sum_n \frac{1+n}{1+n^2} \sim \sum_n \frac{1}{n}$ la serie diverge

Per $x = -1$: $\sum_n (-1)^n \frac{1+n}{1+n^2}$ la serie converge per il teorema di Leibniz.

5. Il polinomio caratteristico k^2+1 ha come radici $k = \pm i$.
Una base dello spazio delle soluzioni dell'eq. omogenea è $\{\cos x, \operatorname{sen} x\}$.
Dell'eq. completa in forma complessa $z'' + z = x^2 e^{ix}$ cerchiamo una soluzione della forma $\bar{z}(x) = x(Ax^2 + Bx + C)\, e^{ix}$.
Effettuando i calcoli, si deduce:

$$A = -\frac{i}{6} \qquad B = \frac{1}{4} \qquad C = \frac{i}{4}.$$

La parte immaginaria di $\bar{z}$, cioè

$$\bar{y}(x) = x\left(-\frac{1}{6}x^2\cos x + \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}x \operatorname{sen} x\right)$$

è soluzione reale dell'eq. completa.
In definitiva, le soluzioni dell'eq. data sono:

$$y(x) = x\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}x^2\right)\cos x + \frac{1}{4}x \operatorname{sen} x + c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$