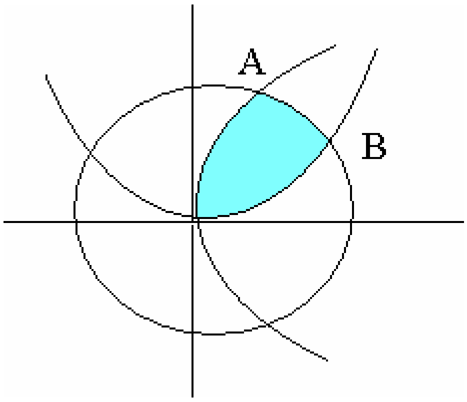
Istituzioni di Matematiche I

Prova scritta parziale n.2 dell'8 .01. 08 - Calcolo integrale

Soluzioni

1.



$A = (1, \sqrt{2}) \quad B = (\sqrt{2}, 1)$

$$\text{volume} = \pi \int_0^1 \left(2x - x^4/4 \right) dx + \pi \int_1^{\sqrt{2}} \left(3 - x^2 - x^4/4 \right) dx = \ldots.$$

2.

C.E. : $x \in R$, $y \in [-1, 1] - \{0\}$

Soluzioni costanti : $y = \pm 1$

Ricerca di soluzioni non costanti :

$$\int_{y_0}^{y} \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} ds = \int_{x_0}^{x} s \, ds \rightarrow \sqrt{1 - y_0^2} - \sqrt{1 - y^2} = \frac{x^2 - x_0^2}{2} \rightarrow$$

$$\sqrt{1 - y^2} = \frac{c - x^2}{2}$$

Eleviamo al quadrato, dopo aver imposto che il secondo membro sia positivo :

$$1 - y^2 = \frac{(c - x^2)^2}{4} \quad \text{purché } c - x^2 > 0 \rightarrow y^2 = 1 - \frac{(c - x^2)^2}{4} \rightarrow$$

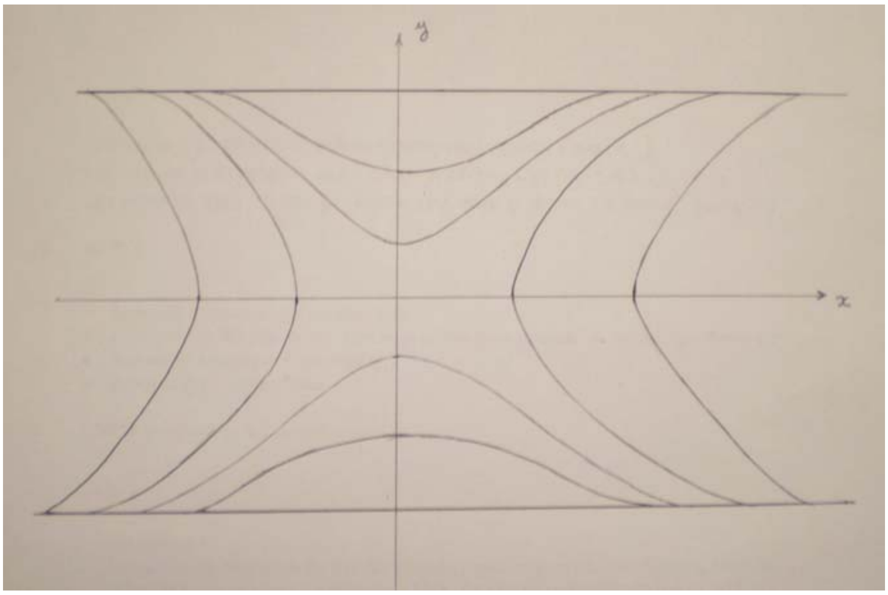
$$y = \pm \frac{\sqrt{4 - (c - x^2)^2}}{4} \quad \text{purché } 4 - (c - x^2)^2 > 0$$

Le soluzioni sono dunque definite se $0 < c - x^2 < 2$, cioè se $c - 2 < x^2 < c$, cioè :

se $0 < c < 2$ per $|x| < \sqrt{c}$

se $c \geq 2$ per $\sqrt{c - 2} < |x| < \sqrt{c}$.

Le soluzioni trovate si raccordano con le soluzioni costanti.



