Istituzioni di Matematiche I

Prova scritta parziale n.2 del 7.02. 08 - Calcolo integrale

Soluzioni

1.

Studio dell'integrabilità di $f(t) = \sqrt{|1 - t^2|} / \log t$

sì	sì	no
0	1	$+\infty$

Infatti :

$t = 0$	disc. eliminabile
per $t \to 1$	$f(t) \approx \sqrt{2}\,\sqrt{|1 - t|} / (t - 1)$ infinito di ordine 1/2
per $t \to +\infty$	$f(t) \to +\infty$

Studio della funzione integrale F (x) :

C.E. $x \geq 0$

SGN positiva , eccetto che per x = 0 e per x = 1 in cui si annulla

LIM per $x \to +\infty$ $F(x) = \dfrac{x^2 - x}{\log\xi}\sqrt{|1 - \xi^2|} \approx \dfrac{x^2\,\xi}{\log\xi} > \dfrac{x^3}{2\log x} \to +\infty$

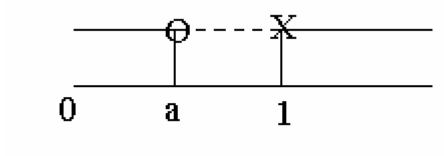
senza asintoto

DRV $$F'(x) = \frac{x\sqrt{|1 - x^4|} - \sqrt{|1 - x^2|}}{\log x}$$

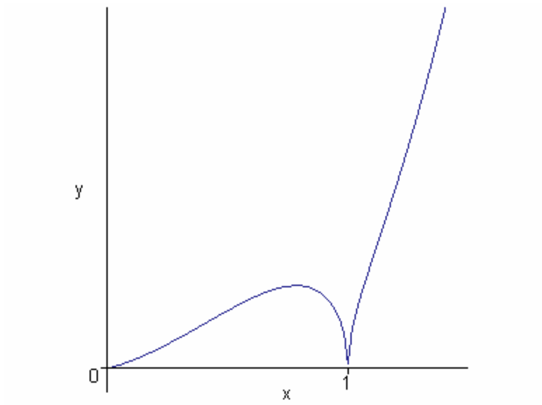
$$= \frac{\sqrt{|1 - x^2|}}{\log x}\left(x\sqrt{1 + x^2} - 1\right) \qquad \text{per } x \neq 0,\ x \neq 1$$

Calcolando il limite della derivata , si trova che x = 0 è un punto a tangente orizzontale , x = 1 una cuspide.

SGN DRV



GRAFICO



2.

C.E. : $x \in R$, $y \in R - \{ 0 \}$
Soluzioni costanti : non esistono
Ricerca di soluzioni non costanti :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{s}{1+s^4}\, ds = \int_{x_0}^{x} s \; ds$$

$\rightarrow$ $\quad \text{arctg}\, y^2 - \text{arctg}\, y_0^2 = x^2 - x_0^2$ (nel primo integrale si può porre $s^2 = t$)

$\rightarrow$ $\quad \text{arctg}\, y^2 = x^2 - c$

$\rightarrow$ $\quad y^2 = \text{tg}\,(x^2 - c)$ purché sia $0 < x^2 - c < \pi / 2$

$\rightarrow$ $\quad y = \pm \sqrt{\text{tg}\,(x^2 - c)}$ purché sia $c < x^2 < c + \pi / 2$.

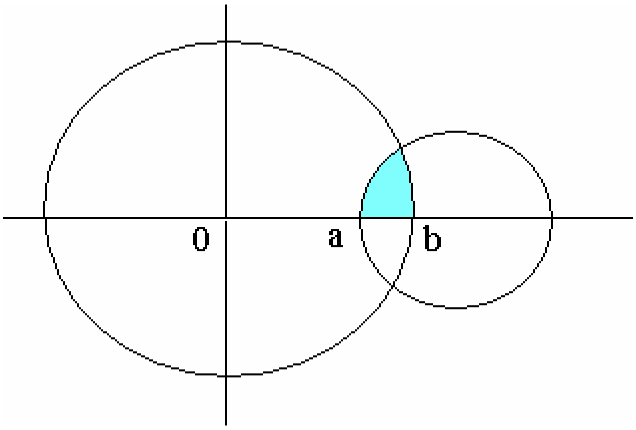
Perché le condizioni trovate abbiano senso deve essere $c \geq \pi / 2$.
In particolare, si ottiene :

se $c \geq 0$ $\qquad \sqrt{c} < | x | < \sqrt{c + \pi / 2}$

se $- \pi / 2 < c < 0$ $\qquad | x | < \sqrt{c + \pi / 2}$

3.

Tracciamo una sezione delle due sfere :



$a = 3/2 \quad b = 2$

Le due circonferenze hanno equazioni $x^2 + y^2 = 4$, $(x - 5/2)^2 + y^2 = 1$ e si intersecano in due punti di ascissa 37/20 .
La regione richiesta si ottiene dalla rotazione attorno all'asse delle x della parte colorata :

$$V = \pi \int_{3/2}^{37/20} \left(1 - (x - 5/2)^2 \right) dx + \pi \int_{37/20}^{2} (4 - x^2)\, dx = ...$$

4.

La serie è definita se l'argomento del logaritmo è maggiore di 0 e questo accade se $x < 0$. Per tali valori di x , la successione e^{nx} tende a 0 e dunque

$$a_n \sim \frac{1 - e^{nx}}{1 + e^{nx}} - 1 = \frac{- 2\, e^{nx}}{1 + e^{nx}} \sim - 2\, e^{nx} = - 2\, (e^x)^n \; .$$

La serie data è dunque equivalente ad una serie geometrica di ragione e^x convergente perché $0 < e^x < 1$.