Istituzioni di Matematiche I

Prova scritta parziale n1 del 7.2.08 - Calcolo differenziale

Soluzioni

1.

C.E.

$$\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} \le 1 \iff \begin{cases} 1+2x+x^2 \le 1-2x+x^2 \\ x \ne 1 \end{cases} \iff x \le 0$$

SGN

La funzione è sempre positiva , eccetto che per x = 0 per cui si annulla

LIM

Per $x \to -\infty$ $\quad f(x) \to 0$ $\quad$ (asintoto orizzontale)

$f(-1) = \pi/2$

DRV

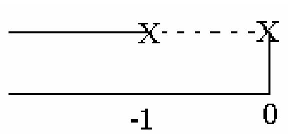
$$-\frac{1}{\sqrt{1-\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}}\;\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}\;\operatorname{sgn}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\;\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$-\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x-|1+x|}}\;\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{|1+x|}}\;\operatorname{sgn}(1+x)\;\frac{1}{(1-x)^2}$$

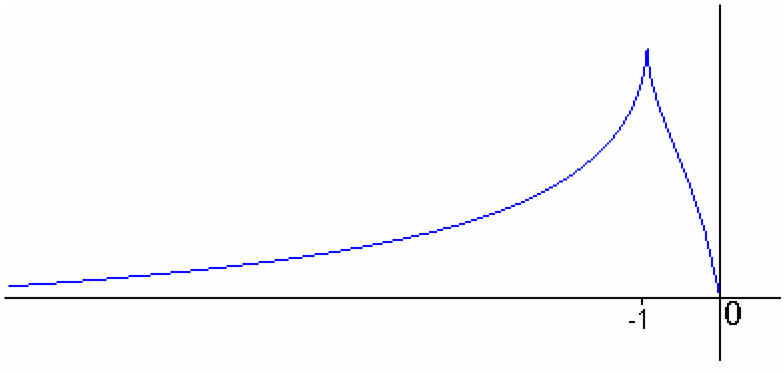
$$-\frac{\operatorname{sgn}(1+x)}{\sqrt{1-x-|1+x|}\;\sqrt{|1+x|}\;(1-x)} \qquad \text{per } x \ne 0\,,\ x \ne 1$$

x = 0 punto a tangente verticale , x = 1 punto a cuspide

segno della derivata



GRAFICO



2.

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \qquad f'''(x) = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

$$f(x) = 2x + \frac{2(1+3\xi^2)}{3(1-\xi^2)^3}\, x^3$$

Nell'intervallo [0 , 1/5] l'errore è positivo e dunque l'approssimazione è per difetto.
Una stima dell'errore nell'intervallo è data da

$$0 < E < \frac{2(1+3/25)}{3(1-1/25)^3}\ 1/125 \sim 0{,}0068 < 7 \cdot 10^{-3}$$

3.

La funzione è definita e continua in tutto in R e quindi in particolare nell'intervallo dato.
La sua derivata

$$f'(x) = 2 - \frac{x \operatorname{sgn}(x^2 - 1)}{\sqrt{\left| x^2 - 1 \right|}}$$

non è definita per $x = \pm 1$. Per la validitá del teorema di Lagrange occorre che la funzione sia derivabile in ogni punto *interno* all'intervallo considerato : la mancanza di derivata per $x = -1$ fa sì che il teorema non sia valido.
Le ipotesi di un teorema sono solo condizioni sufficienti a garantire la validità della tesi : se le ipotesi non sono verificate, la validità della tesi non è assicurata ma nemmeno esclusa . Controlliamo con un calcolo diretto.
Dobbiamo verificare se esiste $x \in (-2, 1)$ tale che :

$$2 - \frac{x \operatorname{sgn}(x^2 - 1)}{\sqrt{\left| x^2 - 1 \right|}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ovvero

$$- \frac{x \operatorname{sgn}(x^2 - 1)}{\sqrt{\left| x^2 - 1 \right|}} = \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Possiamo elevare ambo i membri al quadrato, dopo aver imposto che siano dello stesso segno :

$$x \operatorname{sgn}(x^2 - 1) < 0 \quad , \quad 3x^2 = \left| x^2 - 1 \right|$$

Delle due soluzioni dell'equazione ($x = \pm 1/2$), solo quella positiva ($x = 1/2$) soddisfa anche l'altra condizione.

4.

Il problema richiede di scrivere il polinomio di Taylor di punto iniziale 0 e grado 3 per la funzione data.
Al terzo ordine si ottengono le seguenti approssimazioni :

$$1 - \operatorname{sen} x \sim 1 - x + x^3 / 6$$

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen} x} \sim 1 + \frac{1}{2}(-x + x^3/6) - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} = 1 - \frac{x}{2} x - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{48}$$

$$e^{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}} \sim e \cdot e^{-x/2 - x^2/8 + x^3/48} \sim e(1 - x/2 + x^3/16)$$

$\operatorname{tg} x \sim x + x^3 / 3$

$\cos (\operatorname{sen} x) \sim \cos (x - x^3 / 6) \sim 1 - x^2 / 2$

$$\frac{1}{1 + \operatorname{sen} (\operatorname{tg} x)} \sim 1 - (x - x^2 / 2 + x^3 / 3) + (x^2 - x^3) - x^3 =$$

$$= 1 - x + 3 x^2 / 2 - 7 x^3 / 3 .$$

In definitiva dunque :

$P (x) = e (1 - 3 x / 2 + 2 x^2 - 145 x^3 / 48) .$

5.

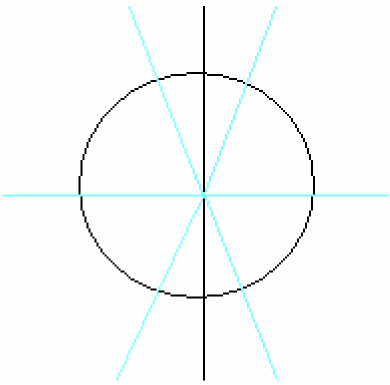
Per prima cosa osserviamo che $w = 0$, $z \in C$ sono soluzioni.
Cerchiamo soluzioni con $w \neq 0$.
Dalla prima equazione si ottiene

$$z = \frac{\overline{w}}{i w} \quad \text{cioè} \quad \overline{z} = \frac{w}{- i \overline{w}} .$$

Sostituendo nella seconda equazione :

$$\frac{w^2}{- i \overline{w}} + \frac{\overline{w}^2}{i w} = 0 \quad \leftrightarrow \quad w^3 = \overline{w}^3$$

Posto $w = r e^{i \theta}$, si trova che deve essere $r > 0$ qualunque , $3 \theta = - 3 \theta + 2 k \pi$ cioè $\theta = k \pi / 3$ con $k = 0 , \dots , 5$.



Per l'incognita z si ha : $z = e^{- i (\pi / 2 + 2 k \pi / 3)}$.