3.

Studio dell'integrabilità di $f(t) = 1 / \log|t|$

no		no		sì		no		no
$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$

Infatti :

$t = 0$ disc. eliminabile

per $t \to 1$ $f(t) \approx 1 / (t - 1)$

per $t \to +\infty$ $f(t) > 1 / t$

(gli altri casi sono analoghi , data la parità della funzione) .

Studio della funzione integrale F (x) :

C.E. $x > -1 \ , \ x \neq 1$

SGN negativa per $-1 < x < 0$, nulla per $x = 0$, positiva per $0 < x < 1$ e per $x > 1$

LIM per $x \to -1$ $\quad F(x) \to \int_{-1}^{1} f(t)\, dt = 2\int_{0}^{1} f(t)\, dt = -\infty$

per $x \to 1$ $\quad F(x) \approx \int_{x}^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \log\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| \to \log 2$ (disc. elim.)

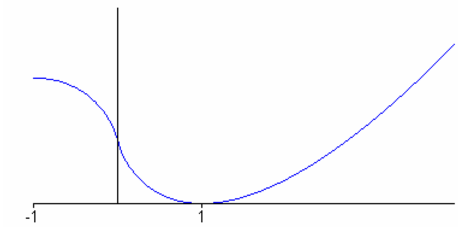
per $x \to +\infty$ $\quad F(x) = \frac{x^2 - x}{\log\xi} \approx \frac{x^2}{\log\xi} > \frac{x^2}{2\log x} \to +\infty$ (senza as.)

DRV $\quad F'(x) = \frac{x-1}{\log|x|}$

La derivata dove è definita è positiva e quindi F è crescente.
$F'(0) = 0 \ , \ F'(1) = 1$

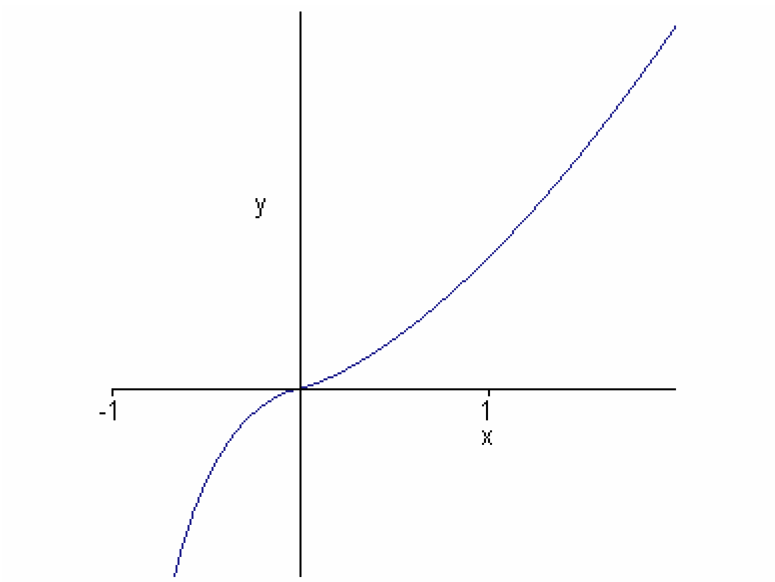
$$F''(x) = \frac{x\log|x| - x + 1}{x\log^2|x|} \quad \frac{x\log|x| - x + 1}{x\log^2|x|}$$

Per dedurre il segno di F ” , occorre studiare graficamente il segno della funzione al numeratore . Il grafico di questa funzione è riportato sotto :



Dunque F è concava per $-1 < x < 0$, convessa per $x > 0$; $x = 0$ è punto di flesso.

GRAFICO



4.

Se $x = 0$ $\quad a_n = \dfrac{\log 2}{n^2}$ serie armonica convergente

Se $x > 0$ $\quad a_n \sim \dfrac{x \log n}{n^2}$ serie convergente

$\dfrac{\log n}{n^2} < \dfrac{n^{\alpha}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$; prendiamo α in modo che sia $2 - \alpha > 1$.

Se $x < 0$ $\quad a_n \sim \dfrac{n^{x}}{n^2} = \dfrac{1}{n^{2-x}}$ serie convergente

essendo $2 - x > 1$.